

Panamática 8

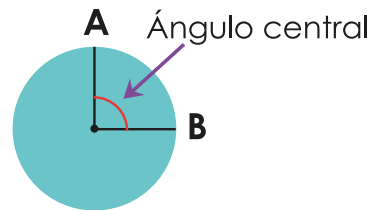
Guía del estudiante
Trimestres 2 y 3

$$\sqrt{5} \quad \pi$$

“R” $(1\frac{1}{3})(-1) = -1$

Exponente m
 n
Coeficiente

$$c^2 = (a^2) + (b^2)$$



$(+)(+) = +$	$+ \div + = +$
$(+) (-) = -$	$+ \div - = -$
$(-) (+) = -$	$- \div + = -$
$(-) (-) = +$	$- \div - = +$

Material para validación - 2022

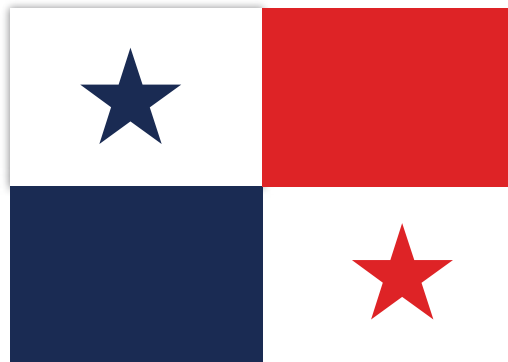


Mediante la Ley 34 de 1949, reformada con la Ley 2 de 2012, se estableció que Panamá adopta como Símbolos de la Nación: la Bandera, el Himno y el Escudo. A partir de dicha Ley se sustituyó la denominación de "símbolos patrios" por "Símbolos de la Nación". Asimismo, con la Ley se creó la Comisión Nacional de los Símbolos de la Nación (Conasina), cuya función principal es promover el uso adecuado de los Símbolos de la Nación.

Himno



Bandera



Escudo



Autores

Letra: Jerónimo Ossa E.

Música: Santos Jorge A.

Confección: María Ossa de Amador

Diseño: Manuel Encarnación Amador

Concepto: Nicanor Villalaz L.

Diseño y pintura: Max Lemm B.

Panamática 8

Guía del estudiante 2022

Ministra de Educación	Su Excelencia Maruja Gorday de Villalobos
Viceministra Académica de Educación	Su Excelencia Zonia Gallardo de Smith †
Viceministro Administrativo de Educación	Su Excelencia José Pío Castellero
Viceministro de Infraestructura de Educación	Su Excelencia Ricardo Sánchez
Secretario General	Ricardo Alonso Vaz Wilky
Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa	Carmen Heredia Reyes Recuero Directora Nacional Yovany Guerra G. Coordinador Nacional de Matemática
Dirección Nacional de Formación y Perfeccionamiento Docente	Anabella Yepes Martínez Directora Nacional
Equipo de contextualizadores	Jesús Domingo Chacón Pinto Daniel Edil Herrera Muñoz Manuel Antonio Herrera Herrera Guillermo Castillo
Evaluación técnica	Yovany Guerra G.
Coordinación editorial	Esteban Ureña Salazar
Edición	Yorlyn Calderón Quesada
Corrección de estilo	Matilde H. de Loo
Diagramación	Diana Campos y Rosa Cerdas
Conceptualización de portada	Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa Aracelly Agudo
Coordinación del Proyecto	Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)



La serie Panamática ha sido producida gracias a la colaboración del Ministerio de Educación del Gobierno de El Salvador, a través del proyecto ESMATE, material diseñado para Matemática con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Este material didáctico fue posible con el respaldo de los recursos aportados por el Programa Mejorando la Eficiencia y Calidad del Sector Educativo (PN-L1143), Contrato de Préstamo n.º 4357/OC-PN con el Banco Interamericano de Desarrollo, a través del componente Apoyo Pedagógico Integral y Continuo.

La serie ha sido distribuida a estudiantes panameños, en centros educativos oficiales del país. Derechos reservados. Prohibida su venta y su reproducción con fines comerciales por cualquier medio, sin previa autorización del MEDUCA.



MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Estimados jóvenes:

Estamos contentos y complacidos de volver a verles junto a sus compañeros y profesores. Las clases interactivas, dinámicas, de manera cooperativa y colaborativa permitirán que todos podamos avanzar juntos y hacer del aprendizaje un espacio entretenido y enriquecedor.

La educación tiene el potencial de transformar sus vidas y permitirles más oportunidades para participar en la nueva sociedad del conocimiento y de las tecnologías de la información.

La comprensión lectora, junto con el desarrollo del pensamiento matemático y las habilidades de pensamiento abstracto, son factores clave para progresar en el desarrollo de todas las asignaturas y elegir el tipo de bachillerato que les gustaría estudiar cuando culminen sus estudios de Premedia.

Además, una educación de calidad es también más humana, más inclusiva y altruista; contribuye en la formación de ciudadanos íntegros, solidarios y comprometidos con el futuro de su familia, de su comunidad y de la sociedad. Les ofrece oportunidades, a todos, para mejorar sus competencias a su ritmo, con sus habilidades, sin dejar a nadie atrás; es permanente, equitativa e inclusiva.

Queridos jóvenes, el futuro los espera para que puedan concretar sus metas y alcanzar sus sueños de ser grandes hombres y mujeres, productivos y constructores de una mejor sociedad. Que este retorno a clases fortalezca todas sus competencias y les garantice una formación integral con calidad.

Éxitos en el año escolar 2022.

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Estructura del libro

Secciones de la lección y las clases

Título de la lección

Título de la clase

Problema

En este primer momento de cada clase, se solicita al estudiante que piense una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido por desarrollar.

Solución

En el segundo momento de la clase, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión

En el tercer momento didáctico, se presenta el contenido de manera formal. Se relacionan los dos primeros momentos para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Observa cómo se hace

Esta sección propone ejemplos de ejercicios resueltos para contribuir a la comprensión del procedimiento relativo a los contenidos de la **Conclusión**.

Práctica

En el último momento didáctico se incluyen ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Clases especiales

Repasa tus conocimientos

Este programa aparece siempre como la primera clase de una lección. Propone ejercicios para activar conocimientos previos sobre los temas de la lección.

Practica lo aprendido

Presenta ejercicios al final de cada lección, que integran los contenidos desarrollados en las clases.

Distribución de las clases

Este segundo tomo se propone para el segundo y tercer trimestres del curso, y está compuesto por 6 unidades didácticas. Cada unidad está formada por lecciones, y cada lección, por clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección, y el segundo, la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 correspondiente a la lección 2 se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 Título de la clase

Indica el número de clase

Secciones especiales



Recuerda

Activa contenidos de clases, unidades o grados anteriores que son necesarios para comprender el tema desarrollado.



¿Qué pasaría?

Aborda casos particulares relacionados con el contenido de las secciones **Conclusión** y **Observa cómo se hace**.



Trabajo colaborativo

Asigna tareas de investigación o ampliación de conocimientos con el fin de fomentar el trabajo en equipo.



¡Atención!

Presenta pistas, recomendaciones o información adicional para resolver los ejercicios propuestos o comprender los ejemplos desarrollados.



Datos interesantes

Proporciona datos complementarios de diversos tipos (histórico, cultural, técnico), relacionados con los contenidos desarrollados durante la clase.



Desarrollo sostenible

Propone textos informativos y acciones posibles en relación con el desarrollo sostenible, específicamente en cuanto al clima, la producción y el consumo responsables, el trabajo decente, el crecimiento económico, la igualdad de género, la salud y el bienestar.

Inicios de unidad

Se indica el número de unidad así como el tema central que se desarrollará durante las siguientes lecciones.

Se presenta una introducción general al tema por estudiar, para contextualizarlo en la historia de la cultura y de la matemática.

Finalmente se incluyen las habilidades por desarrollar durante la unidad.

Unidad 1

Los productos notables

Los productos notables son una herramienta que permite expresar términos algebraicos a través de la multiplicación de expresiones que cumplen ciertas reglas. A ese proceso se le llama **factorización**.

Los términos notables o productos notables pueden ser demostrados de forma geométrica, por ejemplo, al calcular el volumen del cubo que se encuentra a la derecha se demuestra geométricamente que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Los productos notables están relacionados con diferentes épocas históricas, se así que, cerca del año 300 a. C. el geómetra y matemático griego Euclides describió en el libro 2 de su obra *Elementos* el producto notable que ahora se denomina el cuadrado de la suma de dos términos de la siguiente forma: si se corta al usar una línea recta, el cuadrado construido sobre el total de esas líneas es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado por los dos tramos de la línea recta.

Desarrollo sostenible

Estudiar para aprender nos permite desarrollar nuestras talentos y el futuro, contribuir con ellas para que el mundo sea mejor.

En esta unidad aprenderás a:

- Deducir con confianza el cuadrado y el cubo de la adición o sustracción de dos términos.
- Demostrar geométricamente el cuadrado de la suma de dos términos.
- Resolver el cuadrado y el cubo de un binomio utilizando las reglas o fórmulas.
- Demostrar con creatividad el producto de la suma por su diferencia de dos términos y dos binomios con un término en común.
- Resolver ejercicios relacionados con la suma por la diferencia de dos términos y dos binomios con un término en común.
- Resolver diferentes casos de productos notables utilizando las reglas o fórmulas.

Anexos

Se incluyen páginas con diferente tipo de información al final del libro:

- Fórmulas y simbología.
- Material adicional para complementar el trabajo en clases específicas.
- Fichas con actividades de refuerzo para ampliar o profundizar algunos temas.

Trabaja en tu cuaderno

Este ícono aparece en todas las clases de **Repasa tus conocimientos** y **Practica lo aprendido**, además de las secciones **Práctica** de todas las clases. Su propósito es recordarle al estudiante que debe resolver todos los ejercicios en su cuaderno.

Trabaja en
tu cuaderno



Índice

Unidad 1:

Los productos notables7

Lección 1: Los principales productos notables 8

Unidad 2:

Ecuaciones de primer grado23

Lección 1: Ecuaciones24

Lección 2: Gráfica de la función lineal $y = ax \pm b$ 42

Unidad 3:

Unidades de superficie y de volumen51

Lección 1: Unidades de superficie52

Lección 2: Unidades de medida de volumen63

Unidad 4:

Geometría75

Lección 1: El círculo y la circunferencia76

Lección 2: Ángulos en el círculo81

Lección 3: Poliedros regulares.....92

Unidad 5:

Estadística107

Lección 1: Medidas de tendencia central para datos no agrupados108

Lección 2: Medidas de tendencia central para datos agrupados115

Unidad 6:

Probabilidad129

Lección 1: Tipos de variables130

Lección 2: La probabilidad137

Anexos147

Unidad 1

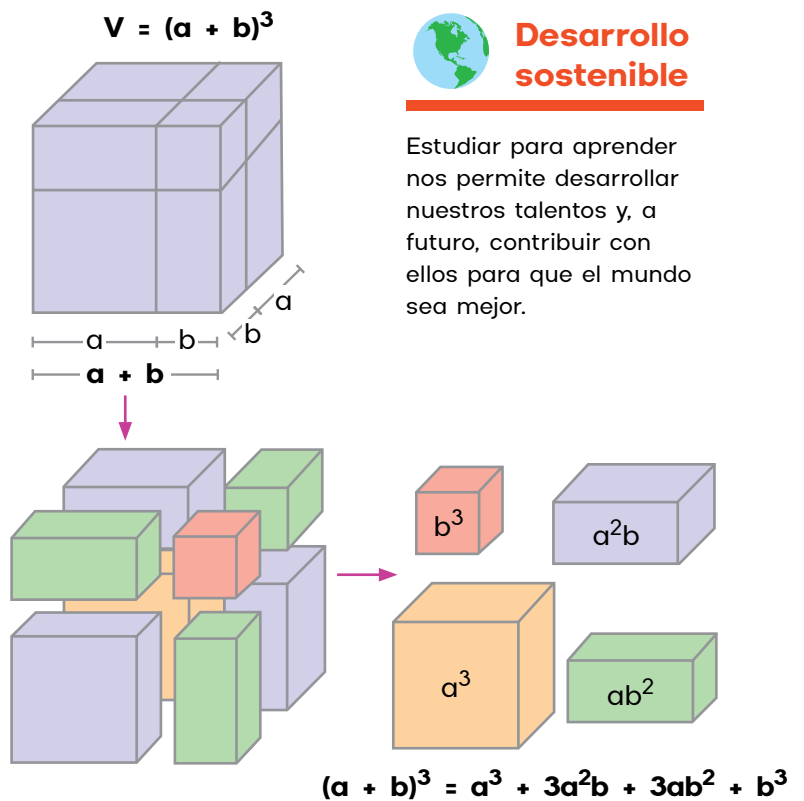
Los productos notables

Los productos notables son una herramienta que permite expresar términos algebraicos a través de la multiplicación de expresiones que cumplen ciertas reglas. A ese proceso se le llama **factorización**.

Las fórmulas notables o productos notables pueden ser demostrados de forma geométrica, por ejemplo, al calcular el volumen del cubo que se encuentra a la derecha se demuestra geoméricamente que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Los productos notables están relacionados con diferentes épocas históricas, es así que, cerca del año 300 a. C. el geómetra y matemático griego Euclides describió en el libro 2 de su obra *Elementos* el producto notable que ahora se denomina el cuadrado de la suma de dos términos de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el total de esa línea es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado por los dos tramos de la línea recta.



Factorización del cubo de la adición de dos términos algebraicos.

En esta unidad aprenderás a...

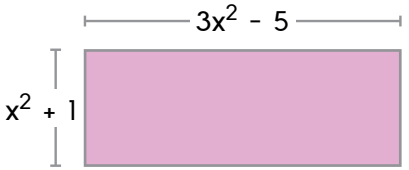
- Deducir con confianza el cuadrado y el cubo de la adición o sustracción de dos términos.
- Demostrar geoméricamente el cuadrado de la suma de dos términos.
- Resolver el cuadrado y el cubo de un binomio utilizando las reglas o fórmulas.
- Demostrar con creatividad el producto de la suma por su diferencia de dos términos y dos binomios con un término en común.
- Resolver ejercicios relacionados con la suma por la diferencia de dos términos y dos binomios con un término en común.
- Resolver diferentes casos de productos notables utilizando las reglas o fórmulas.

Los principales productos notables

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno

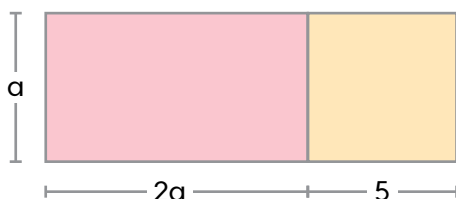


- Escribe el factor numérico y el factor literal de cada término algebraico.
 - $2xy^2$
 - $8m^4n^5$
 - $-3mn^2$
 - $-a^2b^3$
 - 19
 - h^2k^4
- Clasifica las expresiones en monomios, binomios o trinomios según corresponda.
 - $4 + 3x^2$
 - $6m^5 + 2n^3$
 - $-3 + m - n^2$
 - 2
 - 10
 - $h^2 + 4k + 24y$
- Escribe dos monomios semejantes al indicado.
 - hy^2
 - $3n^5$
 - $-3n^2$
 - $-2b^3$
 - 6
 - $19k^4$
- Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de monomios.
 - $4x^4 + 3x^4 - x^4$
 - $2h^2 + 5k + 7k + -2h^2$
 - $-2 + 3m - 6m$
 - $y + x - 5y + x$
 - $10x + 3y - 5x - 2x$
 - $a^2 + 4b + 2b - a^2 + 1$
 - $7h^2k^3 + -3hk^3 - 5h^2k^3 + 4hk^3 + 1$
 - $-3y^2z^3 + 4y^3z^2 - k + 6k + 5y^2z^3$
- Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios.
 - $4 \cdot 3x^2$
 - $2h^5 \cdot 6$
 - $-2m \cdot 3m$
 - $-4y \cdot (-5y^2)$
 - $-6m^5 \cdot (-2n^3)$
 - $-3mn \cdot 5m^4$
 - $10a^5b^3 \cdot (-4a^3b^2)$
 - $3m^2n \cdot (-15mn^2)$
 - $-8ab^3c \cdot (-a^2b^5c^4)$
 - $3ab^2 \cdot 2a^3b \cdot 4ab$
- Soluciona las siguientes adiciones y sustracciones de polinomios.
 - $(4a^3 + b^2) + (6a^3 - 5b^2)$
 - $(8m^5n^2 + 6) - (12m^5n^2 - 3)$
 - $(5m^4 + 3) + (m^4 - 4)$
 - $(5a^3 + b^2) - (3a^3 - 3b^2 - 1)$
 - $(8h^4k + 3y^5) + (-5kh^4 - 2 - 4y^5)$
 - $(10h^4 + k^6) - (15h^4 - h^4 + 5k^6)$
 - $(-3a^2b + 7c^2 - 1) + (10a^2b - 6c^2 + 2)$
 - $(9x^2 + 5x^4 - 1) - (x^2 + 6x^4 + 8)$
 - $(6x^7y + 3x^7 - y) + (2y + 5x^7y - 2x^7 + 4y)$
 - $(0,2t^3 + 1,7t^2 + 3) - (-2,5t^3 - 4,3t^2 + 8)$
- Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios.
 - $-5a^4 \cdot (-2a^3 + 7a^2)$
 - $(4a^2b + 3) \cdot (a^2b + 1)$
 - $-3 \cdot \left(8m^5 - \frac{1}{3}\right)$
 - $(7xy + y) \cdot (3x + 7y - 1)$
 - $-hk^4 \cdot (5h^4 - 3k + 2hk^5)$
 - $\left(\frac{2}{5}m + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}m^5n^2 - \frac{5}{3}\right)$
- Determina la expresión algebraica que representa el área y el perímetro del rectángulo que se encuentra a la derecha.
 

1.2 Factorización

Problema

Expresa el área total de la figura de dos formas distintas.



1. Expresa el área total utilizando la medida de la base y la altura.
2. Calcula el área de cada rectángulo y las sumas.
3. ¿Cuáles expresiones representan el área total de la figura?

Solución

1. Las medidas de la base y la altura son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Altura} &\longrightarrow a \\ \text{Base} &\longrightarrow 2a + 5 \\ \text{Área total} &\longrightarrow a(2a + 5) \end{aligned}$$

2. El área total de la figura se obtiene sumando las áreas del rectángulo rosado y el amarillo.

$$\begin{aligned} \text{Área del rectángulo rosado} &\longrightarrow a \cdot 2a = 2a^2 \\ \text{Área del rectángulo amarillo} &\longrightarrow a \cdot 5 = 5a \\ \text{Área total} &\longrightarrow 2a^2 + 5a \end{aligned}$$

3. El área total de la figura se representa con las expresiones:

$$a(2a + 5) = 2a^2 + 5a$$

Conclusión

Factorizar un polinomio es expresarlo como la multiplicación de dos o más polinomios más simples. Por ejemplo: $2a^2 + 5a$ se factoriza como el producto de a y $2a + 5$. Es decir,

$$2a^2 + 5a = a(2a + 5)$$

La factorización es una técnica que consiste en la descomposición de una expresión algebraica en forma de producto; es por eso que al resolver la multiplicación, resultado del ejemplo anterior, se obtiene la expresión original.

$$a(2a + 5) = a \cdot 2a + a \cdot 5 = 2a^2 + 5a$$



¡Atención!

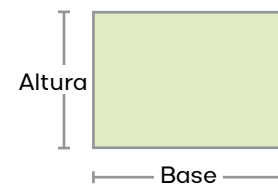
La altura en ambas figuras es la misma.



Recuerda

Al calcular el área de un rectángulo se emplea la fórmula:

$$\text{Área} = \text{Altura} \times \text{Base}$$



Recuerda

Los **factores** son cantidades o expresiones que se multiplican.

Una **factorización** es la presentación de un polinomio en factores.

Observa cómo se hace



¡Atención!

Por la propiedad conmutativa de la multiplicación $kh = hk$.

Expresa el polinomio correspondiente a cada factorización.

1. $5m^4(2m^3 + n) = 5m^4 \cdot 2m^3 + 5m^4 \cdot n = 10m^7 + 5m^4n$
2. $(h + k)(h - k) = h \cdot h - h \cdot k + k \cdot h - k \cdot k$
 $= h^2 - hk + hk - k^2$
 $= h^2 - k^2$

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Asocia cada factorización de la columna izquierda con su respectiva expresión de la columna derecha. Indica la letra de la operación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A \rightarrow 2.

A. $-2a(-5a + b)$

B. $2a(-4 + b^2)$

C. $3b(10b - 2b^2)$

D. $(5 + b^2)(5 + b^2)$

E. $(6a - 2)(6a - 2)$

F. $(2a + 4)(2a - 4)$

G. $5(a - 1)(1 + a)$

H. $a(b + 3)(b + 3)$

1. $-8a + 2ab^2$

2. $10a^2 - 2ab$

3. $36a^2 - 24a + 4$

4. $4a^2 - 16$

5. $25 + 10b^2 + b^4$

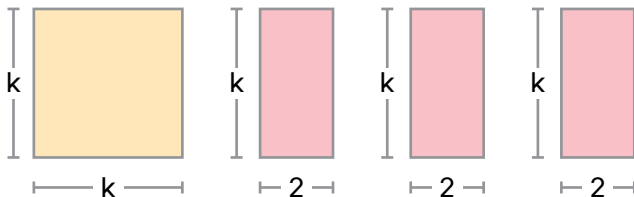
6. $5a^2 - 5$

7. $ab^2 + 6ab + 9a$

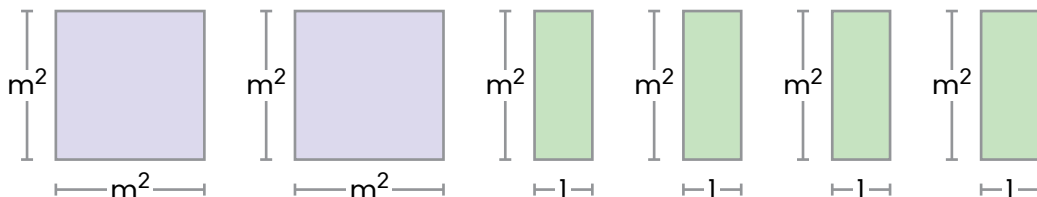
8. $30b^2 - 6b^3$

2. Forma un rectángulo en el cuaderno con las piezas dadas y escribe el área total de dos formas distintas.

a.



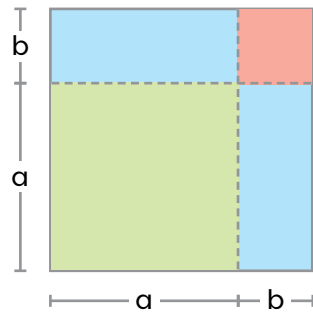
b.



1.3 Cuadrado de la adición o sustracción de dos términos

Problema

Expresa el área total de la figura de dos formas distintas.



1. Expresa el área total utilizando la medida de la base y la altura.
2. Calcula el área de cada cuadrado y de cada rectángulo y las sumas.
3. ¿Cuáles expresiones representan el área total de la figura?

Solución

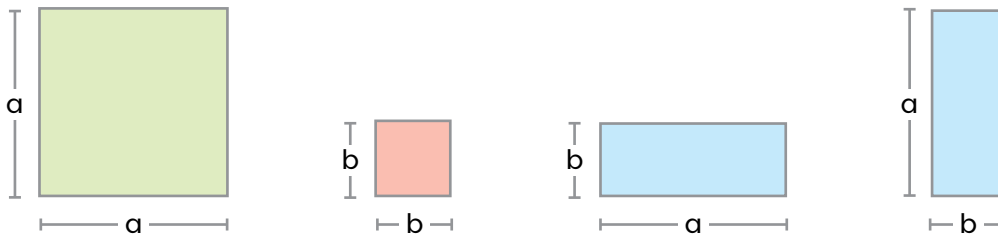
1. Las medidas de la base y la altura son las siguientes:

Altura $\rightarrow a + b$

Base $\rightarrow a + b$

Área total $\rightarrow (a + b)(a + b) = (a + b)^2$

2. El área total de la figura se obtiene sumando las áreas de los rectángulos celestes y los cuadrados verde y rojo.



Área del cuadrado verde $\rightarrow a \cdot a = a^2$

Área del cuadrado rojo $\rightarrow b \cdot b = b^2$

Área de los rectángulos celestes $\rightarrow 2 \cdot a \cdot b = 2ab$

Área total $\rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

3. El área total de la figura se representa con las expresiones:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



¿Sabías qué...?

Las leyes de potencia también se emplean en expresiones algebraicas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &(a + b)(a + b) \\ &= (a + b)^{1 + 1} \\ &= (a + b)^2 \end{aligned}$$



¡Atención!

Los rectángulos celestes son congruentes por lo tanto, se calcula un área y se multiplica por 2.



Recuerda

Algunas leyes de potencias son:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $(an)^m = a^n \cdot m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Conclusión

Al calcular la expresión que representa una factorización compuesta por el cuadrado de la suma (o la resta) de un binomio se usan estas fórmulas:

Primer producto notable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por ejemplo:

$$(2m^4 + 3)^2 = (2m^4)^2 + 2 \cdot 2m^4 \cdot 3 + (3)^2 = 4m^8 + 12m^4 + 9$$

Segundo producto notable

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Por ejemplo:

$$(x^2y^3 - 2x)^2 = (x^2y^3)^2 - 2 \cdot x^2y^3 \cdot 2x + (2x)^2 = x^4y^6 - 4x^3y^3 + 4x^2$$



Datos interesantes

El primer producto notable está formado por monomios de igual signo. Por lo tanto, $(-x - 1)^2$ se resuelve siguiendo los pasos del primer producto notable, es decir:

$$(-x - 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

Observa cómo se hace

Al resolver $\left(\frac{2}{3}p^5 - 3p\right)^2$ se realizan estos pasos:

- Se identifican los términos: primer término, $\frac{2}{3}p^5$; segundo, $3p$.
- Se sigue la fórmula $(a - b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$: se eleva al cuadrado el primer término menos el doble del primer término por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

$$\left(\frac{2}{3}p^5 - 3p\right)^2 = \left(\frac{2}{3}p^5\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}p^5 \cdot 3p + (3p)^2 =$$

- Se resuelve la operación combinada siguiendo las leyes de potencia:
- $$\frac{2^2}{3^2}p^{5 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3}p^{5+1} + 3^2p^2 = \frac{4}{9}p^{10} - 4p^6 + 9p^2$$

$$\text{Por lo tanto: } \left(\frac{2}{3}p^5 - 3p\right)^2 = \frac{4}{9}p^{10} - 4p^6 + 9p^2.$$

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe los términos que faltan. Usa el primer producto notable.

a. $(h + y)^2 = \square + 2 \cdot h \cdot y + (y)^2 = h^2 + 2hy + y^2$

b. $(4k + m^5)^2 = (4k)^2 + \square + (m^5)^2 = 16k^2 + 8km^5 + m^{10}$

c. $(-6x^2a - 2)^2 = \square + 2 \cdot 6x^2a \cdot 2 + \square = \square + \square + \square$

d. $(7a^3 + 5a^2)^2 = \square + \square + \square = \square + \square + \square$

2. Anota los términos que faltan. Usa el segundo producto notable.

a. $(m - n)^2 = \square - 2 \cdot m \cdot n + (n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$

b. $(9h - p^3)^2 = (9h)^2 - \square + (p^3)^2 = 81h^2 - 18hp^3 + p^6$

c. $(-3x^5y + 1)^2 = \square - 2 \cdot 3x^5y \cdot 1 + \square = \square - \square + \square$

d. $(-8b + 2a^3)^2 = \square - \square + \square = \square - \square + \square$

3. Resuelve los productos notables indicados. Usa las fórmulas correspondientes.

a. $(a^2 + 1)^2 =$

f. $(2j - 4)^2 =$

b. $(5k^2 + 2)^2 =$

g. $(a^6 - a^4)^2 =$

c. $(0,5 + 3m)^2 =$

h. $(1,3k^4 - h)^2 =$

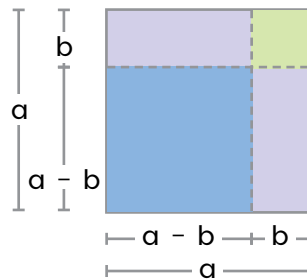
d. $(-2g^3 - g)^2 =$

i. $(p^3 - q)^2 =$

e. $\left(-5q - \frac{1}{2}\right)^2 =$

j. $\left(\frac{4}{5}w^2 - \frac{5}{2}w\right)^2 =$

4. Demuestra, siguiendo los pasos indicados abajo, la representación geométrica el segundo producto notable.

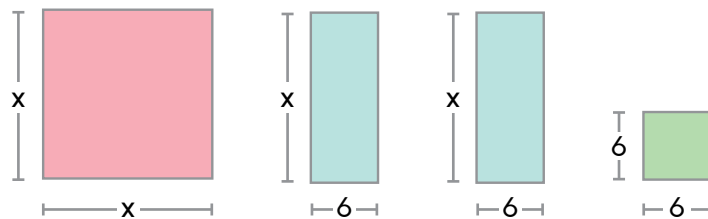


a. Expresa el área del cuadrado azul utilizando la medida de la base y la altura.

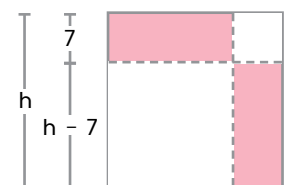
b. Al área del cuadrado de lado a le restas el área del cuadrado verde y el de los rectángulos.

c. ¿Cuáles expresiones representan el área del cuadrado azul?

5. Kattia construirá un cuadrado con las siguientes piezas. ¿Cuál expresión algebraica representa el área del cuadrado que construirá? (**Pista:** arma un cuadrado similar al **Problema** de la página 11).



6. Para un mural Kendall construyó un cuadrado con cartulina. Al terminar observó que debía quitarle 7 cm a cada lado. ¿Cuál expresión representa el área del cuadrado después de la modificación? ¿Cuál expresión representa la cantidad de cartulina que sobró después del corte?



¡Atención!

En el segundo producto notable el término positivo debe ir primero:

$$(-2 + a)^2 = (a - 2)^2.$$

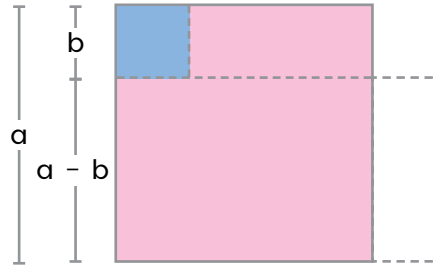
Problema



Desarrollo sostenible

El respeto y la tolerancia son esenciales para lograr buenas relaciones interpersonales.

Angélica recortó del cuadrado rosado, el cuadrado azul. Expresa el área de la figura que quedó de dos formas distintas.



1. Transforma la figura rosada en un rectángulo y expresa su área utilizando la medida de la base y la altura.
2. Resta del área del cuadrado rosado, el área del cuadrado azul.
3. ¿Cuáles expresiones representan el área que quedó de la figura?

Solución



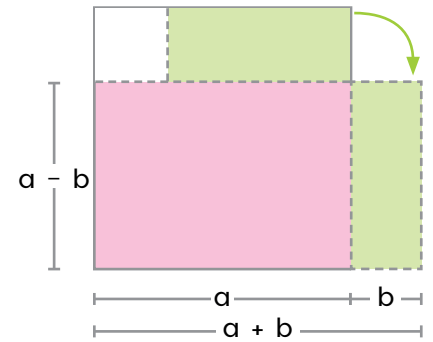
Recuerda

En algunos casos el signo de la multiplicación "x" que se lee "por" se omite, por ejemplo:

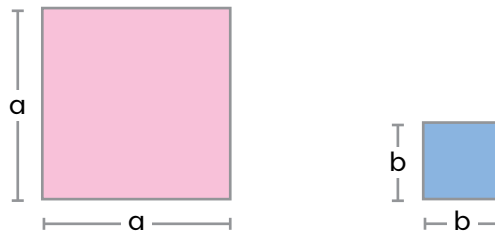
- $-3ab = -3 \cdot a \cdot b$
- $(a + b)(a + b) = (a + b) \cdot (a + b)$

1. Para transformar la figura en un rectángulo se pasa el rectángulo verde según se indica al lado:

Altura $\rightarrow a - b$
 Base $\rightarrow a + b$
 Área total $\rightarrow (a - b)(a + b)$



2. Se calculan las áreas y se restan.



Área del cuadrado rosado $\rightarrow a \cdot a = a^2$
 Área del cuadrado azul $\rightarrow b \cdot b = b^2$
 Área que quedó de la figura $\rightarrow a^2 - b^2$

3. El área que quedó de la figura se representa con las expresiones:
 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Conclusión

Tercer producto notable

El producto de la suma por la diferencia de dos binomios se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Por ejemplo:

$$(x^3 + 5y)(x^3 - 5y) = (x^3)^2 - (5y)^2 = x^6 - 25y^2$$



¿Qué pasaría?

Por la propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene que
 $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$
 $= a^2 - b^2$

Observa cómo se hace

Al resolver $\left(\frac{2}{5}p^4 + \frac{3}{4}q^2\right)\left(\frac{2}{5}p^4 - \frac{3}{4}q^2\right)$ se realizan estos pasos:

- Se identifica el término positivo en ambos binomios: $\frac{2}{5}p^4$.
- Se eleva al cuadrado el término obtenido en el paso anterior y se resta el cuadrado del otro término:

$$\left(\frac{2}{5}p^4\right)^2 - \left(\frac{3}{4}q^2\right)^2 =$$

- Se resuelve la operación siguiendo las leyes de potencia:

$$\left(\frac{2}{5}p^4\right)^2 - \left(\frac{3}{4}q^2\right)^2 = \frac{4}{25}p^8 - \frac{9}{16}q^4$$

Por lo tanto: $\left(\frac{2}{5}p^4 + \frac{3}{4}q^2\right)\left(\frac{2}{5}p^4 - \frac{3}{4}q^2\right) = \frac{4}{25}p^8 - \frac{9}{16}q^4$.



¡Atención!

En el tercer producto notable, el término positivo en ambos binomios se anota primero.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Escribe los términos que faltan. Usa el tercer producto notable.

a. $(h - k)(h + k) = \square - (k)^2 = h^2 - k^2$

b. $(5r + 2s^3)(5r - 2s^3) = (5r)^2 - \square = 25r^2 - \square$

c. $(-2x^2y + 4)(4 + 2x^2y) = \square - \square = \square - \square$

d. $(5m^3n^2 + 8m^5)(-8m^5 + 5m^3n^2) = \square - \square = \square - \square$

2. Resuelve los productos notables indicados. Usa las fórmulas correspondientes.

a. $(a^3 + m^3)(a^3 - m^3) =$

b. $(3g^4 - z)(3g^4 + z) =$

c. $(2k^2 + 3k^4)(2k^2 - 3k^4) =$

d. $\left(-8q + \frac{1}{2}\right)\left(8q + \frac{1}{2}\right) =$

e. $(1,8 - 0,4a)(1,8 + 0,4a) =$

f. $\left(\frac{1}{3}w^3 - \frac{3}{7}w^2z^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}w^3 + \frac{3}{7}w^2z^2\right) =$

3. Si los lados de un rectángulo miden $m + 5$ y $m - 5$ y su área, 75 cm^2 ; ¿cuál es el valor de m ?

1.5 Producto de dos binomios con un término común

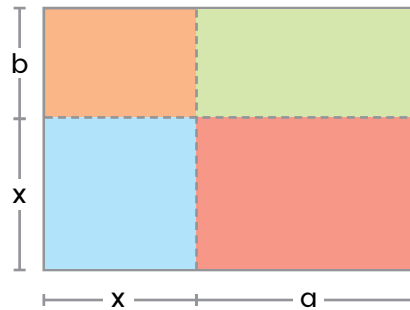
Problema



Trabajo colaborativo

- En pares realicen un resumen que incluya 3 ejemplos de los métodos de factorización estudiados.

Representa el área de la figura de dos formas distintas.



- Expresa el área total utilizando la medida de la base y la altura.
- Calcula el área de cada rectángulo y las sumas.
- ¿Cuáles expresiones representan el área total de la figura?

Solución

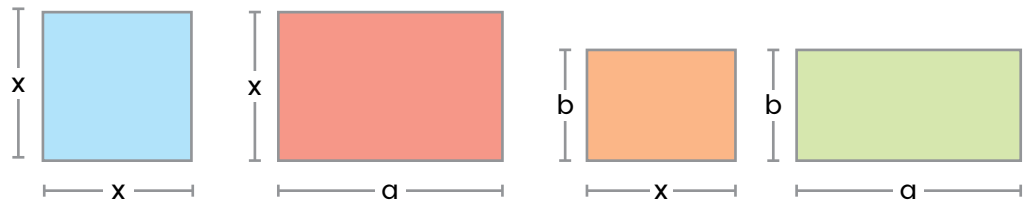
- Las medidas de la base y la altura son las siguientes:

Altura $\rightarrow x + b$

Base $\rightarrow x + a$

Área total $\rightarrow (x + a)(x + b)$

- El área total de la figura se obtiene sumando las áreas de todas las figuras.



¿Qué pasaría?

Si dos términos tienen variables en común se pueden expresar mediante la multiplicación del factor que tienen en común con, entre paréntesis, lo que no tienen en común. Por ejemplo:

$$ax + bx = (a + b)x$$

Área del cuadrado azul $\rightarrow x \cdot x = x^2$

Área del rectángulo rojo $\rightarrow a \cdot x = ax$

Área del rectángulo anaranjado $\rightarrow x \cdot b = bx$

Área del rectángulo verde $\rightarrow a \cdot b = ab$

Área total $\rightarrow x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

- El área total de la figura se representa con las expresiones:
 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Conclusión

Cuarto producto notable

El producto de dos binomios que tienen un término en común se obtiene con la siguiente fórmula:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Por ejemplo:

$$(x + 4)(x + 5) = (x)^2 + (4 + 5)x + 4 \cdot 5 = x^2 + 9x + 20$$

Observa cómo se hace

Al resolver $\left(\frac{1}{2}k + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}k - 2\right)$ se realizan estos pasos:

- Se identifica el término que se repite en ambos binomios: $\frac{1}{2}k$.
- Se eleva al cuadrado el término obtenido en el paso anterior y se completa la fórmula:

$$\left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + -2\right) \cdot \frac{1}{2}k + \frac{2}{3} \cdot -2$$

- Se resuelve la operación siguiendo las leyes de potencia:

$$\frac{1}{4}k^2 + \frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{2}k + \frac{-4}{3} = \frac{1}{4}k^2 + \frac{-2}{3}k + \frac{-4}{3}$$

Por lo tanto: $\left(\frac{1}{2}k + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}k - 2\right) = \frac{1}{4}k^2 + \frac{-2}{3}k + \frac{-4}{3}$.



¡Atención!

a y b son constantes que mantienen sus signos para realizar las operaciones de la fórmula.



Recuerda

Al sumar o restar fracciones se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + -2 &= \frac{2}{3} - \frac{2}{1} \\ &= \frac{2-6}{3} \\ &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Y al multiplicar fracciones se efectúa lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot -2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{1} \\ &= \frac{2 \cdot -2}{3 \cdot 1} \\ &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Escribe los términos que faltan. Usa el cuarto producto notable.

a. $(x + 3)(x + 7) = \square + (3 + 7)x + 3 \cdot 7 = \square + \square + 21$

b. $(a + 2)(a - 5) = (a)^2 + \square + 2 \cdot -5 = \square + \square + \square$

c. $(4x^2y + y)(4x^2y + 2y) = \square + (y + 2y) \cdot 4x^2y + \square = \square + \square + \square$

d. $(5m^3 - 7m)(5m^3 + 2m) = \square + \square + \square = \square + \square + \square$

2. Resuelve los productos notables indicados. Usa la fórmula correspondiente.

a. $(x^3 + 2)(x^3 + 5) =$

b. $(3,5x + 0,2)(3,5x + 4) =$

c. $(4k^2 + 3)(4k^2 - 6) =$

d. $\left(\frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}w^2 + \frac{5}{6}\right) =$

3. Determina el área de los polígonos indicados.

a. Un rectángulo de lados $x + 8$ y $x - 2$.

b. Un triángulo de base $a + 7$ y altura $a - 2$.



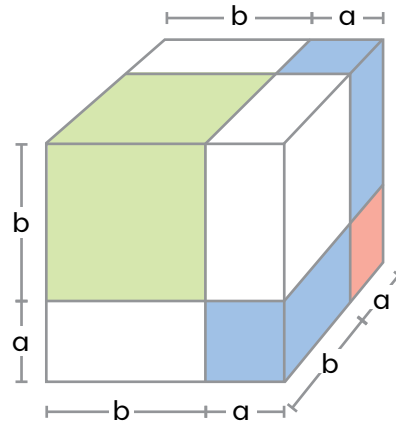
Recuerda

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}, \text{ con } b: \text{ base y } h: \text{ altura.}$$

1.6 Cubo de la adición o sustracción de dos términos

Problema

Representa el volumen del cubo de dos formas distintas.



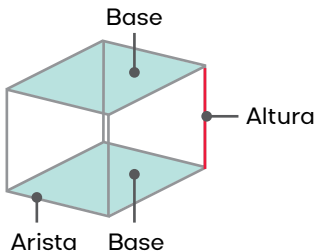
1. Expresa el volumen utilizando el área de la base y la altura.
2. Calcula el volumen de cada cuerpo que compone el cubo y los sumas.
3. ¿Cuáles expresiones representan el volumen del cubo?

Solución



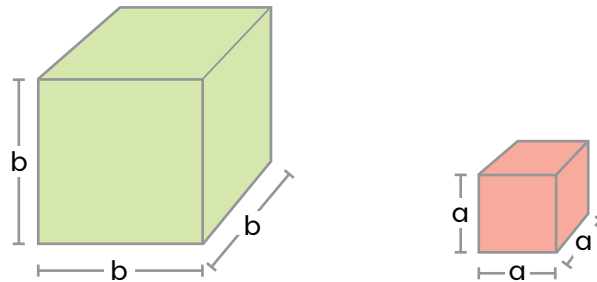
Recuerda

El nombre de algunos elementos del poliedro:



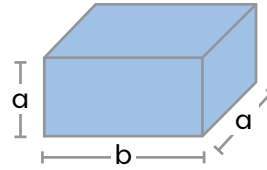
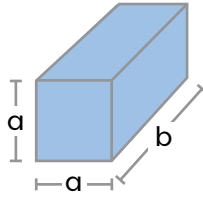
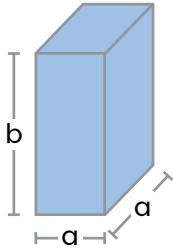
1. La base es un cuadrado de lado $a + b$, por lo tanto:
Área de la base $\rightarrow (a + b)(a + b) = (a + b)^2$
La altura del cubo es $a + b$, es decir:
R: Volumen del cubo $\rightarrow (a + b)^2(a + b) = (a + b)^3$

2. El volumen del cubo se obtiene sumando los volúmenes de los cuerpos que lo componen:
 - a. Tiene 2 cubos diferentes, uno rojo y uno verde:



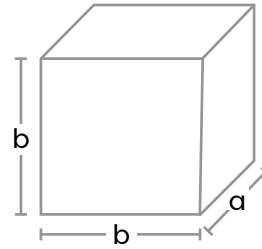
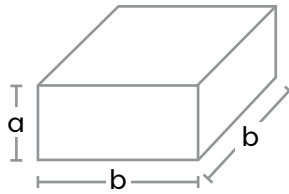
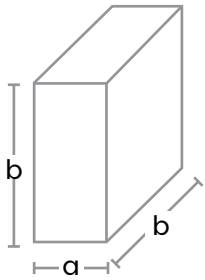
Volumen del cubo verde $\rightarrow b \cdot b \cdot b = b^3$
 Volumen del cubo rojo $\rightarrow a \cdot a \cdot a = a^3$

- b. Posee tres prismas de igual medida color azul:



Volumen de los 3 prismas azules $\rightarrow 3(a \cdot a \cdot b) = 3a^2b$

- c. Posee tres prismas de igual medida color blanco:



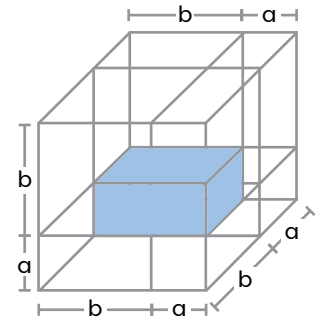
Volumen de los 3 prismas blancos $\rightarrow 3(a \cdot b \cdot b) = 3ab^2$

R: Volumen del cubo $\rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



¡Atención!

El prisma azul representado en el literal **b**, a la derecha, se ubica en la parte posterior izquierda del cubo según se indica a continuación.



3. El volumen del cubo se representa con las expresiones:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Conclusión

Al calcular el cubo de la suma (o la resta) de un binomio se cumple:

Quinto producto notable

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (x + 5)^3 &= (x)^3 + 3 \cdot (x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot (5)^2 + (5)^3 \\ &= x^3 + 15x^2 + 75x + 125 \end{aligned}$$

Sexto producto notable

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (2 - k)^3 &= (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 \cdot k + 3 \cdot 2 \cdot (k)^2 - (k)^3 \\ &= 8 - 12k + 6k^2 - k^3 \end{aligned}$$

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe los términos que faltan en cada producto notable.

a. $(a + b)^3 = \square + 3 \cdot \square \cdot \square + 3 \cdot \square \cdot \square + \square$

b. $(a - b)^3 = \square - 3 \cdot \square \cdot \square + 3 \cdot \square \cdot \square - \square$

2. Anota los términos que faltan.

a. $(x + 2)^3 = \square + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + (2)^3 = \square + 6x^2 + \square + 8$

b. $(h + 3h^4)^3 = (h)^3 + 3 \cdot h^2 \cdot 3h^4 + \square + (3h^4)^3 = h^3 + 9h^6 + \square + \square$

c. $(x^5 + 1)^3 = \square + \square + \square + \square = \square + \square + \square + \square$

d. $(y - 3)^3 = \square - 3 \cdot y^2 \cdot 3 + 3 \cdot y \cdot 3^2 - (3)^3 = \square - 9y^2 + \square - 27$

e. $(m^2 - 2n^5)^3 = (m^2)^3 - 3 \cdot (m^2)^2 \cdot 2n^5 + \square - (2n^5)^3 = m^6 - 6m^4n^5 + \square - \square$

f. $(a^4 - 1)^3 = \square - \square + \square - \square = \square - \square + \square - \square$

3. Resuelve los productos notables indicados. Usa las fórmulas correspondientes.

a. $(g^2 + 7)^3 =$

b. $(5 - p)^3 =$

c. $(k^3 + k^2)^3 =$

d. $(x^6 - y^4)^3 =$

e. $(2,7 + x)^3 =$

f. $(2,1h - k^3)^3 =$

g. $(2m^2 + m)^3 =$

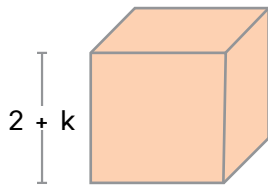
h. $(m - n^5)^3 =$

i. $\left(q + \frac{1}{3}\right)^3 =$

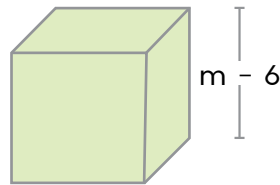
j. $\left(\frac{2}{3}w^3 - \frac{3}{2}\right)^3 =$

4. Calcula el volumen de cada cubo. Usa las fórmulas correspondientes.

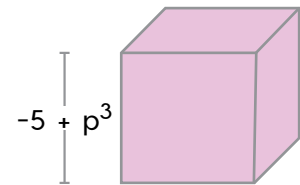
a.



b.



c.

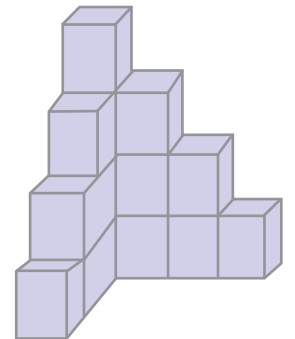
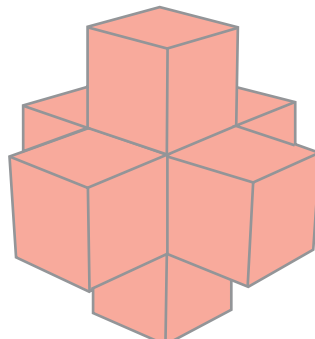
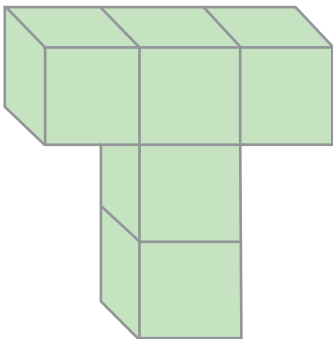


5. Determina el volumen total de cada figura formada por cubos.

a. Medida de la arista:
(x + 5).

b. Medida de la arista:
(a² - 8).

c. Medida de la arista:
(m³ - m).



6. ¿Cuál es la diferencia entre los volúmenes de un cubo de arista $7m - 1$ y otro de arista $m + 1$?

1.7 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada factorización de la columna izquierda con su respectiva expresión de la columna derecha. Indica la letra de la operación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A → 3.

A. $(3a + 2b)(3a + 2b)$

B. $(x^2 - y)(x^2 - y)$

C. $(m^2n^3 + 1)(m^2n^3 - 1)$

D. $(4k^3 + ky^5)^2$

E. $(8p^7 - q^4)^2$

F. $(3j^5 + 1)^3$

G. $(7a - b)^3$

H. $(x + 3)(x - 8)$

1. $x^4 - 2x^2y + y^2$

2. $64p^{14} - 16p^7q^4 + q^8$

3. $9a^2 + 12ab + 4b^2$

4. $27j^{15} + 27j^{10} + 9j^5 + 1$

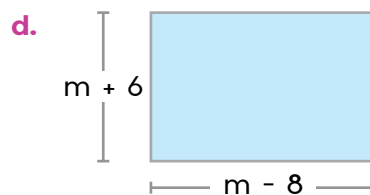
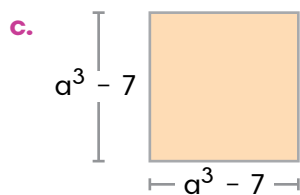
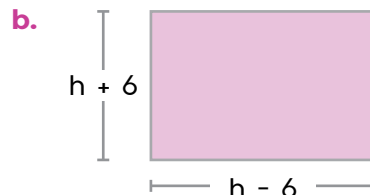
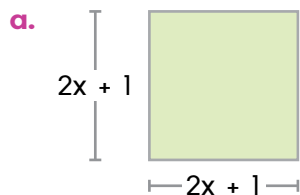
5. $m^4n^6 - 1$

6. $x^2 - 5x - 24$

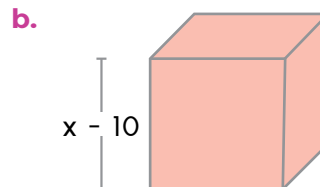
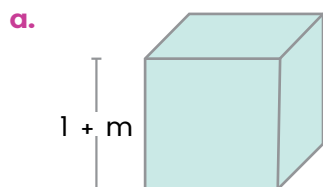
7. $343a^3 - 147a^2b + 21ab^2 - b^3$

8. $16k^6 + 8k^4y^5 + k^2y^{10}$

2. Determina el área de las figuras indicadas. Usa los productos notables.



3. Calcula el volumen de los siguientes cubos. Usa los productos notables.



4. Una fábrica produce 2 tamaños de láminas cuadradas de madera. Si el lado de una lámina es $8x - 3$ y de la otra $6x + 1$, ¿cuál expresión algebraica representa el área de cada lámina? Si el valor de x es 10 cm, ¿cuál lámina posee la mayor área?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Deduzco con confianza el cuadrado de la adición de dos términos.			
2. Deduzco con confianza el cuadrado de la sustracción de dos términos.			
3. Deduzco con confianza el cubo de la adición de dos términos.			
4. Demuestro geoméricamente el cuadrado de la suma de dos términos.			
5. Resuelvo el cuadrado de un binomio utilizando las reglas o fórmulas.			
6. Resuelvo el cubo de un binomio utilizando las reglas o fórmulas.			
7. Demuestro con creatividad el producto de la suma por su diferencia de dos términos.			
8. Demuestro con creatividad el producto de dos términos con un término en común.			
9. Resuelvo ejercicios relacionados con la suma por la diferencia de dos términos.			
10. Resuelvo ejercicios relacionados con el producto de dos binomios con un término en común.			
11. Resuelvo diferentes casos de productos notables utilizando las reglas o fórmulas.			

Ecuaciones de primer grado

Desde la Antigüedad, las ecuaciones han sido útiles para resolver problemas del entorno; por ejemplo, los egipcios utilizaban un método llamado "falsa posición" y consistía en sustituir la variable de una ecuación por un valor falso para obtener un resultado, luego empleaban la regla de tres para obtener el valor verdadero de la variable.

Por ejemplo, al resolver una ecuación como $3x + 5x = 16$ realizaban los siguientes pasos:

1. Sustituían x por 4 y resolvían la operación combinada que se formaba.
 $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$
2. Luego, empleaban la regla de 3 para calcular el valor verdadero.

Valores de x :	4	x
Resultados:	32	16

Luego, aplicando la propiedad fundamental de las proporciones se despeja el dato desconocido y se tiene que:

$$x = \frac{4 \cdot 16}{32} = 2$$

La solución general de una ecuación de primer grado fue planteada ya en la Antigüedad, por



Las ecuaciones se utilizan en muchas áreas, por ejemplo, en la medicina se emplean para modelar la propagación de enfermedades, conocer la dosis de un medicamento para un paciente según su edad, masa y estatura.

ejemplo en India. En la actualidad, este tipo de ecuaciones se aplica en numerosas áreas científicas como el cálculo de velocidades y distancias, la ingeniería automotriz, porcentajes y descuentos, cálculo de herencias, cálculo de honorarios o salarios, ingeniería de sistemas y medicina, entre otros.

En esta unidad aprenderás a...

- Clasificar con disposición las ecuaciones de acuerdo con sus características.
- Explicar con interés los elementos de una ecuación: variable, grado de la ecuación, raíz y conjunto solución.
- Traducir con facilidad expresiones verbales a lenguaje algebraico y viceversa.
- Solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita utilizando las propiedades de la igualdad.
- Calcular pares ordenados en ecuaciones lineales reemplazando cantidades numéricas.
- Trazar con exactitud la gráfica de una ecuación lineal.

Ecuaciones

1.1 Lenguaje algebraico

Problema



Trabajo colaborativo

En parejas, construyan un listado de expresiones coloquiales y su representación algebraica correspondiente.

Los miembros de una familia compararon sus edades y dedujeron que Eduardo tiene el doble de la edad que Sofía y Daniela la mitad de la edad de Sofía.

Responde las siguientes preguntas:

1. Si x representa la edad de Sofía, ¿cuál expresión algebraica representa las edades de Eduardo y Daniela?
2. Carolina es 9 años mayor que Eduardo. ¿Cuál expresión algebraica representa su edad?
3. ¿Cuál expresión representa la edad de Sofía hace 5 años?

Solución

1. Como x representa la edad de Sofía, entonces, las edades de Eduardo y Daniela se representan de la siguiente forma:

- Eduardo: se multiplica por 2 la edad de Sofía: $2 \cdot x = 2x$
- Daniela: se divide entre 2 la edad de Sofía: $x \div 2 = \frac{x}{2}$

2. La edad de Eduardo se representa con la expresión $2x$, para obtener la edad de Carolina se suma 9 a esa expresión. Así:

$$2x + 9$$

3. Para representar la edad de Sofía hace 5 años se debe restar. Así:

$$x - 5$$

Conclusión

Para traducir lenguaje coloquial utilizando variables, números y operaciones relacionadas se emplea el **lenguaje algebraico**. Al hacerlo se identifican en el lenguaje coloquial las operaciones relacionadas. Ejemplos:

- La mitad, la tercera, la cuarta o la quinta parte de un número se obtiene dividiendo el número entre 2, 3, 4 y 5 respectivamente.
- El doble, triple, cuádruple o quíntuple de un número se obtiene multiplicando por 2, 3, 4 y 5 respectivamente.
- Aumentar se relaciona con la operación suma; disminuir, con la operación resta, y repartir equitativamente, con la división.



Recuerda

Expresar en lenguaje coloquial una expresión algebraica es interpretarla según un contexto. Por ello se debe considerar que las letras representan cualquier número.



Datos interesantes

Aunque los musulmanes empezaron a desarrollar el lenguaje algebraico desde la Edad Media, el primer matemático en emplear símbolos y letras para denotar ecuaciones fue el francés François Viète (1540-1603).

Observa cómo se hace

1. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones.
 - a. La tercera parte de un número disminuida en 7.
 $\frac{x}{3} - 7 \rightarrow x$: número desconocido
 - b. Un número par elevado al cuadrado.
 $(2a)^2 \rightarrow a$: número desconocido
 - c. El cuádruple del precio final de 5 naranjas de **n** balboas y 2 manzanas de **m** balboas.
 $5n + 2m \rightarrow$ costo de las 5 naranjas y las 2 manzanas
 $4(5n + 2m) \rightarrow$ cuádruple del precio total
2. Expresa en lenguaje coloquial las siguientes expresiones.
 - a. $8 - 5x \rightarrow$ El quíntuple de un número disminuido de 8.
 - b. $\frac{a+10}{2} \rightarrow$ La mitad de la adición entre un número y 10.



¡Atención!

Un número es par si es múltiplo de 2, por ello se multiplica el valor desconocido por 2 para garantizar que la cantidad siempre sea par.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones.
 - a. El cuádruple de la adición de un número y 15.
 - b. La décima parte de un número disminuida en 4.
 - c. La quinta parte de un número disminuida de 10.
 - d. La mitad del triple de un número aumentado en 1.
 - e. La cuarta parte del cubo de un número aumentado en 2.
 - f. El triple del producto de un número par y su mitad.
 - g. El cuadrado de la resta de un número impar y 19.
2. Traduce a lenguaje coloquial las siguientes expresiones.

a. $2x + 7$	b. $(a + 6)^3$	c. $\frac{x}{2} \div \frac{x}{5}$
d. $\frac{m-1}{5}$	e. $25 - (2x + 1)$	f. $\frac{x}{3} + 4$
3. Expresa cada situación en lenguaje algebraico.
 - a. Javier repartirá un terreno de forma equitativa entre sus 4 hijos. Si **x** representa la medida del terreno, ¿cuál expresión representa la cantidad de terreno de cada hijo?
 - b. Ana compró 3 blusas de **m** balboas y 2 pantalones de **n** balboas. Al llegar a la caja le rebajaron 20 balboas. ¿Cuál expresión representa el monto a pagar?



¡Atención!

Disminuido en indica que el número que continúa en la expresión es el sustraendo.

Disminuido de indica que nos referimos al minuendo.



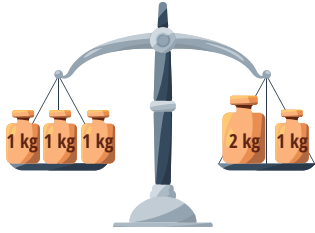
¡Atención!

2x es la representación algebraica de un número par y **2x + 1**, la de un número impar.



Recuerda

Los platillos equilibrados de la balanza indican que la masa en ambos platillos es la misma.



1.2 Igualdad de expresiones algebraicas

Problema

Determina el valor de x en cada balanza.



Solución

1. La balanza está equilibrada, por lo tanto: $x = 3$.
2. Se presenta la igualdad: $x + x + x = 6$. El número que sumado 3 veces da 6 es 2, por lo tanto, $x = 2$.
3. Se presenta la igualdad:

$$x + 3 = 4 + 4 + 2$$

$$x + 3 = 10$$

El número que al sumarse con 3 da 10 es 7 ($7 + 3 = 10$). Así, $x = 7$.

Conclusión



Datos interesantes

El grado de una ecuación se relaciona con el mayor exponente de la incógnita. Por ejemplo:

$x + 6 = 8$ → Ecuación de primer grado.

$9x^2 + 6x = -1$ → Ecuación de segundo grado.

$x^3 - 1 = 0$ → Ecuación de tercer grado.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones (llamadas miembros) que se cumple solo para determinados valores. Sus elementos son:

Término: cada monomio de la ecuación.

$$1 + 2m = 5 - 8m$$

1.^{er} miembro 2.^o miembro

Incógnita: es el valor desconocido de la ecuación.

Miembro: cada lado de la igualdad.

Por ejemplo:

- $7 + x = 10$ → Es una ecuación cuya incógnita es x . Además, se cumple solo si el valor de $x = 3$.
- $2 + 5 = 10 - 3$ → Es una igualdad numérica. No es una ecuación porque no tiene incógnita.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno

1. Clasifica las expresiones en igualdades numéricas o ecuaciones.

a. $7 + 8 = 15$

b. $25 + 5 = 18 + 12$

c. $6a + 2 = 16$

d. $m^2 + 7 = 11$

e. $2x + 7 = 6x - 8$

f. $6(2 + 3) = 3(12 - 2)$

2. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

Ecuación	Incógnita	Primer miembro	Segundo miembro	Términos
$5m - 7 = 6$				
$2a + 3 = 7a + 5$				
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{5} = \frac{-x}{4} - 2$				
$\frac{3h+4}{7} = \frac{4+h}{6}$				



¡Atención!

$$\frac{3h+4}{7} = \frac{3h}{7} + \frac{4}{7}$$

3. Anota la cantidad que completa cada igualdad numérica.

a. $7 + \square = 11$

b. $\square - 10 = 18$

c. $4 + 2 = \square$

d. $12 - \square = 8$

e. $\square + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

f. $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \square$

4. Escribe la cantidad o cantidades que completan cada igualdad numérica.

a. $\square = 5$

b. $\square + \square = \frac{10}{7}$

c. $\square + \square = 3 \cdot 5$

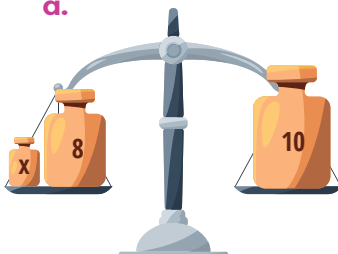
d. $\square - 6 = \square$

e. $\square - \square = \frac{7+5}{2}$

f. $\frac{15}{7} - \frac{1}{7} = \square + \square$

5. Representa con una ecuación, las expresiones de cada balanza.

a.



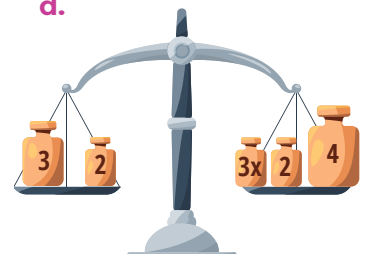
b.



c.

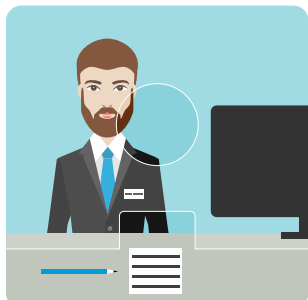


d.



1.3 Solución de una ecuación

Problema



Mariam llegó a la ventanilla del banco para cambiar un cheque de 470 dólares. Después de recibir 300 dólares, el cajero le indica que solo le quedan billetes de 5 dólares.

Responde las siguientes preguntas:

1. Si x representa el total de billetes de 5 dólares, ¿cuál ecuación modela la situación?
2. ¿Cuántos billetes de 5 dólares recibirá Mariam?

Solución

1. x representa el total de billetes de 5 dólares, por lo tanto, $5x + 300$ es el total de dinero que debe recibir Mariam. Además, el cheque era por 470 dólares, por lo tanto: $5x + 300 = 470$ es la ecuación que modela la situación.
2. Para determinar el valor de x se puede sustituir por algunos valores aproximados y al efectuar la operación se verifica si cumple con el valor del segundo miembro (470).

Valor de x	Primer miembro	Resultado
$x = 32$	$5 \cdot 32 + 300$	460
$x = 33$	$5 \cdot 33 + 300$	465
$x = 34$	$5 \cdot 34 + 300$	470
$x = 35$	$5 \cdot 35 + 300$	475

Cuando x es 34, el resultado es igual al segundo miembro, es decir, se cumple la igualdad. Por lo tanto, se recibirán 34 billetes de 5 dólares.

Conclusión

El valor numérico de la incógnita que hace verdadera la igualdad se llama solución o raíz de la ecuación. Por ejemplo:

La solución de la ecuación $2m + 5 = 13$ es 4 porque al sustituir 4 por m se comprueba la igualdad: $2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$.

El conjunto solución de $2m + 5 = 13$ es $S = \{4\}$ (S: conjunto solución).



Desarrollo sostenible

Ahorrar no solo es guardar dinero; también es comprar lo que realmente se necesita. Por ello, antes de realizar cualquier compra, pregúntate: ¿realmente lo necesito?



Recuerda

Si entre un número y una variable no hay una operación evidente, es multiplicación. Por ejemplo:

$$5x = 5 \cdot x$$

$$2m = 2 \cdot m$$

Observa cómo se hace

Observa la forma en que se determina si un valor es la solución de una ecuación.

- ¿7 es solución de $2x - 5 = 12$?
 $2 \cdot 7 - 5 = 12$ → Se sustituye 7 por x.
 $14 - 5 = 12$ → Se resuelve la operación del primer miembro.
 $9 \neq 12$ → Se comparan ambos miembros de la ecuación.
 Como no se satisface la igualdad, 7 no es solución de la ecuación.
- ¿-1 es solución de $5a + 3 = a - 1$?
 $5 \cdot (-1) + 3 = -1 - 1$ → Se sustituye -1 por a.
 $-5 + 3 = -2$ → Se resuelven las operaciones.
 $-2 = -2$ → Se comparan los resultados.
 Como se satisface la igualdad, -1 es solución de la ecuación y su conjunto solución es $S = \{-1\}$.

¿Sabías qué...?

Al calcular el cambio que se debe recibir por una compra y al determinar si el dinero que se tiene es suficiente para adquirir un producto se resuelven ecuaciones de forma mental.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Asocia cada ecuación de la columna izquierda con su respectiva solución de la columna derecha. Indica la letra de la ecuación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A → 1.

A.

$$2x + 3 = 11$$

B.

$$3a - 8 = 7$$

C.

$$8m + 9 = 17$$

D.

$$4p - 8 = 4$$

E.

$$6 - h = 2h$$

F.

$$p + 8 = 4 - 12 - 3p$$

G.

$$6x - 3 = -18 + x$$

H.

$$4b - 8 = 4 - 6b$$

1.

$$S = \{4\}$$

2.

$$S = \{1\}$$

3.

$$S = \{5\}$$

4.

$$S = \{2\}$$

5.

$$S = \{-3\}$$

6.

$$S = \{1,2\}$$

7.

$$S = \{-4\}$$

8.

$$S = \{3\}$$

2. Escribe dos ecuaciones que tengan como solución el conjunto dado.

a. $S = \{0\}$

b. $S = \{-1\}$

c. $S = \{-3\}$

d. $S = \{1\}$

e. $S = \{2\}$

f. $S = \{5\}$

3. ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado de perímetro 16 cm? Anota la ecuación y su solución.

1.4 Ecuaciones de la forma $x \pm a = b$

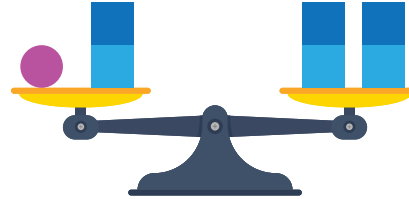
Problema

Andrea debe determinar el valor de x en la ecuación $x + 2 = 4$. Para hacerlo dibujó una balanza y representó x con un círculo y cada unidad con un cuadrado. ¿Cuál es el valor de x ?



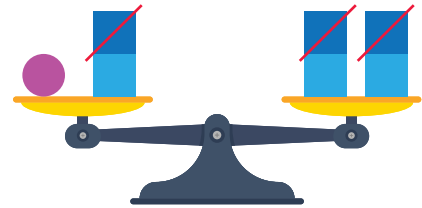
¡Atención!

Se pueden quitar objetos de ambos lados de la balanza procurando mantener el equilibrio.



Solución

Si se quitan 2 cuadrados de ambos lados de la balanza se mantiene el equilibrio.



En el primer miembro queda un círculo que equivale a x y en el segundo miembro quedan 2 cuadrados que equivalen a 2, es decir, $x = 2$.



Datos interesantes

Para comprobar si la solución de una ecuación es correcta, se sustituye la incógnita por el valor obtenido; si se obtienen resultados iguales la solución es correcta. Por ejemplo:

$$x + 10 = 35 \rightarrow S = \{25\}$$

$$25 + 10 = 35$$

Se comprueba la solución.

Conclusión

Propiedades de una igualdad

Una igualdad matemática se mantiene cuando en ambos miembros:

1. Se suma el mismo número o expresión. Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$.
2. Se resta el mismo número o expresión. Si $A = B$, entonces $A - C = B - C$.
3. Se multiplica el mismo número o expresión. Si $A = B$, entonces $A \times C = B \times C$.
4. Se divide por el mismo número (diferente de cero) o expresión. Si $A = B$, entonces $A \div C = B \div C$, con C diferente de cero.
5. Se intercambian los miembros de la ecuación. Si $A = B$ entonces $B = A$.

Para resolver ecuaciones de la forma $x \pm a = b$ se utilizan las propiedades **1** o **2**. Por ejemplo: $x + 2 = 5 \rightarrow x + 2 - 2 = 5 - 2 \rightarrow x = 3$.



Recuerda

$$\begin{aligned} x + 2 - 2 \\ = x + 0 \\ = x \end{aligned}$$

1.5 Ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$

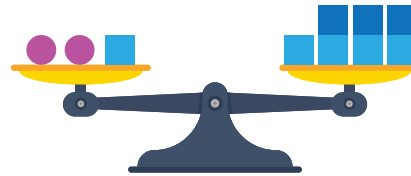
Problema

Para determinar el valor de x en la ecuación $2x + 1 = 7$, Ana empleó el mismo método de Andrea, dibujó la balanza y representó x con un círculo y cada unidad con un cuadrado. ¿Cuál es el valor de x ?



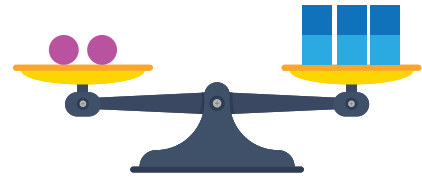
¡Atención!

Se pueden quitar objetos de ambos lados de la balanza procurando mantener el equilibrio.



Solución

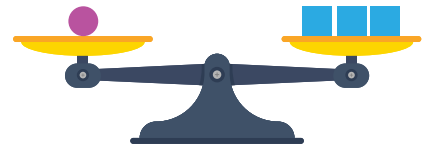
Al quitar un cuadrado de ambos lados de la balanza se mantiene el equilibrio. De esa forma queda $2x = 6$.



¡Atención!

Al resolver una ecuación se debe dejar sola o aislada la incógnita.

De la expresión anterior se tiene que cada círculo equivale a 3 rectángulos, es decir, $x = 3$.



Conclusión

Para resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ se utilizan las propiedades de una igualdad. Por ejemplo:

- $4m + 3 = 11$
- $4m + 3 - 3 = 11 - 3$ \longrightarrow Se resta 3 en ambos miembros.
- $4m = 8$ \longrightarrow Se efectúan las restas.
- $\frac{4}{4}m = \frac{8}{4}$ \longrightarrow Se divide entre 4 ambos términos.
- $m = 2$ \longrightarrow Se efectúan las divisiones.
- $S = \{2\}$ \longrightarrow Se anota el conjunto solución.



Datos interesantes

La transposición de términos es un método abreviado de las propiedades de una igualdad.

Al resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ a través de la transposición de términos, primero se suma (o resta) b al segundo miembro y después se divide entre a .

Observa cómo se hace

Observa la forma en que se resuelven ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ utilizando la transposición de términos:

- $2x + 8 = 20$
 $2x = 20 - 8$ \longrightarrow El 8 que está sumando se pasa a restar.
 $2x = 12$ \longrightarrow Se resuelve la resta.
 $x = \frac{12}{2}$ \longrightarrow El 2 que está multiplicando se pasa a dividir.
 $x = 6$ \longrightarrow Se simplifica la fracción.
 $S = \{6\}$ \longrightarrow Se anota el conjunto solución.

- $-10a - 2 = 13$
 $-10a = 13 + 2$ \longrightarrow El 2 que está restando pasa a sumar.
 $-10a = 15$ \longrightarrow Se resuelve la suma.
 $a = \frac{15}{-10}$ \longrightarrow El -10 que está multiplicando pasa a dividir.
 $a = -\frac{3}{2}$ \longrightarrow Se simplifica la fracción.
 $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ \longrightarrow Se anota el conjunto solución.



Datos interesantes

La operación inversa de la suma es la resta (y viceversa). Además, la operación inversa de la multiplicación es la división (y viceversa). Por ello, si un término está sumando en un miembro de la igualdad, pasa a restar al otro miembro, y si está multiplicando, pasa a dividir.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Resuelve cada ecuación utilizando las propiedades de la igualdad.
 - Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.
 - a. $7x + 3 = 17$ b. $3h + 12 = 10 + 11$
 - c. $2a - 1 = 21$ d. $2x - 5 = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4}$
 - e. $4m + \sqrt{9} = \sqrt{49}$ f. $5a - \frac{1}{15} = \frac{8}{5} - \frac{2}{3}$

2. Resuelve cada ecuación utilizando la transposición de términos.
 - Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.
 - a. $5a + 7 = 12$ b. $2h + 7 = 4 + 5$
 - c. $4b - 5 = -13$ d. $3x - 3 = 12$
 - e. $5x + 10 = 30$ f. $6m - 2 = -20$

3. Representa cada situación mediante una ecuación, luego, determina el conjunto solución.
 - a. Amanda compró 2 manzanas y una sandía. Si pagó en total 7 balboas y la sandía costó 3 balboas, ¿cuál es el precio de cada manzana?
 - b. El precio de 3 camisas y 4 pantalones es 43 balboas. Si cada pantalón cuesta 7 balboas, ¿cuál es el precio de cada camisa?

1.6 Ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$



¡Atención!

Representa las compras realizadas con lenguaje algebraico; luego, iguala las expresiones.

Problema

Marta compró 2 bolígrafos y un borrador de 1 balboa y Luis un bolígrafo igual a los de Marta y un cuaderno de 3 balboas. Si pagaron lo mismo, ¿cuál es el valor de cada bolígrafo?

Solución

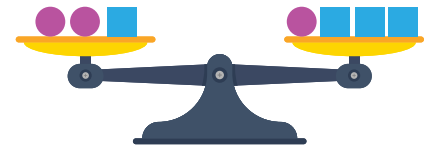
Si x representa el valor de cada bolígrafo, entonces, se determinan estas expresiones:

Compra de Marta $\rightarrow 2x + 1 \cdot 1 = 2x + 1$.

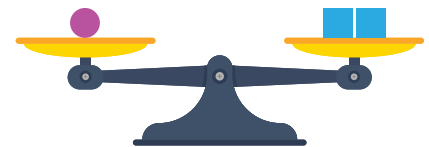
Compra de Luis $\rightarrow x + 1 \cdot 3 = x + 3$.

Como pagaron lo mismo, se igualan las expresiones: $2x + 1 = x + 3$.

Al representar la ecuación en una balanza equilibrada donde x es un círculo y cada unidad un cuadrado se obtiene la representación de la derecha:



Al quitar un cuadrado y un círculo de ambos lados de la balanza se mantiene el equilibrio. De esa forma queda $x = 2$.



R: Cada bolígrafo cuesta 2 balboas.

Conclusión



Recuerda

Al sumar (o restar) monomios semejantes, se suman (o restan) los coeficientes numéricos y se mantiene el factor literal. Por ejemplo:

a. $2x - x = (2 - 1)x$
 $= 1x = x$

b. $x - x = (1 - 1)x = 0x$

Para resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ se utilizan las propiedades de una igualdad. Por ejemplo:

$$2x + 1 = x + 3$$

$$2x + 1 - 1 = x + 3 - 1 \rightarrow \text{Se resta 1 en ambos miembros.}$$

$$2x = x + 2 \rightarrow \text{Se efectúan las restas.}$$

$$2x - x = x - x + 2 \rightarrow \text{Se resta x en ambos miembros.}$$

$$x = 2 \rightarrow \text{Se efectúan las restas.}$$

$$S = \{2\} \rightarrow \text{Se anota el conjunto solución.}$$

Al resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ a través de la transposición de términos, primero se transponen los términos de forma que en un miembro queden los términos con variables y en el otro, los que no lo tienen. Luego, se reducen los términos semejantes y se despeja la incógnita según lo aprendido.

Observa cómo se hace

Observa la manera en que se resuelven ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ utilizando la transposición de términos:

- $5m + 7 = 2m + 1$
 $5m - 2m = 1 - 7$ → Se transponen los términos: en un miembro quedan los que poseen incógnita y en el otro los que no.
- $3m = -6$ → Se reducen los términos semejantes.
- $m = \frac{-6}{3}$ → El 3 que está multiplicando se pasa a dividir.
- $m = -2$ → Se simplifica la fracción.
- $S = \{-2\}$ → Se anota el conjunto solución.



¿Qué pasaría?

Al trasponer los términos se pueden colocar los que tienen incógnita en el segundo miembro sin afectar el resultado.

$$\begin{aligned} 5m + 7 &= 2m + 1 \\ 7 - 1 &= 2m - 5m \\ 6 &= -3m \\ \frac{6}{-3} &= m \\ -2 &= m \end{aligned}$$

$$S = \{-2\}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Resuelve cada ecuación utilizando las propiedades de la igualdad.

- Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.

a. $2x + 5 = 7x - 3$

b. $5h + 9 = h + 5$

c. $4a - 7 = 2a - 1$

d. $x - 2 = \frac{-x}{5} - \frac{4}{3}$

e. $6m + \sqrt{100} = 5m + 12$

f. $3p - \frac{4}{5} = -\frac{3}{10} - 7p$

2. Resuelve cada ecuación utilizando la transposición de términos.

- Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.

a. $3a + 5 = a - 3$

b. $4f + 3 - 2 = 5f + 2 - 7$

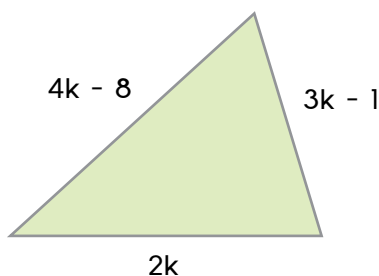
c. $12b - 4 = 6 - 3b$

d. $8q^2 - 4q + 5 = 8q^2 + 2q + 3$

e. $8x - 6 = -5x - 19$

f. $a^2 - 2a - \frac{4}{5} = a^2 + 7a - \frac{8}{10}$

3. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo si su perímetro es 45?



Recuerda

El perímetro se obtiene sumando todos sus lados.

4. Representa la situación con una ecuación, luego, determina el conjunto solución.

- a. Kevin tiene el triple de la edad de Jimena. Si dentro de 5 años ambas edades sumarán 50, ¿cuál es la edad de cada uno en la actualidad?

1.7 Ecuaciones con signos de agrupación

Problema



Miguel tiene una plantación de papaya y cortó 3 árboles porque producían frutos de mala calidad. Si cada árbol restante tiene 5 papayas, produciendo 355 frutos en total, ¿cuántos árboles tenía originalmente?

Solución

Primero se determina la variable, luego se establecen las cantidades que guardan una relación de igualdad. En este caso:

Cantidad de árboles que tenía Miguel	→	x
Cantidad de árboles que quedan	→	$x - 3$
Cantidad de papayas	→	$5(x - 3)$

Por lo tanto:

$$5(x - 3) = 355$$

$$5x - 15 = 355$$

$$5x = 355 + 15$$

$$x = \frac{370}{5}$$

$$x = 74$$

R: Tenía 74 árboles originalmente.

Conclusión

Para resolver ecuaciones con signos de agrupación, se utiliza la propiedad distributiva para suprimir los paréntesis, luego, se siguen los pasos aprendidos anteriormente. Por ejemplo:

$$\bullet \quad 2(x + 3) + 4 = 20$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot 3 + 4 = 20$$

$$2x + 6 + 4 = 20$$

$$2x = 20 - 6 - 4$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

$$S = \{5\}$$

→ Se aplica la propiedad distributiva.

→ Se efectúan las multiplicaciones.

→ Se transponen los términos.

→ Se efectúan las restas.

→ 2 pasa a dividir.

→ Se efectúan la división o simplificación.

→ Se anota el conjunto solución.



Recuerda

La propiedad distributiva establece que:

$$\mathbf{a(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 5(x - 3) &= 5 \cdot x - 5 \cdot 3 \\ &= 5x - 15 \end{aligned}$$



Desarrollo sostenible

Una buena alimentación debe incluir frutas y verduras, porque son fuente de vitaminas y minerales necesarios para un correcto funcionamiento de nuestro organismo.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada ecuación de la columna izquierda con su respectiva solución de la columna derecha. Indica la letra de la ecuación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A → 2.

A. $2(x + 3) = 10$

B. $7 + 5(4a - 2) = 7$

C. $4(2h + 5) - 2 = 15$

D. $6(2x - 5) - 10 = 7x$

E. $n(2 + m) - 21 = nm - 5n$

F. $a(p + 3) + 5 = 4a + ap - 1$

G. $-2(3m - 1) = 7(m + 4)$

H. $-3(k + 2) - 7 = 4(k + 2)$

1. $S =$

2. $S = \{2\}$

3. $S = \{6\}$

4. $S =$

5. $S = \{-2\}$

6. $S = \{8\}$

7. $S = \{-3\}$

8. $S = \{3\}$

2. Resuelve cada ecuación.

- Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.

a. $3(x - 5) = 12$

b. $-2(m + 3) - 5 = 5(m + 2)$

c. $8(b + 3) - 4 = 6$

d. $q(q + 7) - 7 = q^2 + 2(q + 3)$

e. $9 + 4(x - 3) = -5x - 12$

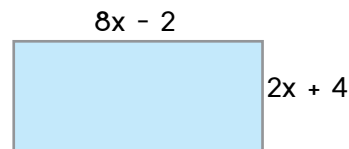
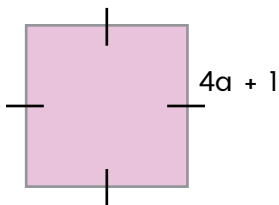
f. $5a^2 + 2(a - \frac{1}{2}) = a(5a + 1) - \frac{3}{4}$

3. Calcula el área de cada figura.

- **Pista:** Calcula el valor de cada incógnita según el perímetro dado.

a. $P = 8a + 12$

b. $P = 25x - 6$



4. Representa la situación con una ecuación, luego, determina el conjunto solución.

- a. Kattia tiene una librería. Para motivar las ventas indicó a sus vendedores que les daría 2 balboas por cada libro vendido. Si sus gastos mensuales por funcionamiento son de 400 balboas y la ganancia en promedio por cada libro vendido es de 5 balboas, ¿cuál es la menor cantidad de libros que debe vender para cubrir los gastos?

1.8 Ecuaciones de la forma $\frac{x}{a} \pm b = \frac{c}{d}$



Desarrollo sostenible

El ejercicio favorece la salud física y mental. Identifica con cuál disciplina te sientes más cómodo y organiza tu tiempo para que puedas practicarla.



¡Atención!

En $\frac{x}{3}$ el 3 está dividiendo a la variable, por ello, al transponerlo, pasa a multiplicar.



Trabajo colaborativo

Forma grupos de 3 participantes y resuman en fichas las estrategias aprendidas para resolver ecuaciones. Integren 5 ejemplos originales resueltos.

Problema

Lohana corrió una tercera parte de un sendero y caminó 8 km, pero debido a una lesión no pudo continuar. Si recorrió $\frac{27}{2}$ km, ¿de cuántos kilómetros era el sendero originalmente?

Solución

Primero se determina la variable, luego se establecen las cantidades que guardan una relación de igualdad. En este caso:

Recorrido total	→ x
Kilómetros que corrió	→ $\frac{x}{3}$
Kilómetros que caminó	→ 8
Recorrido de Lohana	→ $\frac{x}{3} + 8$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} + 8 &= \frac{27}{2} \\ \frac{x}{3} &= \frac{27}{2} - 8 \\ \frac{x}{3} &= \frac{11}{2} \\ x &= \frac{11}{2} \cdot 3 \\ x &= \frac{33}{2} = 16,5\end{aligned}$$

R: El trayecto original era de $\frac{33}{2} = 16,5$ km.

Conclusión

Al resolver ecuaciones de la forma $\frac{x}{a} \pm b = \frac{c}{d}$, se transpone **b**, se resuelve la operación, luego, se transpone **a** para despejar la incógnita.

Por ejemplo:

- $\frac{x}{4} - 1 = \frac{5}{4}$
- $\frac{x}{4} = \frac{5}{4} + 1$ → Se transpone 1 (estaba restando pasa a sumar).
- $\frac{x}{4} = \frac{9}{4}$ → Se efectúa la suma.
- $x = \frac{9}{4} \cdot 4$ → Se transpone 4 (estaba dividiendo pasa a multiplicar).
- $x = 9$ → Se resuelve la multiplicación.
- $S = \{9\}$ → Se anota el conjunto solución.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada ecuación de la columna izquierda con su respectiva solución de la columna derecha. Indica la letra de la ecuación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A → 3.

A. $\frac{a}{6} + 4 = \frac{3}{2}$

B. $\frac{-1}{5} = \frac{x}{5} - 2$

C. $\frac{x}{10} + 2 = \frac{21}{7}$

D. $1 + \frac{x}{8} = \frac{1}{8}$

E. $\frac{x}{13} + 7 = \frac{49}{7}$

F. $\frac{9}{4} = \frac{x}{2} - 3$

G. $\frac{x}{3} + 2 = \frac{-2}{6} + \frac{4}{3}$

1. $S = \{9\}$

2. $S = \{0\}$

3. $S = \{-15\}$

4. $S = \left\{\frac{21}{2}\right\}$

5. $S = \{-7\}$

6. $S = \{-3\}$

7. $S = \{10\}$

2. Resuelve cada ecuación.

a. $\frac{x}{3} + 5 = \frac{\sqrt{4}}{2}$

c. $7 + \frac{a}{2} = \frac{3}{4}$

e. $\frac{m}{4} - 3 = \frac{-2}{7} - 2$

b. $\frac{k}{25} - 5 = \frac{1}{5} - 6$

d. $\frac{-3}{5} + \frac{4}{3} = \frac{x}{5} + \frac{2}{3}$

f. $\frac{1}{2} + \frac{x}{7} - 2 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{4}$

3. Representa cada situación con una ecuación, luego, determina el conjunto solución.

a. Pedro utilizó una cuarta parte de una tela para tapizar un sillón y 2 m para tapizar unas sillas. Si gastó $\frac{13}{2}$ m, ¿Cuántos metros de tela tenía originalmente?

b. La edad de Kemly es la mitad de la edad de su mamá disminuida en 4. Si Kemly tiene 19 años, ¿cuántos años tiene su mamá?

1.9 Ecuaciones de la forma $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$

Problema

Iris debe resolver la ecuación de la derecha.

$$\frac{2x + 6}{4x - 1} = \frac{2}{3}$$

Realiza las siguientes actividades:

- Usa un producto cruzado entre los términos de la ecuación.
- Utiliza la distributividad de la multiplicación respecto a la suma o resta para resolver los productos obtenidos en el paso anterior.
- Calcula el valor de la incógnita.

Solución

- Al usar un producto cruzado entre los términos se obtiene:

$$\frac{2x + 6}{4x - 1} = \frac{2}{3} \longrightarrow 3(2x + 6) = 2(4x - 1)$$

- Al aplicar la distributividad de la multiplicación respecto a la suma o resta se obtiene:

$$\begin{aligned} 3(2x + 6) &= 2(4x - 1) \\ 6x + 18 &= 8x - 2 \end{aligned}$$

- Para obtener el valor de la incógnita se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} 6x + 18 &= 8x - 2 \\ 6x - 8x &= -2 - 18 \\ -2x &= -20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Conclusión

Al resolver ecuaciones de la forma $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$, se realiza un producto cruzado entre sus términos y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{3x - 2}{5x + 7} &= \frac{-1}{2} \\ 2(3x - 2) &= -(5x + 7) \\ 6x - 4 &= -5x - 7 \\ 6x + 5x &= -7 + 4 \\ 11x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{11} \\ S &= \left\{ \frac{-3}{11} \right\} \end{aligned}$$

- Se realiza un producto cruzado.
- Se emplea la propiedad distributiva.
- Se transponen los términos.
- Se operan los términos semejantes.
- Se despeja la incógnita.
- Se anota el conjunto solución.



¡Atención!

El producto cruzado es una multiplicación en cruz, donde se coloca cada operación en miembros diferentes de la ecuación.



Recuerda

La multiplicación es distributiva respecto de la suma y la resta, esto es:

$$a(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$



¡Atención!

Al obtener el resultado debe comprobarse en el denominador de la ecuación original para comprobar que $cx \pm d \neq 0$. Ejemplo, al comprobar la solución en el denominador de la ecuación del lado se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Como } 5 \cdot \frac{-3}{11} + 7 &= \frac{62}{11}, \\ \text{y } \frac{62}{11} &\neq 0, \text{ entonces} \\ S &= \left\{ \frac{-3}{11} \right\}. \end{aligned}$$

Observa cómo se hace

Observa la manera en que se obtiene el conjunto solución de una ecuación de la forma $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{2m+3}{5m-10} &= \frac{3}{5} \\ 5(2m+3) &= 3(5m-10) && \longrightarrow \text{Se realiza un producto cruzado.} \\ 10m+15 &= 15m-30 && \longrightarrow \text{Se emplea la propiedad distributiva.} \\ 10m-15m &= -30-15 && \longrightarrow \text{Se transponen los términos.} \\ -5m &= -45 && \longrightarrow \text{Se operan los términos semejantes.} \\ m &= \frac{-45}{-5} = 9 && \longrightarrow \text{Se despeja la incógnita.} \end{aligned}$$

Antes de anotar el conjunto solución, se comprueba el **resultado** en el denominador de la ecuación original:

$$5m - 10 \rightarrow 5 \cdot 9 - 10 = 35 \neq 0$$

Como es distinto de cero entonces: $S = \{9\}$.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Resuelve cada ecuación.

- Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.

a. $\frac{m+1}{m-11} = \frac{1}{5}$

b. $\frac{5a+a^2}{5a+4} = \frac{a}{5}$

c. $\frac{4x-3}{x-1} = \frac{5}{2}$

d. $\frac{2x+5}{3x-3} = \frac{2x+2}{3x+5}$

e. $\frac{7}{3} = \frac{-7a+1}{a+3}$

f. $\frac{3m-2}{2m+1} = \frac{3m-1}{2m+3}$

g. $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x+5}$

h. $\frac{4x+2}{5x-1} = 1$

2. Representa cada situación con una ecuación, luego, determina el conjunto solución.

- a. Tania y Pablo obtuvieron iguales resultados. Si Tania dividió 5 entre un número aumentado en 2 y Pablo dividió 2 entre el mismo número utilizado por Tania disminuido en 7, ¿cuál fue el número desconocido que usaron ambos jóvenes?

- b. La docente de Kenneth le indicó que si quería conocer los puntos que obtuvo en la prueba trimestral, tendría que resolver la ecuación $\frac{3x-8}{4} = \frac{246-x}{2}$. ¿Cuál puntaje obtuvo?

Gráfica de la función lineal $y = ax \pm b$

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno



1. Resuelve cada ecuación en el cuaderno. Luego, asocia cada ecuación de la columna izquierda con su respectiva solución de la columna derecha. Indica la letra de la ecuación y el número que corresponde al resultado. Ejemplo: A \rightarrow 1.

A. $5p - 12 = 3 \cdot \frac{1}{2} + 8p$

B. $x + 4 = 7$

C. $h - 1 = 10$

D. $5(k - 3) - 1 = -2(k + 7)$

E. $-(a + 5) = 5(a + 3)$

F. $\frac{3}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

G. $\frac{2x - 3}{3x - 6} = \frac{3}{5}$

1. $S = \left\{ \frac{-9}{2} \right\}$

2. $S = \{3\}$

3. $S = \left\{ \frac{2}{7} \right\}$

4. $S = \left\{ -\frac{10}{3} \right\}$

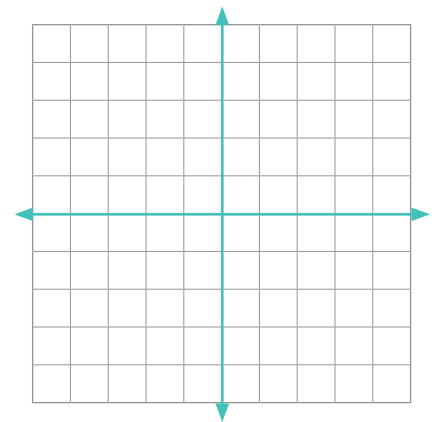
5. $S = \{11\}$

6. $S = \{-3\}$

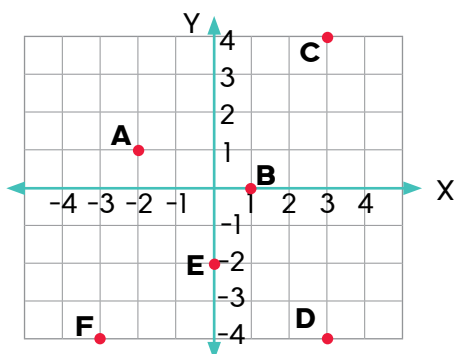
7. $S = \{1\}$

2. Completa el plano cartesiano y representa los pares indicados.

- A(-4, 4)
- B(0, 2)
- C(3, 5)
- D(-1, 0)
- E(4, -3)
- F(-2, -4)



3. Escribe las coordenadas de los puntos indicados.



- A(,)
 B(,)
 C(,)
 D(,)
 E(,)
 F(,)



Recuerda

En los pares ordenados la primera coordenada corresponde al eje X del plano cartesiano y la segunda al eje Y.

2.2 La función lineal

Problema

Manuel tiene 75 balboas en una cuenta bancaria y decide ahorrar 5 balboas adicionales cada semana.

Responde las siguientes preguntas:

1. Si y corresponde al dinero ahorrado, y x representa la cantidad de semanas, ¿cuál expresión representa lo indicado en el problema?
2. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado a las 2 semanas, al mes y al año?
3. ¿Cuántas semanas debe ahorrar para tener 110; 125 y 595 balboas?



Solución

1. y : Dinero total ahorrado.

x : Cantidad de semanas

$5x$: Dinero ahorrado según la cantidad de semanas.

$5x + 75$: Dinero total ahorrado según la cantidad de semanas.

R: El problema se representa con la expresión: $y = 5x + 75$.

2. Para obtener el dinero ahorrado se sustituye la cantidad de semanas (variable x) en la ecuación.

- 2 semanas:

$$y = 5x + 75$$

$$y = 5 \cdot 2 + 75$$

$$y = 85$$

R: Tendrá B/85.

- 1 mes tiene 4 semanas aproximadamente:

$$y = 5x + 75$$

$$y = 5 \cdot 4 + 75$$

$$y = 95$$

R: Tendrá B/95.

- 1 año tiene 52 semanas:

$$y = 5x + 75$$

$$y = 5 \cdot 52 + 75$$

$$y = 335$$

R: Tendrá B/335.

3. Para obtener la cantidad de semanas se sustituye el dinero ahorrado (variable y) en la ecuación y determina el valor de la incógnita x . ¿Cuántas semanas debe ahorrar para tener 110; 125 y 595 balboas?

- 110 balboas:

$$y = 5x + 75$$

$$110 = 5x + 75$$

$$110 - 75 = 5x$$

$$\frac{35}{5} = x$$

$$7 = x$$

R: 7 semanas.

- 125 balboas:

$$y = 5x + 75$$

$$125 = 5x + 75$$

$$125 - 75 = 5x$$

$$\frac{50}{5} = x$$

$$10 = x$$

R: 10 semanas.

- 595 balboas:

$$y = 5x + 75$$

$$595 = 5x + 75$$

$$595 - 75 = 5x$$

$$\frac{520}{5} = x$$

$$104 = x$$

R: 104 semanas.



Trabajo colaborativo

En parejas, utilicen la propuesta de la sección **Problema** para crear un plan de ahorro que les permita cumplir una meta a corto o largo plazo.

1. Identificar si poseen algún ahorro base.
2. Determinar la cantidad que pueden ahorrar semanalmente.
3. Investigar la cantidad de dinero que necesitan para cumplir con la meta.
4. Calcular la cantidad de semanas que deben ahorrar para lograr la meta.
5. Calcular el dinero que tendrán al mes, al año y a los dos años.

Conclusión

Una función lineal de la forma $y = ax \pm b$ puede representarse así:

$$y = mx \pm b$$

Donde y es la variable dependiente, x la variable independiente, m y b son constantes.

Resolver la ecuación $y = ax \pm b$ corresponde a calcular el valor de x según el valor de y dado. El resultado es la **solución o raíz** de la ecuación. Cuando el valor de y es cero, el resultado se denomina **cero de la función** y , al graficarse, corresponde a la intersección con el eje X del plano cartesiano.



¿Qué pasaría?

En una función lineal, para determinar el valor de y según el valor de x dado, se sustituye x en la ecuación; luego, se resuelve la operación.
Ejemplo:

Determine el valor de y en la función $y = 7x - 10$, si $x = 3$.

$$y = 7x - 10$$

$$y = 7 \cdot 3 - 10$$

$$y = 11$$

Observa cómo se hace

- Determina la raíz de la ecuación $y = 7x - 10$, si $y = 39$.

$$39 = 7x - 10$$

→ Se sustituye y por el valor dado.

$$\frac{39 + 10}{7} = x$$

→ Se resuelve la ecuación.

$$7 = x$$

$$S = \{7\}$$

- Calcula el cero de la función lineal $y = 2x - 4$.

$$0 = 2x - 4 \rightarrow$$

Se sustituye y por 0.

$$\frac{0 + 4}{2} = x \rightarrow$$

Se resuelve la ecuación.

$$2 = x$$

$$S = \{2\}$$

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



- Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

Función	Cero de la función	Si $x = 1$, $y = \underline{\quad}$	Si $x = -1$, $y = \underline{\quad}$	Si $y = 4$, $x = \underline{\quad}$	Si $y = -2$, $x = \underline{\quad}$
$y = 3x + 5$					
$y = 2x - 4$					
$y = 5x$					
$y = x + 8$					
$y = \frac{3}{2}x - 1$					
$y = \frac{x+6}{4}$					

2.3 Gráfica de ecuaciones lineales

Problema

Noelia mide la estatura de su hijo una vez al mes y la anota en la siguiente tabla:

Mes	x	0	1	2	3	4	5
Estatura	y	154	155	156	157	158	159

Para valorar si el crecimiento de su hijo es constante, decidió graficarlo.

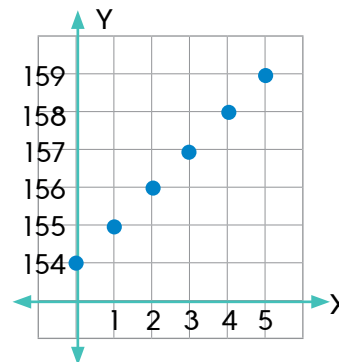
1. Representa los datos de la tabla como pares ordenados.
2. Representa los pares ordenados anteriores en un plano cartesiano.
3. Une los puntos del plano. ¿El crecimiento del joven es constante?

Solución

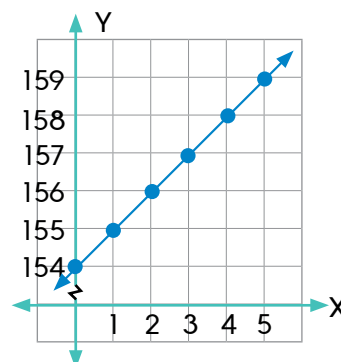
1. Al representar los datos como pares ordenados se obtienen:

(0, 154) (1, 155) (2, 156) (3, 157) (4, 158) (5, 159)

2. Al representar los pares ordenados en el plano cartesiano se debe considerar que la primera coordenada se relaciona con el eje x y la segunda con el eje y, tal cual se muestra en el plano cartesiano de la derecha.



3. Se emplea una regla para unir los puntos:



R: Se obtiene una línea recta, esto indica que el crecimiento del hijo de Noelia es constante.



Recuerda

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas que se intersecan perpendicularmente en 0. La recta horizontal es el eje X o **eje de las abscisas** y la recta vertical es el eje Y o **eje de las ordenadas**. El punto de intersección de ambos ejes es el **origen**.



¿Sabías qué...?

Un punto en el plano cartesiano es llamado par ordenado, porque posee dos coordenadas que siempre llevan el mismo orden: a la izquierda se ubica la coordenada **x**, a la derecha la coordenada **y**.

Conclusión

Para representar una ecuación lineal en un plano cartesiano se construye una tabla con dos variables (x , y), se marcan los puntos en el plano cartesiano y se unen los puntos con una línea recta.

Observa cómo se hace

Observa la forma en que se grafica la ecuación $y = x - 1$.

- Se construye la tabla, para hacerlo se asignan valores arbitrarios o directos a x para determinar los valores de y , así:

Si $x = -3$, entonces $y = -3 - 1 = -4$.

Si $x = -2$, entonces $y = -2 - 1 = -3$.

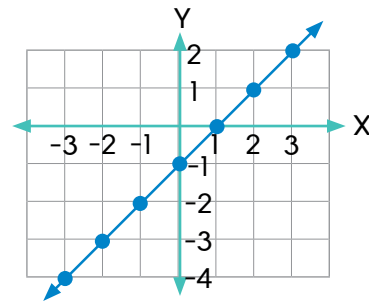
Si $x = -1$, entonces $y = -1 - 1 = -2$.

Si $x = 0$, entonces $y = 0 - 1 = -1$.

Y así sucesivamente.

- Se marcan los puntos de la tabla en el plano cartesiano, luego se unen con una línea recta.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2



Práctica

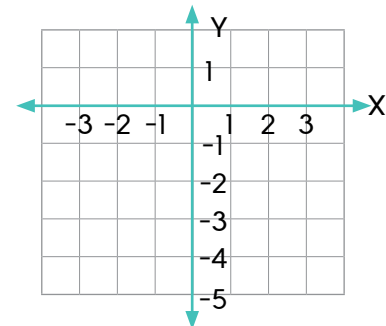
Trabaja en
tu cuaderno



- Copia las tablas y los planos cartesianos en el cuaderno y grafica las funciones indicadas.

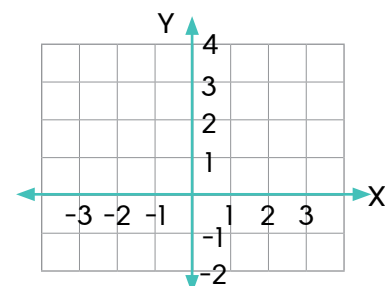
a. $y = x - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



b. $y = x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



2.4 Solución de ecuaciones lineales a través de su gráfica

Problema

Marilyn leyó que si se grafican por aparte ambos miembros de la ecuación $x - 3 = 5x + 1$, igualando cada miembro con la variable y ; la coordenada x del punto de intersección de ambas gráficas corresponde al conjunto solución. Realiza las siguientes actividades:

1. Grafica, en un mismo plano cartesiano, los miembros de la ecuación por separado.
2. Resuelve la ecuación y compara ambos resultados.

Solución

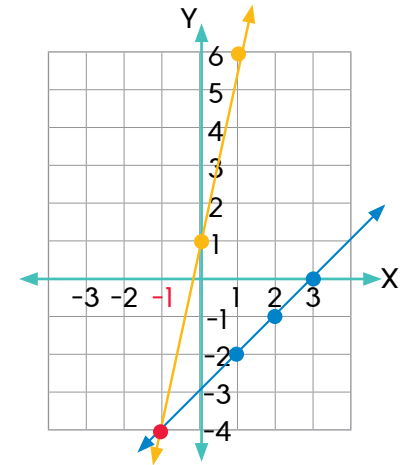
1. Al graficar ambos miembros de la ecuación por separado con respecto a la variable y , se obtiene la gráfica de la derecha:

$$y = x - 3$$

$$y = 5x + 1$$

x	1	2	3
y	-2	-1	0

x	-1	0	1
y	-4	1	6



R: La coordenada x del punto de intersección es -1 .

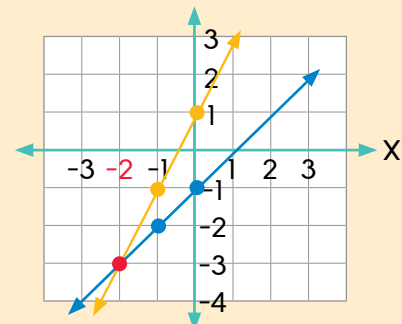
2. El conjunto solución de la ecuación es -1 :
 $x - 3 = 5x + 1 \rightarrow x - 5x = 1 + 3 \rightarrow -4x = 4 \rightarrow x = -1 \rightarrow S = \{-1\}$

Ambos resultados son iguales, por lo tanto, se cumple lo leído por Marilyn.

Conclusión

Al graficar de forma independiente los miembros de una ecuación, la coordenada x del punto de intersección corresponde al conjunto solución de la ecuación. Al hacerlo se completa una tabla como la siguiente y se efectúan las gráficas. Por ejemplo, al graficar $2x + 1 = x - 1$ se tiene:

Valor de x	Valor "y" del primer miembro: $2x + 1$	Valor "y" del segundo miembro: $x - 1$
-2	$2 \cdot -2 + 1 = -3$	$-2 - 1 = -3$
-1	-1	-2
0	1	-1



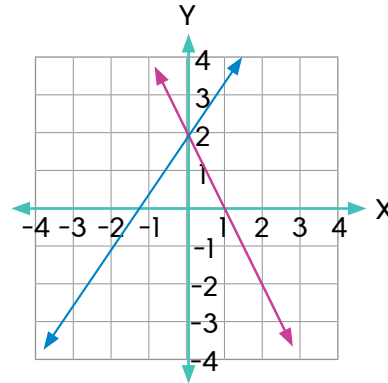
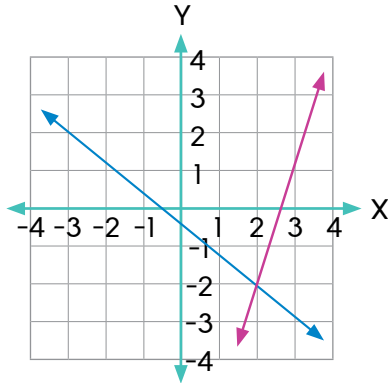
$$S = \{-2\}$$



1. Anota el conjunto solución de las ecuaciones representadas.

a. $S = \{ \square \}$

b. $S = \{ \square \}$



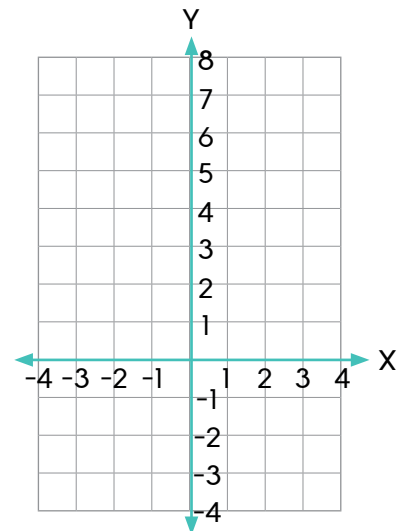
2. Determina el conjunto solución de cada ecuación a través de su gráfica.

- Completa la tabla y las gráficas correspondientes.

a. Ecuación: $x + 2 = -3x + 2$

$S = \{ \square \}$

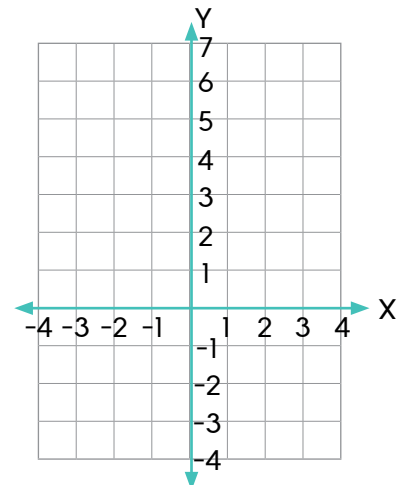
Valor de x	Valor "y" del primer miembro	Valor "y" del segundo miembro
-2		
0		
2		



b. Ecuación: $2x = x + 3$

$S = \{ \square \}$

Valor de x	Valor "y" del primer miembro	Valor "y" del segundo miembro
-2		
0		
2		



2.5 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno



1. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

Función	Cero de la función	Si $x = 3$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$	Si $x = -2$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$	Si $y = 2$, $x = \underline{\hspace{1cm}}$
$2y = 4x + 8$				
$3x + y = 2x - 4$				
$\frac{y+2}{3} = \frac{x+5}{4}$				



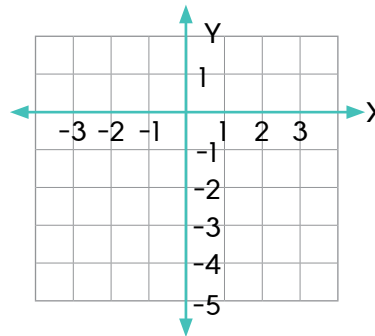
¡Atención!

Despeja la variable **y** hasta que la ecuación sea de la forma **$y = mx + b$** .

2. Copia las tablas y los planos cartesianos en el cuaderno. Luego, grafica las funciones indicadas.

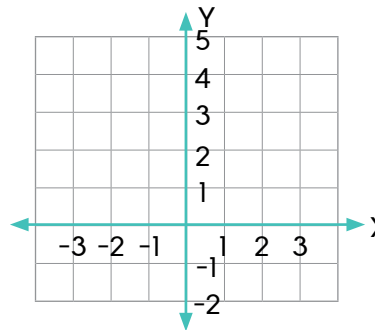
a. $2y = x - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



b. $y = \frac{x+6}{3}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

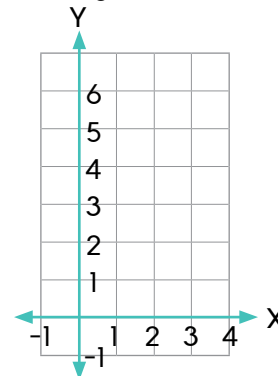


Datos interesantes

Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene. Por ello, para graficar una recta se requieren únicamente 2 puntos distintos.

3. Determina el conjunto solución de la ecuación $7x - 1 = x + 5$ de forma gráfica.

Valor de x	Valor "y" del primer miembro	Valor "y" del segundo miembro
0		
$\frac{1}{2}$		
1		



Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Clasifico con disposición las ecuaciones de acuerdo a sus características.			
2. Explico con interés los elementos de una ecuación: variable, grado de la ecuación, raíz y conjunto solución.			
3. Traduzco con facilidad expresiones verbales a lenguaje algebraico y viceversa.			
4. Soluciono ecuaciones de primer grado de la forma $x \pm a = b$ utilizando las propiedades de la igualdad.			
5. Soluciono ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = c$ utilizando las propiedades de la igualdad.			
6. Soluciono ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ utilizando las propiedades de la igualdad.			
7. Soluciono ecuaciones de primer grado con signos de agrupación utilizando las propiedades de la igualdad.			
8. Soluciono ecuaciones de primer grado de la forma $\frac{x}{a} \pm b = \frac{c}{d}$ utilizando las propiedades de la igualdad.			
9. Soluciono ecuaciones de primer grado de la forma $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ utilizando las propiedades de la igualdad.			
10. Resuelvo problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnica aplicando las propiedades de la igualdad.			
11. Calculo pares ordenados en ecuaciones lineales reemplazando cantidades numéricas.			
12. Trazo con exactitud la gráfica de una ecuación lineal.			
13. Determino el conjunto solución de una ecuación de primer grado a través de la gráfica independiente de sus miembros.			

Unidades de superficie y de volumen

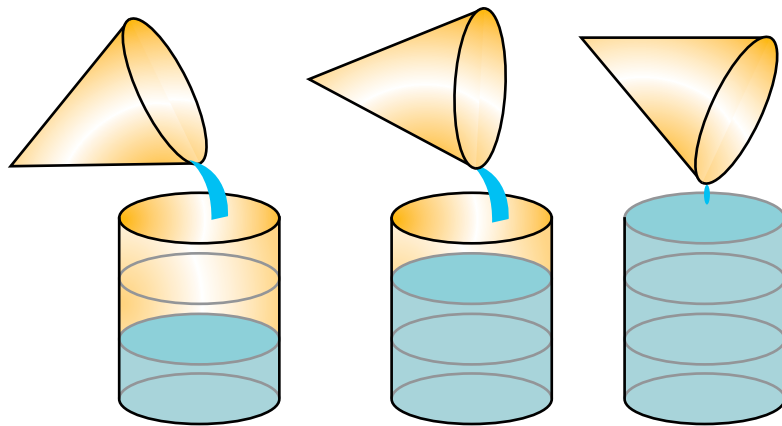
Según el Libro I de los *Elementos* de Euclides, la superficie es aquello que tiene longitud y anchura. Por ello, al calcular el área de un terreno, por ejemplo, se determina la medida de su superficie.

En el Antiguo Egipto, utilizaban el **setat** como unidad base de superficie y equivalía a 10 000 codos cuadrados; para medidas menores usaban el **remem** que equivalía a $\frac{1}{2}$ setat, el **hebes** que equivalía a $\frac{1}{4}$ setats; y el **sa** que equivalía a $\frac{1}{8}$ setat. Para las superficies mayores empleaban el **jata** que equivalía a 100 setats.

El volumen, por su parte, es una magnitud escalar que indica el espacio que ocupa un cuerpo. A lo largo de la historia diferentes culturas emplearon distintas unidades de volumen. Por ejemplo, en el Antiguo Egipto usaban el **heqat** para medir el trigo y la cebada, o el **henu** para medir la leche y el agua; en la Antigua Grecia utilizaron el **dracma líquido** o la **metreta**; para medir granos.

Por otra parte, el matemático y geómetra Euclides, comparó los volúmenes de los prismas y las pirámides, y estableció en la proposición 10 del libro XII de los *Elementos*, que el volumen del cono es un tercio comparado con el volumen del cilindro que tiene la misma base y altura. Cabe señalar que no fue el primero en dedicarse al estudio de los sólidos, pues ya Platón lo había hecho.

En la vida cotidiana, las unidades de volumen se utilizan para el comercio y también para actividades como la cocina, el riego de plantas y las tareas de limpieza.



Relación entre el volumen del cono y del cilindro.

En esta unidad aprenderás a...

- Identificar y comparar las unidades de medida de superficie en el SI.
- Convertir unidades medidas de superficie en el SI de múltiplos a submúltiplos, y viceversa.
- Resolver problemas prácticos de la vida cotidiana con medidas de superficie en el SI.
- Proponer situaciones que utilizan las medidas de superficie del SI.
- Identificar las unidades de medida de volumen en el SI.
- Comparar las unidades de medidas de volumen mediante signos de relación.
- Convertir unidades medidas de superficie entre el SI y el Sistema Inglés.
- Resolver problemas con medidas de volumen en el SI utilizando operaciones y conversiones.

Unidades de superficie

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe la unidad de medida más indicada para cada situación.

- a. Ana mide la altura de su libro de Matemática. _____
- b. Ester llevó a su bebé a la clínica para que lo pesaran. _____
- c. Daniel cercará su terreno y por ello midió su contorno. _____
- d. El tiempo que tarda una película en el cine. _____
- e. Diana compró un terreno grande cerca de la playa. _____
- f. Jaime colocará el vidrio de una ventana pequeña. _____

2. Anota el nombre de los múltiplos del metro cuadrado.

- a. _____ b. _____ c. _____

3. Escribe el nombre de los submúltiplos del metro cuadrado.

- a. _____ b. _____ c. _____

4. Indica el nombre de tres unidades de superficie del sistema inglés.

- a. _____ b. _____ c. _____

5. Analiza cada expresión y anota en la casilla respectiva una **V** si es verdadera o **F** si es falsa.

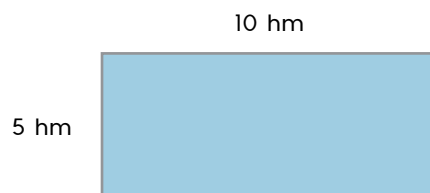
- a. $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$
- b. $100\,000 \text{ dm}^2 = 1 \text{ dam}^2$
- c. $1 \text{ km}^2 = 1000 \text{ m}^2$
- d. $1 \text{ pie}^2 = 144 \text{ pulg}^2$
- e. $1 \text{ yd}^2 = 9 \text{ pulg}^2$
- f. $9 \text{ pie}^2 = 1 \text{ yd}^2$

6. Determina el área de las figuras indicadas.

- a. $A =$ _____ b. $A =$ _____ c. $A =$ _____

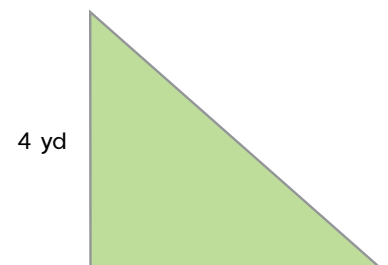


3 m



5 hm

10 hm



4 yd

3 yd

1.2

La superficie en el Sistema Internacional: múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

Problema

Daniel colocará piezas de porcelanato en las paredes de un baño de área 16 m^2 . Si las piezas son cuadradas y miden 50 cm de lado, ¿cuántas piezas colocará?

Responde las siguientes preguntas:

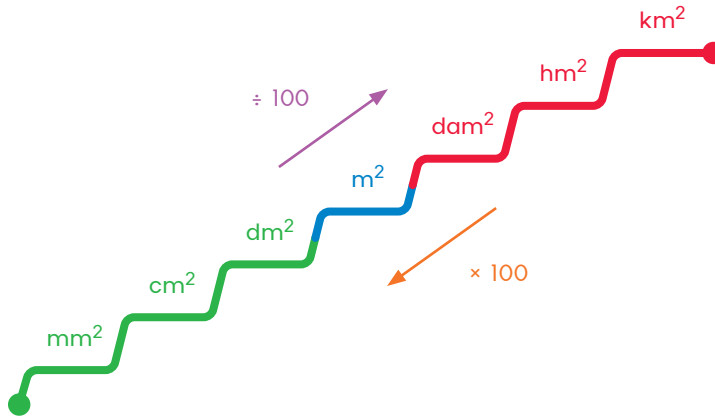
1. ¿Cuál es el área en metros cuadrados de cada pieza de porcelanato?
2. ¿Cuál equivalencia se obtiene entre las medidas en metros cuadrados y en centímetros cuadrados de una pieza?
3. ¿Cuántas piezas colocará en total?

Solución

1. Cada pieza de porcelanato es cuadrada, por ello, para obtener su área se utiliza la fórmula $A = \ell^2$, así:

$$A = (50 \text{ cm})^2 = 2500 \text{ cm}^2$$

Dado que se debe calcular el área de cada pieza en metros cuadrados y se obtuvo en centímetros cuadrados, se utiliza la escalera de conversión de unidades de medida de superficie empleada en años anteriores:



De centímetros cuadrados a metros cuadrados se deben subir dos escalones, por lo que se debe dividir entre 100 dos veces. Por lo tanto:

$$2500 \text{ cm}^2 \div 100 = 25 \text{ dm}^2 \div 100 = 0,25 \text{ m}^2$$

2. $2500 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ m}^2$.
3. Para obtener la cantidad de piezas que se necesitan, se divide la superficie del baño entre la superficie de cada pieza, así:

$$16 \text{ m}^2 \div 0,25 \text{ m}^2 = 64$$

R: Colocará 64 piezas de porcelanato en total.



Recuerda

Al dividir entre múltiplos de 10 se corre la coma hacia la izquierda según el número de ceros que posea el múltiplo.

Por ejemplo:

1. $89,5 \div 10 = 8,95$
(se corre la coma una vez).
2. $2500 \div 100 = 25,00$
(se corre la coma 2 veces).



Trabajo colaborativo

En pares, elijan dos lugares diferentes de la institución y determinen su superficie en **metros cuadrados**. Luego, expresen la información en una unidad mayor y una unidad menor.

Conclusión

Superficie es la extensión en la que se toma en consideración solo dos dimensiones y **área** es la medida de esa extensión delimitada.

La unidad base de superficie en el Sistema Internacional (SI) es el **metro cuadrado** (m^2). Para valores mayores se utilizan múltiplos como:

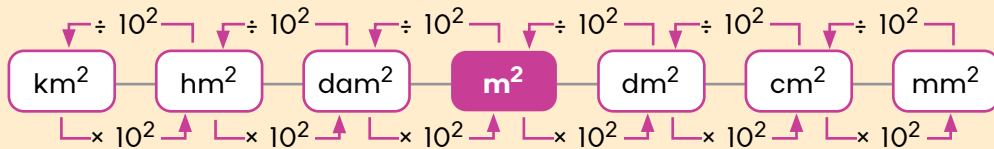
- Decámetro cuadrado (dam^2) • Hectómetro cuadrado (hm^2) • Kilómetro cuadrado (km^2)
- $1 dam^2 = 10^2 m^2 = 100 m^2$ $1 hm^2 = 10^4 m^2 = 10\ 000 m^2$ $1 km^2 = 10^6 m^2 = 1\ 000\ 000 m^2$

Para valores menores al metro cuadrado se utilizan submúltiplos como:

- Decímetro cuadrado (dm^2) • Centímetro cuadrado (cm^2) • Milímetro cuadrado (mm^2)
- $1 dm^2 = 10^{-2} m^2 = 0,01 m^2$ $1 cm^2 = 10^{-4} m^2 = 0,0001 m^2$ $1 mm^2 = 10^{-6} m^2 = 0,000\ 001 m^2$

Conversión de unidades de superficie en el SI

En el SI, las unidades de superficie inmediatas son 100 veces mayor o 100 veces menor. Por ello, al convertir a una unidad mayor se divide entre 100 o 10^2 tantas veces como espacios se dan de una unidad a otra; o se multiplica por 100 o 10^2 tantas veces como espacios al convertir a una unidad mayor.



Observa cómo se hace

Observa de qué manera se realizan conversiones:

1. $0,52 km^2$ a dam^2

Se desplaza 2 veces a una unidad menor, por lo tanto, se multiplica **dos** veces por 10^2 :

$$0,52 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 0,52 \cdot 10^4 = 5200 dam^2$$

2. $7\ 400\ 000 mm^2$ a m^2

Se desplaza 3 veces a una unidad mayor, por lo tanto, se divide entre 10^2 **tres** veces y se resuelve la siguiente operación:

$$7\ 400\ 000 \div (10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2) = 7\ 400\ 000 \div 10^6 = 7,4 m^2$$



Recuerda

$$10^2 = 100$$

$$10^4 = 10\ 000$$

$$10^6 = 1\ 000\ 000$$

$$10^8 = 100\ 000\ 000$$

$$10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$$

$$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$$

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe dos situaciones del entorno donde se usan las unidades de superficie.

2. Anota las unidades de superficie ordenadas de menor a mayor en el SI.
3. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.
- Observa los ejemplos.

Múltiplos		Unidad	Submúltiplos	
		dam ²	m ²	cm ²
		$1 \cdot 10^2 = 100$	$10^0 = 1$	$1 \cdot 10^{-4} = 0,0001$

4. Calcula las equivalencias en tu cuaderno.

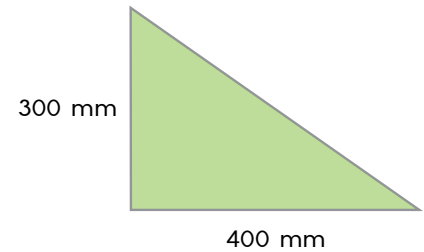
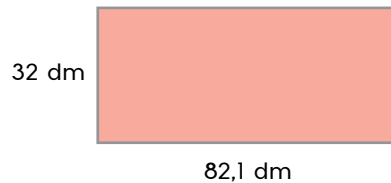
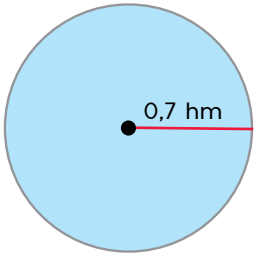
- a. $6 \text{ km}^2 = \dots\dots\dots \text{ hm}^2$ b. $0,0005 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ mm}^2$
- c. $25\,000 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ km}^2$ d. $26\,750\,000 \text{ mm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$
- e. $4,2 \text{ dam}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2$ f. $0,804\,007 \text{ hm}^2 = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$
- g. $1346,7 \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$ h. $703,5 \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$

5. Investiga las fórmulas y calcula la superficie de las siguientes figuras en metros cuadrados.

a. $A \approx \dots\dots\dots \text{ m}^2$

b. $A = \dots\dots\dots \text{ m}^2$

c. $A = \dots\dots\dots \text{ m}^2$



6. Resuelve las siguientes situaciones.

- a. La superficie del distrito de Colón es de $1179,9 \text{ km}^2$, ¿cuál es su área en metros cuadrados?
- b. Daniela compró dos terrenos colindantes. Si miden 180 m^2 y $20\,500 \text{ dm}^2$, ¿cuántos decímetros cuadrados compró en total?
- c. Hermes tiene una finca de $0,27 \text{ km}^2$. Si reforestó una tercera parte de su finca, ¿a cuántos metros cuadrados equivale ese terreno?
- d. Iris tiene dos opciones al comprar un terreno. Según el tamaño del terreno y el precio por metro cuadrado, ¿cuál le conviene?
- **Opción 1:** → Área: $0,0301 \text{ hm}^2$, precio: B/. 2107.
 - **Opción 2:** → Área: $29\,900 \text{ dm}^2$, precio: B/. 2691.



Determina el precio por metro cuadrado.

1.3 La superficie en el Sistema Inglés

Problema



Kendall observó un lote que llamó su atención. Al acercarse notó que había un anuncio como el que está a la izquierda con la información sobre su área en pies cuadrados y el precio por cada yarda cuadrada.

Responde las siguientes preguntas:

1. Si $1 \text{ yd}^2 = 9 \text{ pie}^2$, ¿cuál es el área del lote en yardas cuadradas?
2. El presupuesto de Kendall para la adquisición del lote es de 3000 balboas. ¿Puede adquirir el lote sin pasarse de su presupuesto?

Solución

1. Se emplea una regla de 3 para pasar de pies cuadrados a yardas cuadradas, así:

$$\frac{2520 \text{ pie}^2}{x \text{ yd}^2} = \frac{9 \text{ pie}^2}{1 \text{ yd}^2}$$

Al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{2520 \text{ pie}^2 \cdot 1 \text{ yd}^2}{9 \text{ pie}^2} = 280 \text{ yd}^2$$

R: El área del lote es de 280 yd^2 .

2. El precio del lote es de 10 balboas por cada yarda cuadrada, por lo tanto, para obtener el precio del lote se multiplica su área por 10:

$$280 \cdot 10 = 2800 \text{ balboas}$$

El presupuesto de Kendall es de 3000 balboas, además $3000 > 2800$.

R: Kendall puede adquirir el lote sin pasar su presupuesto.

Conclusión

Otro sistema que se utiliza para medir superficies es el Sistema Inglés. Algunas de sus unidades de superficie ordenadas de menor a mayor son:

- Pulgada cuadrada (pulg^2)
- Pie cuadrado (pie^2)
- Yarda cuadrada (yd^2)
- Milla cuadrada (mi^2)

El símbolo en inglés de estas unidades es el siguiente:

- Pulgada cuadrada (in^2)
- Pie cuadrado (ft^2)
- Yarda cuadrada (yd^2)
- Milla cuadrada (mi^2)



Recuerda

Toda proporción se resuelve utilizando la regla de 3: se multiplican extremos por extremos y medios por medios y luego se despeja la variable. Ejemplo:

$$\frac{2520}{x} = \frac{9}{1}$$

$$x \cdot 9 = 2520 \cdot 1$$

$$x = \frac{2520 \cdot 1}{9}$$

$$x = 280$$



Desarrollo sostenible

Para tener relaciones positivas con los demás no es necesario parecerse, sino respetarse.

Debo ser consciente de que mi libertad termina donde inicia la del otro.

¿Sabías qué...?

La mayoría de los países del mundo adoptaron el Sistema Internacional de unidades de manera oficial, y la excepción más importante es Estados Unidos.

Esta es una de las razones por las que el 11 de diciembre de 2007 se promulgó la Ley n° 52, que estableció como sistema nacional de unidades el SI y creó el Consejo Nacional de Metrología para lograr la uniformidad de aplicación en las actividades económicas, los servicios públicos, la salud, la seguridad pública, los actos jurídicos y las actividades administrativas.

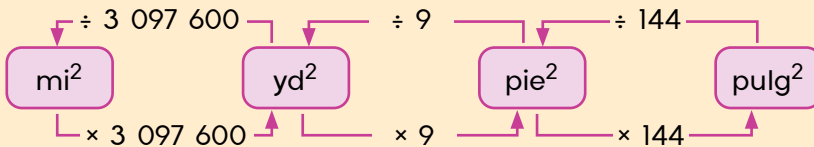
Conversión de unidades de superficie en el Sistema Inglés

Para realizar conversiones se utilizan las siguientes equivalencias:

Equivalencias	
1 pie ²	144 pulg ²
1 yd ²	9 pie ²
1 yd ²	1296 pulg ²
1 mi ²	3 097 600 yd ²

- Para convertir de una **menor a una mayor**, se **divide** entre el valor correspondiente.
- Para convertir de una unidad **mayor a una menor** se **multiplica** por los valores correspondientes.

Lo anterior se resume así:



Observa cómo se hace

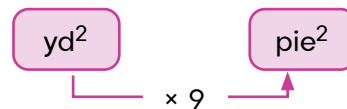
Observa de qué manera se realizan conversiones en el Sistema Inglés:

1. 7 yd² a pie²

Se desliza a una unidad menor, por lo tanto, se multiplica por 9:

$$7 \times 9 = 63$$

Es decir, 7 yd² = 63 pie².

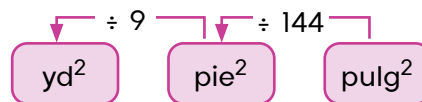


2. 6480 pulg² a yd²

Se desliza 2 veces a unidades mayores, por lo tanto, primero se divide entre 144, luego entre 9:

$$6480 \div 144 = 45 \rightarrow 45 \div 9 = 5$$

Es decir, 6480 pulg² = 5 yd².



Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Anota las unidades de superficie del sistema inglés ordenadas de menor a mayor y sus respectivas equivalencias con las unidades menores.

2. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.
- Observa los ejemplos.

Equivalencias			
mi ²	yd ²	pie ²	pulg ²
1	$1 \cdot 3\,097\,600 = 3\,097\,600$	$3\,097\,600 \cdot 9 = 27\,878\,400$	$27\,878\,400 \cdot 144 = 4\,014\,489\,600$
4			
$6\,195\,200 \div 3\,097\,600 = 2$	$55\,756\,800 \div 9 = 6\,195\,200$	$8\,028\,979\,200 \div 144 = 55\,756\,800$	8 028 979 200
			12 043 468 800

3. Calcula las equivalencias en tu cuaderno.

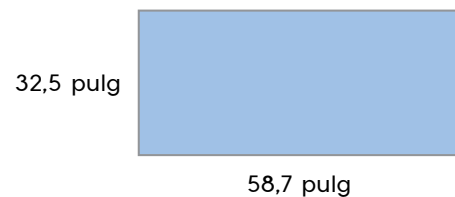
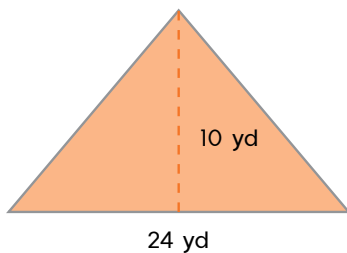
- a. $8,1 \text{ yd}^2 = \dots\dots\dots \text{ pulg}^2$ b. $749\,995,2 \text{ pulg}^2 = \dots\dots\dots \text{ yd}^2$
 c. $1\,548\,800 \text{ yd}^2 = \dots\dots\dots \text{ mi}^2$ d. $929\,280 \text{ yd}^2 = \dots\dots\dots \text{ mi}^2$
 e. $0,005 \text{ mi}^2 = \dots\dots\dots \text{ yd}^2$ f. $20 \text{ pie}^2 = \dots\dots\dots \text{ pulg}^2$
 g. $14,4 \text{ yd}^2 = \dots\dots\dots \text{ pie}^2$ h. $297,9 \text{ pie}^2 = \dots\dots\dots \text{ yd}^2$
 i. $7 \text{ pie}^2 = \dots\dots\dots \text{ pulg}^2$ j. $12\,034,08 \text{ pulg}^2 = \dots\dots\dots \text{ pie}^2$

4. Escribe el símbolo $>$, $<$ o $=$ según corresponde.

- a. $1 \text{ pie}^2 \dots\dots\dots 1 \text{ pulg}^2$ b. $100 \text{ yd}^2 \dots\dots\dots 900 \text{ pie}^2$
 c. $2 \text{ pulg}^2 \dots\dots\dots 2 \text{ yd}^2$ d. $1440 \text{ pulg}^2 \dots\dots\dots 9,5 \text{ pie}^2$
 e. $25 \text{ mi}^2 \dots\dots\dots 25 \text{ pie}^2$ f. $18\,000 \text{ pie}^2 \dots\dots\dots 2000 \text{ yd}^2$
 g. $20 \text{ pie}^2 \dots\dots\dots 3000 \text{ pulg}^2$ h. $9072 \text{ pulg}^2 \dots\dots\dots 7,85 \text{ yd}^2$

5. Anota el área de las siguientes figuras en pies cuadrados.

- a. $A = \dots\dots\dots \text{ pie}^2$ b. $A \approx \dots\dots\dots \text{ pie}^2$



6. Andrés tiene una finca de $557\,568\,000 \text{ pie}^2$. Si destinó $\frac{2}{5}$ del total en la siembra de porotos y $\frac{1}{2}$ de lo que quedó en papas, ¿cuántas millas cuadradas sembró de porotos?, ¿y de papas?

Problema

Marta investigó sobre las áreas protegidas en el país, las ordenó según el año en que se declararon protegidas y resumió algunas de sus características en la siguiente tabla:

Declaratoria	Área protegida	Superficie (km ²)	Superficie (mi ²)	Localización
1972	Alto Darién	2163,9		Darién
1980	Darién	5790		Darién
1983	Palo Seco	2440		Bocas del Toro
1984	Chagres		506,8	Panamá y Colón
1988	La Amistad		831,00	Bocas del Toro y Chiriquí
1991	Coiba		1042,97	Veraguas

Realiza las siguientes actividades:

- Completa la tabla con los datos faltantes. (**Pista:** 1 mi² = 2,59 km²).
- Ordena las áreas protegidas de mayor a menor según su superficie.
- Contesta:
 - ¿Cuál es la diferencia, en años, entre la declaratoria del área protegida de mayor superficie y la de menor superficie?
 - ¿Cuál es la superficie protegida en metros cuadrados, por las tres áreas de mayor superficie?

Solución

- Como 1 mi² = 2,59 km², entonces se emplea una regla de 3 para pasar de kilómetros cuadrados a millas cuadradas, así:

$$\bullet \text{ Alto Darién: } \frac{x \text{ mi}^2}{2163,9 \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{2163,9 \text{ km}^2 \cdot 1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \approx 835,48 \text{ mi}^2$$

$$\bullet \text{ Darién: } \frac{x \text{ mi}^2}{5790 \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{5790 \text{ km}^2 \cdot 1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \approx 2235,52 \text{ mi}^2$$

$$\bullet \text{ Palo Seco: } \frac{x \text{ mi}^2}{2440 \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{2440 \text{ km}^2 \cdot 1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \approx 942,08 \text{ mi}^2$$

$$\bullet \text{ Chagres: } \frac{506,8 \text{ mi}^2}{x \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{506,8 \text{ mi}^2 \cdot 2,59 \text{ km}^2}{1 \text{ mi}^2} \approx 1312,6 \text{ km}^2$$

$$\bullet \text{ La Amistad: } \frac{831 \text{ mi}^2}{x \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{831 \text{ mi}^2 \cdot 2,59 \text{ km}^2}{1 \text{ mi}^2} \approx 2152,3 \text{ km}^2$$

$$\bullet \text{ Coiba: } \frac{1042,97 \text{ mi}^2}{x \text{ km}^2} = \frac{1 \text{ mi}^2}{2,59 \text{ km}^2} \rightarrow x = \frac{1042,97 \text{ mi}^2 \cdot 2,59 \text{ km}^2}{1 \text{ mi}^2} \approx 2701,3 \text{ km}^2$$

La tabla se completa así:

Declaratoria	Área protegida	Superficie (km ²)	Superficie (mi ²)	Localización
1972	Alto Darién	2163,9	835,48	Darién
1980	Darién	5790	2235,52	Darién
1983	Palo Seco	2440	942,08	Bocas del Toro
1984	Chagres	1312,6	506,8	Panamá y Colón
1988	La Amistad	2152,3	831,00	Bocas del Toro y Chiriquí
1991	Coiba	2701,3	1042,97	Veraguas

- Las áreas protegidas ordenadas de mayor a menor según su superficie son:
Darién → Coiba → Palo Seco → Alto Darién → La Amistad → Chagres
- Contesta:
 - La diferencia, en años, entre la declaratoria del área protegida de mayor superficie y la de menor superficie es $1980 - 1984 = 4$ años.
 - La superficie protegida en metros cuadrados, por las tres áreas de mayor superficie es:
 $5790 \text{ km}^2 + 2701,3 \text{ km}^2 + 2440 \text{ km}^2 = 10\,931,3 \text{ km}^2 = 10\,931\,300\,000 \text{ m}^2$.

Conclusión

Si se necesita convertir unidades del SI al Sistema Inglés o viceversa se pueden emplear las siguientes equivalencias:

Sistema Inglés	Sistema Internacional
1 pulg ²	6,45 cm ²
1 pie ²	0,093 m ²
1 yd ²	0,836 m ²
1 mi ²	2,59 km ²

Para realizar conversiones usando los datos de la tabla se **multiplica** para convertir del **Sistema Inglés** al **SI** y se **divide** para pasar del **SI** al **Sistema Inglés**.

Observa cómo se hace

Observa de qué manera se realizan ese tipo de conversiones:

1. 80 pie² a m²

Se pasa del Sistema Inglés al SI, por lo que se multiplica: $80 \cdot 0,093 \approx 7,44$.
Por lo tanto, $80 \text{ pie}^2 \approx 7,44 \text{ m}^2$.

2. 525 cm² a pulg²

Se pasa del SI al Sistema Inglés, por lo que se divide: $525 \div 6,45 \approx 81,4$.
Por lo tanto, $525 \text{ cm}^2 \approx 81,4 \text{ pulg}^2$.

3. 421 pie² a dm²

Se convierte primero de pie² a m² y, luego, de m² a dm²:

$$421 \cdot 0,093 \approx 39,15 \text{ m}^2$$

$$39,15 \cdot 100 = 3915 \text{ dm}^2$$

Por lo tanto, 421 pie² \approx 3915 dm².

4. 5 dam² a yd²

Se convierte primero de dam² a m² y, luego, de m² a yd²:

$$5 \cdot 100 = 500 \text{ m}^2$$

$$500 \div 0,836 \approx 598,09 \text{ yd}^2$$

Por lo tanto, 5 dam² \approx 598,09 yd².

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Copia la tabla en el cuaderno y anota las unidades correspondientes a cada sistema con su respectivo símbolo.

Sistema Internacional	Sistema Inglés

2. Calcula las equivalencias.

a. 423,9 yd² \approx cm²

b. 8,5 pulg² \approx dm²

c. 36 yd² \approx m²

d. 6,21 mi² \approx km²

e. 253,52 mi² \approx dam²

f. 7035 m² \approx pie²

g. 425 968 cm² \approx pulg²

h. 897,9 mm² \approx pulg²

i. 4,2 pie² \approx mm²

j. 928 dm² \approx yd²

3. Escribe el símbolo >, < o = según corresponde.

a. 1 mi² 2,59 km²

b. 2412 yd² 2016,43 m²

c. 2 pulg² 6,45 cm²

d. 2817 cm² 430,25 pulg²

e. 18 pulg² 120,1 cm²

f. 31 997 m² 444 424,11 pie²

g. 45 pie² 4 m²

h. 24 198 m² 28 944,97 yd²

4. En el 2019, se crearon dos áreas protegidas: la Reverendo Padre Jesús Héctor Gallego ubicada en Veraguas con una superficie de 784,1 km², y la Isla Boná ubicada en Panamá de 5 740 752,2 yd².

a. ¿Cuál es la diferencia en metros cuadrados entre las superficies de ambas zonas?

b. ¿Cuántas millas cuadradas se protegieron ese año?

1.5 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada medida de la columna izquierda con su respectiva equivalencia de la columna derecha. Indica la letra de la medida y el número que corresponde a la equivalencia. Ejemplo: A → 4.

A. $0,759 \text{ m}^2$

B. 759 m^2

C. $75\ 887\ 000 \text{ m}^2$

D. $7,516\ 925 \text{ m}^2$

E. $14,86 \text{ m}^2$

F. $0,385\ 549 \text{ m}^2$

G. $13,349\ 64 \text{ m}^2$

H. $5\ 801\ 600 \text{ m}^2$

1. $8161,3 \text{ pie}^2$

2. $8,99 \text{ yd}^2$

3. $597,75 \text{ pulg}^2$

4. $759\ 000 \text{ mm}^2$

5. $29,3 \text{ mi}^2$

6. $2,24 \text{ mi}^2$

7. $20\ 697,12 \text{ pulg}^2$

8. $159,75 \text{ pie}^2$

2. Coloca un gancho (✓) en las afirmaciones correctas.

a. $8 \text{ m}^2 = 80\ 000 \text{ cm}^2$

c. $6 \text{ pie}^2 = 844 \text{ pulg}^2$

e. $168,75 \text{ pulg}^2 = 1\ 088,4 \text{ cm}^2$

g. $19,3 \text{ mi}^2 = 49,98 \text{ km}^2$

i. $6 \text{ yd}^2 = 60 \text{ pie}^2$

b. $6 \text{ yd}^2 = 5,02 \text{ m}^2$

d. $25 \text{ hm}^2 = 2500 \text{ m}^2$

f. $4897,3 \text{ pulg}^2 = 3,78 \text{ yd}^2$

h. $1875,45 \text{ pulg}^2 = 8,3 \text{ cm}^2$

j. $3 \text{ mi}^2 = 777\ 000\ 000 \text{ dm}^2$

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Pedro, Marta y Tania comparan el área de sus casas. La casa de Pedro mide $155\ 520 \text{ pulg}^2$, la de Marta 145 yd^2 y la de Tania 1188 pie^2 . ¿Quién tiene la casa de mayor superficie?

b. Andrés investigó sobre la superficie de diferentes escenarios deportivos. Descubrió que la superficie de la cancha de tenis mide 234 yd^2 , la de boxeo 512 pie^2 y la de baloncesto 4200 dm^2 . ¿A cuántos metros cuadrados equivale cada una de ellas?

Unidades de medida de volumen

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno



- Escribe la unidad de medida más indicada para cada situación.
 - Luis calcula la cantidad de agua que necesita al preparar café. _____
 - Lucía determina el espacio de la habitación de su casa. _____
 - Pedro calcula el volumen de un camión cargado con arroz. _____
 - Natalia lavó la piscina de su casa y la llenó con agua. _____
 - Amanda debe comprar la botella más grande de refresco. _____
 - Ángel determina el volumen de una caja de arena. _____

2. Explica, con tus propias palabras, qué es la capacidad de un cuerpo.

3. Anota el nombre de los múltiplos del litro.

- a. _____ b. _____ c. _____

4. Escribe el nombre de los submúltiplos del litro.

- a. _____ b. _____ c. _____

5. Indica el nombre de tres unidades de capacidad del sistema inglés.

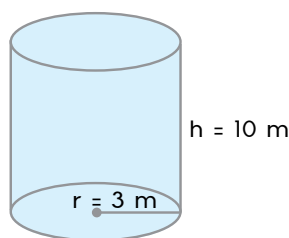
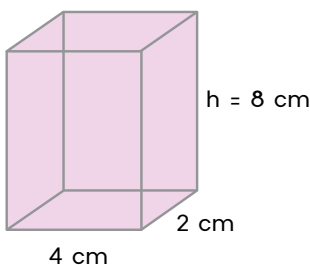
- a. _____ b. _____ c. _____

6. Analiza cada expresión y anota una **V** si es verdadera o **F** si es falsa.

- | | |
|--|---|
| a. <input type="checkbox"/> 1 L = 10 daL | b. <input type="checkbox"/> 10 000 mL = 10 L |
| c. <input type="checkbox"/> 1 km ² = 1 000 000 m ² | d. <input type="checkbox"/> 1 pie ² = 1296 pulg ² |
| e. <input type="checkbox"/> 1 yd ² = 1296 pulg ² | f. <input type="checkbox"/> 1 mi ² = 3 097 600 yd ² |

7. Determina el volumen de las figuras indicadas. (**Pista:** V = Área de la base × altura)

- a. V = _____ b. V = _____



¡Atención!

La base de la figura **a** es un rectángulo y en la figura **b** es un círculo.

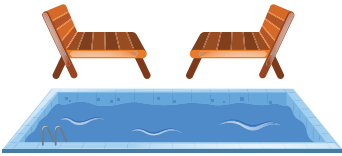
2.2 El volumen en el Sistema Internacional: múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

Problema

Marianela construyó una piscina con forma de prisma en su patio. La piscina tiene una profundidad de 18 dm y su base es un rectángulo cuyos lados miden 60 dm y 45 dm.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos decímetros cúbicos necesita para llenar la piscina?
2. Si la tarifa que paga Marianela es de 4,50 balboas por cada metro cúbico de agua, ¿cuánto dinero pagará por llenarla?
3. Si la estatura de Marianela es de 155 cm, ¿la piscina la cubre o tapa completamente si se encuentra de pie dentro de ella?



Recuerda

En un prisma, la fórmula del volumen es:

$$V = \text{Área basal} \times \text{altura}$$

Además:

$$A_{\text{rectángulo}} = \text{largo} \times \text{ancho}$$

y 1 dm = 10 cm.



¿Sabías qué...?

Al realizar conversiones, si las unidades están:

1. Elevadas al cubo (volumen), se multiplica o se divide entre 10^3 .
2. Elevadas al cuadrado (superficie), se multiplica o se divide entre 10^2 .

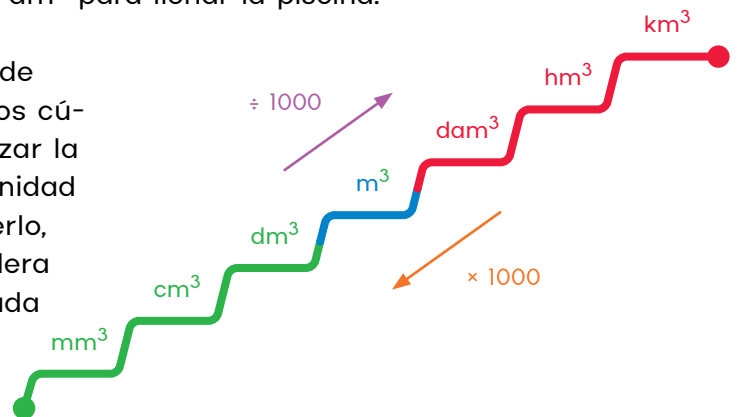
Solución

1. La piscina es un prisma de base rectangular. Para obtener su volumen se utiliza la fórmula $V = \text{Área de la base} \times \text{altura}$, y como la base es un rectángulo, entonces:

$$V = 60 \text{ dm} \cdot 45 \text{ dm} \cdot 18 \text{ dm} = 48\,600 \text{ dm}^3$$

R: Necesita 48 600 dm³ para llenar la piscina.

2. Dado que la tarifa de pago está en metros cúbicos se debe realizar la conversión a esa unidad de medida. Al hacerlo, se utiliza una escalera similar a la empleada anteriormente:



De decímetros cúbicos a metros cúbicos se sube un escalón, por lo que se divide entre 1000. Por lo tanto:

$$48\,600 \text{ dm}^3 \div 1000 = 48,6 \text{ m}^3$$

R: Pagará $48,6 \cdot 4,50 = 218,70$ balboas por llenar la piscina.

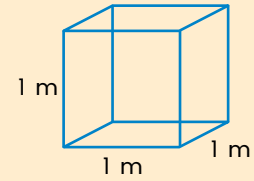
3. La piscina tiene una profundidad de 18 dm = 180 cm y Marianela mide 155 cm. Para saber si la cubre se obtiene la diferencia:

$$180 \text{ cm} - 155 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

R: La piscina la cubrirá completamente.

Conclusión

El **volumen** es el espacio que ocupa un cuerpo. La **unidad base** de volumen en el SI es el **metro cúbico (m^3)**. Un metro cúbico es el volumen de un cubo de arista 1 m.



Al medir valores mayores a un metro cúbico se utilizan múltiplos como:

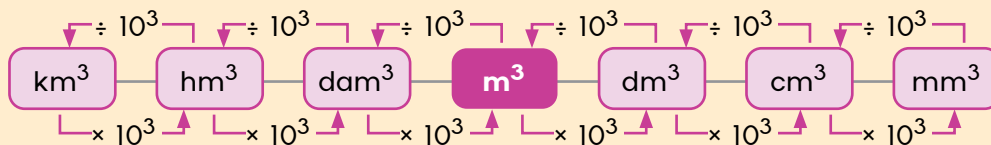
- Decámetro cúbico (dam^3) • Hectómetro cúbico (hm^3) • Kilómetro cúbico (km^3)
- $1 dam^3 = 10^3 m^3 = 1000 m^3$ $1 hm^3 = 10^6 m^3 = 1000\ 000 m^3$ $1 km^3 = 10^9 m^3 = 1\ 000\ 000\ 000 m^3$

Para valores menores al metro cúbico se utilizan submúltiplos como:

- Decímetro cúbico (dm^3) • Centímetro cúbico (cm^3) • Milímetro cúbico (mm^3)
- $1 dm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,001 m^3$ $1 cm^3 = 10^{-6} m^3 = 0,000\ 001 m^3$ $1 mm^3 = 10^{-9} m^3 = 0,000\ 000\ 001 m^3$

Conversión de unidades de volumen en el SI

En el SI, las unidades de volumen inmediatas son 1000 veces mayores o 1000 veces menores. Por ello, al convertir a una unidad mayor se divide entre 1000 o 10^3 tantas veces como espacios se dan de una unidad a otra; o se multiplica por 1000 o 10^3 tantas veces como espacios al convertir a una unidad menor.



Observa cómo se hace

Observa de qué manera se realizan las conversiones:

1. $0,4 km^3$ a m^3

Se desplaza **3** veces a una unidad menor, por lo tanto, se multiplica **tres** veces por 10^3 :

$$0,4 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 0,4 \cdot 10^9 = 400\ 000\ 000 m^3$$

2. $8\ 200\ 000\ 000 cm^3$ a hm^3

Se desplaza **4** veces a una unidad mayor, por lo tanto, se divide entre 10^3 **cuatro** veces y se resuelve la siguiente operación:

$$8\ 200\ 000\ 000 \div (10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3) = 8\ 200\ 000\ 000 \div 10^{12} = 0,0082 m^3$$



Recuerda

Al multiplicar $0,4 \cdot 10^9$ la coma se mueve **9 veces** hacia la derecha.

Al dividir $8\ 200\ 000\ 000$ entre 10^{12} la coma se mueve **12 veces** hacia la izquierda.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe dos situaciones comunes donde se emplean las unidades de volumen.
2. Anota las unidades de volumen del SI ordenadas de menor a mayor.



3. Completa la tabla.

- Observa los ejemplos.

$$10^0 = 1.$$

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
		dam ³	m ³		cm ³	
		$1 \cdot 10^3 = 1000$	$10^0 = 1$		$1 \cdot 10^{-6} = 0,000\ 001$	

4. Calcula las equivalencias en tu cuaderno.

a. $0,009\text{ km}^3 = \dots\dots\dots\text{ dam}^3$

b. $0,000\ 008\text{ m}^3 = \dots\dots\dots\text{ mm}^3$

c. $16\ 000\text{ m}^3 = \dots\dots\dots\text{ hm}^3$

d. $132\ 970\ 000\text{ mm}^3 = \dots\dots\dots\text{ m}^3$

e. $8,1\text{ m}^3 = \dots\dots\dots\text{ dm}^3$

f. $0,480\ 53\text{ dam}^3 = \dots\dots\dots\text{ cm}^3$

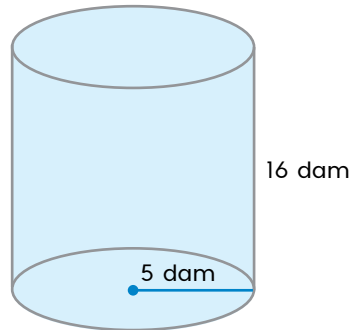
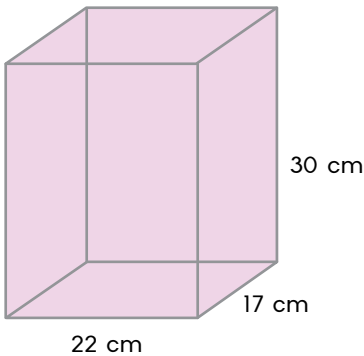
g. $458,7\text{ cm}^3 = \dots\dots\dots\text{ dm}^3$

h. $1\ 725\ 346\text{ cm}^3 = \dots\dots\dots\text{ m}^3$

5. Escribe el volumen de los cuerpos geométricos en metros cúbicos.

a. $V = \dots\dots\dots\text{ m}^3$

b. $V = \dots\dots\dots\text{ m}^3$



Datos interesantes

Volumen y capacidad son distintos:

El **volumen** es el espacio que ocupa un cuerpo, su unidad base es el metro cúbico (m^3).

La **capacidad** es la cantidad, por ejemplo de agua, que un recipiente puede contener, su unidad base es el litro (L).

Un litro es la capacidad de un cubo de 1 dm de arista.

6. Hermes cotiza tanques para depositar agua que colocará en diferentes viviendas. Al investigar, leyó que la Organización Mundial de la Salud (OMS) indica que una persona necesita 100 dm^3 de agua por día para satisfacer sus necesidades físicas y de higiene. Como desea que el tanque provea de agua un día completo a cada familia, investigó las diferentes opciones de tanques en el mercado y la cantidad de miembros por familia.

• **Tanque A:**

Volumen: $725\ 000\text{ cm}^3$

• **Tanque B:**

Volumen: $0,45\text{ m}^3$

• **Tanque C:**

Volumen: $0,0003\text{ dam}^3$

Si la familia González tiene 2 miembros; la familia Rodríguez, 4 miembros y la familia Moreno 7, ¿cuál tanque le conviene a cada familia?

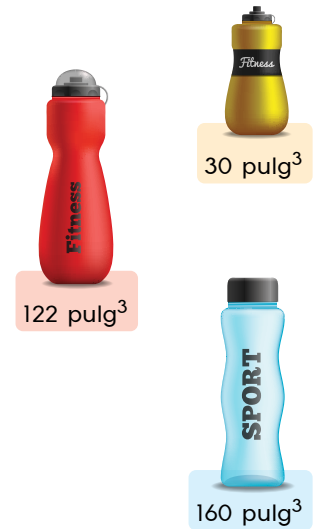
2.3 El volumen en el Sistema Inglés

Problema

Kattia comprará una botella para agua. Como la nutricionista le recomendó consumir como mínimo $0,07 \text{ pie}^3$ de agua al día, comprará una botella que contenga al menos esa cantidad.

Responde las siguientes preguntas:

1. Si $1728 \text{ pulg}^3 = 1 \text{ pie}^3$, ¿cuál es el volumen de agua que debe consumir Kattia diariamente en pulgadas cúbicas?
2. ¿Cuál de las botellas del lado le conviene comprar?



Solución

1. Se emplea una regla de 3 para pasar de pies cúbicos a pulgadas cúbicas, así:

$$\frac{0,07 \text{ pie}^3}{x \text{ pulg}^3} = \frac{1 \text{ pie}^3}{1728 \text{ pulg}^3}$$

Al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{0,07 \text{ pie}^3 \cdot 1728 \text{ pulg}^3}{1 \text{ pie}^3} = 120,96 \text{ pulg}^3 \approx 121 \text{ pulg}^3$$

R: Debe consumir aproximadamente 121 pulg^3 .

2. Le conviene comprar la botella de 122 pulg^3 pues es la que más se aproxima a su consumo diario.

Conclusión

Otro sistema que se utiliza para medir el volumen es el Sistema Inglés. Algunas de sus unidades y sus símbolos son:

Unidad	Símbolo	Símbolo en inglés
Pulgada cúbica	pulg^3	in^3
Pie cúbico	pie^3	ft^3
Yarda cúbica	yd^3	yd^3



Recuerda

Al colocar los elementos de una proporción se deben colocar las mismas unidades como numerador y las mismas unidades como denominador. Ejemplo:

$$\frac{0,7 \text{ pie}^3}{x \text{ pulg}^3} = \frac{1 \text{ pie}^3}{1728 \text{ pulg}^3}$$



Desarrollo sostenible

La educación moderna tiene como propósito desarrollar competencias en el estudiantado, es decir, la capacidad de ejecutar acciones, de desempeñarse con éxito en diversas tareas.

La educación es para planificar en la vida de mejor manera, para resolver los problemas del día a día, por ello, la competencia matemática es cada vez más necesaria para lograrlo.

Pregúntate: ¿cuáles son mis competencias más fuertes?, ¿cuáles competencias me conviene mejorar?

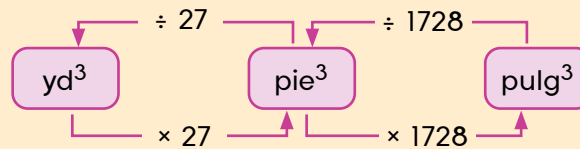
Conversión de unidades de volumen en el Sistema Inglés

Para realizar conversiones se utilizan las siguientes equivalencias:

Equivalencias	
1 pie ³	1728 pulg ³
1 pulg ³	0,000579 pie ³
1 yd ³	27 pie ³

- Para convertir de una **unidad menor a una mayor**, se **divide** entre el valor correspondiente.
- Para convertir de una unidad **mayor a una menor** se **multiplica** por los valores correspondientes.

Lo anterior se resume así:



Observa cómo se hace

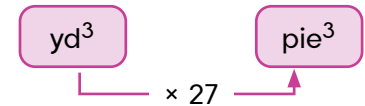
Observa de qué manera se realizan conversiones en el Sistema Inglés:

1. 15 yd³ a pie³

Se desplaza a una unidad menor, por lo tanto, se multiplica por 27:

$$15 \times 27 = 405$$

Es decir, $15 yd^3 = 405 pie^3$.

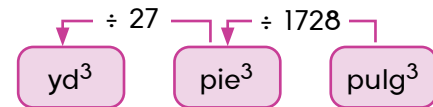


2. 419 904 pulg³ a yd³

Se desplaza 2 veces a unidades mayores, por lo tanto, primero se divide entre 1728, luego entre 27:

$$419\,904 \div 1728 = 243 \rightarrow 243 \div 27 = 9.$$

Es decir, $419\,904 pulg^3 = 9 yd^3$.



Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Anota las unidades de superficie del Sistema Inglés ordenadas de menor a mayor y sus respectivas equivalencias.

2. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

- Observa los ejemplos.

Equivalencias		
yd ²	pie ²	pulg ²
4,05	$4,05 \cdot 27 = 109,35$	$109,35 \cdot 1728 = 188\ 956,8$
17		
$438,75 \div 27 = 16,25$	$758\ 160 \div 1728 = 438,75$	758 160
		32 417 280 124
	1452	
	27 401	

3. Calcula las equivalencias.

- a. $6\text{ yd}^3 \approx$ pulg³ b. $245\ 158,3\text{ pulg}^3 \approx$ yd³
- c. $15,9\text{ yd}^3 \approx$ pie³ d. $357\ 895\text{ pulg}^3 \approx$ yd³
- e. $158\text{ pie}^3 \approx$ pulg³ f. $2569\text{ pie}^3 \approx$ yd³
- g. $849\ 151\text{ pie}^3 \approx$ yd³ h. $15\ 057\text{ pie}^3 \approx$ pulg³
- i. $8134,75\text{ pulg}^3 \approx$ pie³ j. $4,08\text{ yd}^3 \approx$ pulg³

4. Escribe el símbolo >, < o = según corresponda.

- a. $10,75\text{ pie}^3$ $16\ 457\text{ pulg}^3$ b. $0,08\text{ yd}^3$ 3 pie^3
- c. $89\ 278\text{ pulg}^3$ 2 yd^3 d. 8740 pulg^3 5 pie^3
- e. 5 yd^3 135 pie^3 f. 8991 pie^3 333 yd^3
- g. 23 pie^3 $40\ 000\text{ pulg}^3$ h. $158\ 060\text{ pulg}^3$ 4 yd^3

5. María tiene un tanque para peces de 9150 pulg^3 . Si desea ampliarlo hasta 15 pie^3 , ¿de cuántos pies cúbicos es la ampliación?

6. Fabián construyó en su finca un tanque para almacenar agua de $3,5\text{ yd}^3$ con el fin de solventar las necesidades de la finca durante la época seca. Si utiliza $\frac{4}{7}$ del total en el riego de sus cultivos, $\frac{2}{14}$ en el lavado de las legumbres y el resto en el lavado del equipo y la maquinaria, ¿cuántas pulgadas cúbicas de agua utiliza en cada evento?

2.4 Conversión de unidades de medida de volumen entre el SI y el Sistema Inglés



Recuerda

Una razón es la división entre dos magnitudes **a** y **b**. Esta razón se puede expresar de dos formas:

$$a : b \quad \text{o} \quad \frac{a}{b}$$

Se lee "**a** es a **b**".

Problema

Patricia debe clorar el agua de su piscina. Un profesional le indicó que por cada 10 m^3 de agua deben colocarse $122,05 \text{ pulg}^3$ de cloro.

Realice las siguientes actividades:

1. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de agua y la cantidad de cloro? ¿Cuál es su significado? (**Pista:** $1 \text{ pulg}^3 = 16,387 \text{ cm}^3$)
2. Si la piscina de Patricia es de $50\,000 \text{ dm}^3$, ¿cuántas pulgadas cúbicas de cloro debe agregar?

Solución

1. Para obtener la razón entre la cantidad de agua y la cantidad de cloro, ambas deben expresarse en una misma unidad de medida. Como $1 \text{ pulg}^3 = 16,387 \text{ cm}^3$ entonces se emplea una regla de tres para obtener la equivalencia en centímetros cúbicos del cloro:

Cloro:

$$\frac{x \text{ cm}^3}{122,05 \text{ pulg}^3} = \frac{16,387 \text{ cm}^3}{1 \text{ pulg}^3} \rightarrow x = \frac{122,05 \text{ pulg}^3 \cdot 16,387 \text{ cm}^3}{1 \text{ pulg}^3} \approx 2000 \text{ cm}^3$$

Para obtener la misma unidad se convierte 10 m^3 a cm^3 :

$$10 \text{ m}^3 = 10 \cdot 10^6 = 10\,000\,000 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, la razón entre la cantidad de agua y de cloro es

$$\frac{10\,000\,000 \text{ cm}^3}{2000 \text{ cm}^3} = \frac{5000}{1} = 5000$$

R: Como la razón es $5000 : 1$, implica que por cada 5000 cm^3 de agua se debe depositar 1 cm^3 de cloro.

2. Como la piscina de Patricia es de $50\,000 \text{ dm}^3$, para obtener la cantidad de cloro se convierte $50\,000 \text{ dm}^3$ a cm^3 .

$$50\,000 \text{ dm}^3 = 50\,000 \cdot 10^3 = 50\,000\,000 \text{ cm}^3$$

Para obtener la cantidad de cloro se divide la cantidad obtenida anteriormente entre 5000, así:

$$50\,000\,000 \div 5000 = 10\,000 \text{ cm}^3$$

Luego, se expresa $10\,000 \text{ cm}^3$ en pulg^3 para dar respuesta:

$$\frac{10\,000 \text{ cm}^3}{x \text{ pulg}^3} = \frac{16,387 \text{ cm}^3}{1 \text{ pulg}^3} \rightarrow x = \frac{10\,000 \text{ cm}^3 \cdot 1 \text{ pulg}^3}{16,387 \text{ cm}^3} \approx 610,24 \text{ pulg}^3$$

R: Se deben agregar aproximadamente $610,24 \text{ pulg}^3$.



Trabajo colaborativo

Forma grupos y elaboren tablas donde resuman las unidades de medida de volumen:

1. Medidas del SI y al lado su equivalente con el m^3 .
2. Medidas del Sistema Inglés y al lado su equivalente con el pie^3 .
3. Medidas del Sistema Inglés y al lado su equivalente a las unidades del SI.

Conclusión

Para convertir unidades del SI al Sistema Inglés o viceversa se usan las siguientes equivalencias:

Sistema Inglés	Sistema Internacional
1 pulg ³	16,387 cm ³
1 pie ³	28,316 dm ³
1 yd ³	0,765 m ³

Para realizar conversiones usando los datos de la tabla se **multiplica** para convertir del **Sistema Inglés** al **SI** y se **divide** para pasar del **SI** al **Sistema Inglés**.

¿Qué pasaría?

Al convertir 135 pie³ a m³ también se puede convertir primero de pie³ a yd³ y, luego, de yd³ a m³:
 $135 \div 27 = 5 \text{ yd}^3$
 $5 \cdot 0,765 \approx 3,82 \text{ m}^3$

Observa cómo se hace

Observa de qué manera se realizan ese tipo de conversiones:

1. 135 pie³ a m³

Se convierte primero de pie³ a dm³ y, luego, de dm³ a m³:
 $135 \cdot 28,316 \approx 3822,66 \text{ dm}^3$
 $3822,66 \div 10^3 = 3,822 \text{ 66 m}^3$

Por lo tanto:
 $135 \text{ pie}^3 \approx 3,82 \text{ m}^3$.

2. 12,5 dam³ a yd³

Se convierte primero de dam³ a m³ y, luego, de m³ a yd³:
 $12,5 \cdot 10^3 = 12 \text{ 500 m}^3$
 $12 \text{ 500} \div 0,765 \approx 16 \text{ 339,87 yd}^3$

Por lo tanto:
 $12,5 \text{ dam}^3 \approx 16 \text{ 339,87 yd}^3$.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Calcula las equivalencias.

- | | |
|---|--|
| a. 2,9 yd ³ ≈ _____ m ³ | b. 4,025 dam ³ ≈ _____ yd ³ |
| c. 7,6 yd ³ ≈ _____ dm ³ | d. 425 150 mm ³ ≈ _____ pulg ³ |
| e. 159,25 pulg ³ ≈ _____ cm ³ | f. 137,69 dm ³ ≈ _____ pie ³ |
| g. 359 000 pulg ³ ≈ _____ m ³ | h. 82,64 m ³ ≈ _____ pie ³ |
| i. 0,7 pie ³ ≈ _____ dm ³ | j. 6 hm ³ ≈ _____ yd ³ |
| k. 1,58 pulg ³ ≈ _____ mm ³ | l. 654 200 mm ³ ≈ _____ pulg ³ |
| m. 640 000 000 pie ³ ≈ _____ hm ³ | n. 275,6 dm ³ ≈ _____ pulg ³ |

2. Escribe el símbolo $>$, $<$ o $=$ según corresponde.

a. 153 m^3 200 yd^3

b. 1562 cm^3 $92,5 \text{ pulg}^3$

c. $8,7 \text{ pulg}^3$ 140 cm^3

d. $359,89 \text{ m}^3$ 1800 pie^3

e. 26 pulg^3 432 cm^3

f. $257\,750\,000 \text{ mm}^3$ 3 yd^3

g. 73 pie^3 $1,5 \text{ m}^3$

h. $141,58 \text{ dm}^3$ 5 pie^3

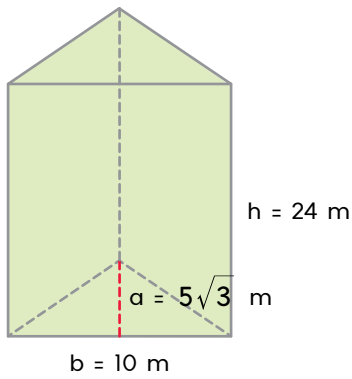
i. $32,774 \text{ cm}^3$ 2 pulg^3

j. 2577 mm^3 1 pulg^3

3. Calcula el volumen de cada cuerpo geométrico. Escribe en el cuaderno su equivalencia en las unidades indicadas.

- Usa las fórmulas indicadas.

a.



$V \approx$ m^3

$V \approx$ dm^3

$V \approx$ yd^3



¡Atención!

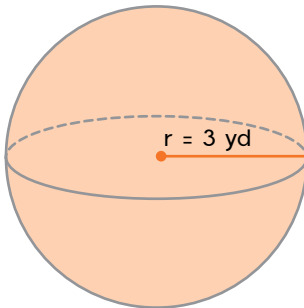
Utiliza las siguientes fórmulas:

Prisma triangular: $V = \frac{a b h}{2}$

Esfera: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Cilindro: $V = \pi r^2 h$

b.

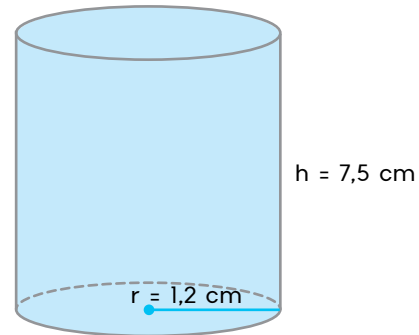


$V \approx$ yd^3

$V \approx$ m^3

$V \approx$ pie^3

c.



$V \approx$ cm^3

$V \approx$ dm^3

$V \approx$ pulg^3

4. Mariano compró un tanque para agua de 30 yd^3 . Si ayer depositó $46\,656 \text{ pulg}^3$ y hoy 648 pie^3 , ¿cuántos metros cúbicos le faltan por llenar?

2.5 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada medida de la columna izquierda con su respectiva equivalencia de la columna derecha. Indica la letra de la medida y el número que corresponde a la equivalencia. Ejemplo: A → 3.

A. $0,000\ 258\ 45\ \text{m}^3$

B. $12\ \text{m}^3$

C. $2\ 000\ 000\ \text{m}^3$

D. $0,75\ \text{m}^3$

E. $0,118\ 93\ \text{m}^3$

F. $12,94\ \text{m}^3$

G. $43,83\ \text{m}^3$

H. $7000\ \text{m}^3$

1. $26,48\ \text{pie}^3$

2. $9150,33\ \text{yd}^3$

3. $258,45\ \text{cm}^3$

4. $789\ 600\ \text{pulg}^3$

5. $2\ 614\ 379,1\ \text{yd}^3$

6. $57,3\ \text{yd}^3$

7. $732\ 287,79\ \text{pulg}^3$

8. $4,2\ \text{pie}^3$

2. Coloca un gancho (✓) en las afirmaciones correctas.

a. $6\ \text{m}^3 = 6000\ \text{dm}^3$

c. $4\ \text{pie}^3 = 6912\ \text{pulg}^3$

e. $300,5\ \text{pulg}^3 = 5300\ \text{cm}^3$

g. $219,6\ \text{m}^3 = 0,2196\ \text{dam}^3$

i. $2,5\ \text{yd}^3 = 60,4\ \text{pie}^3$

b. $2\ \text{yd}^3 = 1,02\ \text{m}^3$

d. $0,5\ \text{dam}^3 = 653,59\ \text{yd}^3$

f. $604,25\ \text{pulg}^3 = 0,0129\ \text{yd}^3$

h. $428\ \text{pulg}^3 = 70,13\ \text{cm}^3$

j. $3\ \text{m}^3 = 105,94\ \text{pie}^3$

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Las dimensiones de un depósito de agua con forma de prisma rectangular son 12m, 8 m y 15 m. ¿Cuántas yardas cúbicas podrá contener?

b. Nancy depositó $27\ \text{yd}^3$ de agua en un recipiente cilíndrico. Si el radio del cilindro es 3 m, ¿qué altura alcanzará el agua?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante el trimestre. Utiliza la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico las unidades de medida de superficie en el SI.			
2. Comparo correctamente las unidades de medida de superficie del SI.			
3. Convierto de múltiplos a submúltiplos de unidades de medida de superficie y viceversa en el SI.			
4. Resuelvo problemas prácticos de la vida cotidiana con medidas de superficie en el SI.			
5. Propongo situaciones que utilizan las medidas de superficie del SI.			
6. Identifico las unidades de medida de volumen en el Sistema Inglés.			
7. Comparo correctamente las unidades de medida de superficie del Sistema Inglés.			
8. Convierto unidades de volumen en el Sistema Inglés.			
9. Resuelvo problemas prácticos de la vida cotidiana con medidas de superficie en el Sistema Inglés.			
10. Comparo con los signos de relación las unidades de medidas de volumen.			
11. Convierto una unidad de medida de volumen del SI en otra, y del SI al Sistema Inglés y viceversa.			
12. Resuelvo problemas con medidas de volumen en el SI utilizando las operaciones y conversiones.			

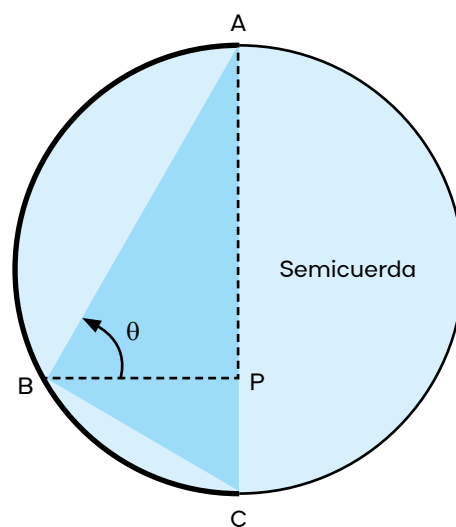
Unidad 4

Geometría

Algunas civilizaciones antiguas utilizaron la astronomía para predecir los periodos de abundancia de la caza, la siembra o la llegada del invierno.

El matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo (siglo II) realizó, en el tratado astronómico *Almagesto*, una descripción matemática del sistema geocéntrico (en el cual los planetas giran alrededor de la Tierra). Uno de sus aportes a la matemática fue un teorema sobre cuadriláteros cíclicos (figuras de 4 lados cuyos vértices pertenecen a una circunferencia), en el que se utilizan propiedades importantes de ángulo inscrito.

Por otra parte, la trigonometría, que estudia la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo, se desarrolló por los estudios astronómicos. Los matemáticos indios Varahamihira (siglo VI) y Brahmagupta (siglo VII) formularon varias propiedades trigonométricas utilizando la semicuerda (un triángulo inscrito en el círculo con un lado como diámetro del círculo) y los cuadriláteros cíclicos que tienen como base el estudio de los ángulos inscritos.



El ángulo ABC es recto y está inscrito en la circunferencia (su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son secantes a ella). Por medio de esta construcción se obtuvieron relaciones importantes.

En esta unidad aprenderás a...

- Identificar la diferencia entre una circunferencia y un círculo a través de su definición.
- Trazar con precisión los elementos de la circunferencia y el círculo utilizando el juego de geometría.
- Trazar con seguridad ángulos en una circunferencia utilizando el juego de geometría.
- Distinguir los tipos de ángulos inscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.
- Determinar las medidas de ángulos inscritos cuyo ángulo central está al interior del ángulo inscrito y viceversa.
- Identificar correctamente los poliedros regulares.
- Describir con precisión los poliedros regulares.
- Construir con creatividad poliedros regulares.
- Utilizar la fórmula para calcular el área de las caras de un poliedro regular.
- Resolver problemas relacionados con el área de las caras de un poliedro.

El círculo y la circunferencia

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno



Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

- La expresión $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ implica que
 - \overline{AB} tiene igual medida que \overline{CD} .
 - \overline{AB} y \overline{CD} son paralelos.
 - \overline{AB} y \overline{CD} representan la misma recta.
 - \overline{AB} y \overline{CD} son perpendiculares.
- La expresión $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ implica que
 - \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} son paralelas.
 - \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} son congruentes.
 - \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} son perpendiculares.
 - \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} representan la misma recta.
- La expresión $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ implica necesariamente que
 - $\sphericalangle ABC$ tiene igual medida que $\sphericalangle DEF$.
 - $\sphericalangle ABC$ biseca a $\sphericalangle DEF$.
 - $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DEF$ comparten un lado.
 - $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DEF$ miden 90° .
- Un polígono es regular si
 - tiene todos sus lados y sus ángulos de diferente medida.
 - tiene todos sus lados y sus ángulos de igual medida entre sí.
 - tiene todos sus ángulos de igual medida y sus lados de diferente medida.
 - tiene todos sus lados de igual medida y sus ángulos de diferente medida.

Dibuja los siguientes triángulos y cuadriláteros en el cuaderno. Usa la regla y el compás.

-
-
-
-

1.2 Elementos del círculo y la circunferencia

Problema

Marcia y Tania decidieron aprovechar los cartones blancos circulares que su mamá desechó para construir un adorno para su cuarto. Marcia decidió decorar solamente la orilla, Tania decoró la orilla y pintó su interior.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál figura decoró cada joven?

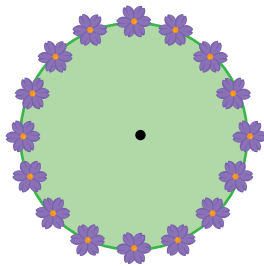


Figura A

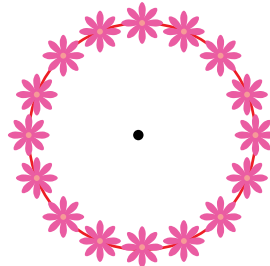


Figura B

2. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las figuras anteriores?
3. ¿Con cuáles conceptos geométricos se relacionan?
4. Marcia midió la distancia desde el centro a la orilla y obtuvo como resultado 30 cm, ¿cuántos decímetros miden el radio y el diámetro?

Solución

1. Marcia decoró solo la orilla y Tania la orilla y su interior. Es decir:

Decoración de Marcia:  Decoración de Tania: 

R: Marcia decoró la figura B y Tania la figura A.

2. Las figuras anteriores se parecen en que ambas son circulares. Se diferencian en que la figura de Marcia corresponde únicamente al contorno, mientras que la de Tania incluye el contorno y su interior.
3. Una circunferencia es una línea curva cerrada, formada por todos los puntos que se encuentran a igual distancia de un punto llamado centro. El círculo está formado por la circunferencia y su interior.
R: La figura de Marcia se relaciona con la circunferencia y la de Tania con el círculo.
4. La medición de Marcia corresponde al radio del círculo. Como 30 cm equivale a 3 dm, entonces el radio mide 3 dm y el diámetro, 6 dm.



Desarrollo sostenible

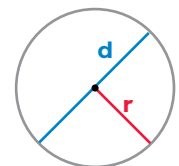
El reciclaje y la reutilización de materiales son herramientas que nos permiten generar menos desechos.

Sin embargo, la mayor diferencia se da si aprendemos a comprar únicamente lo que necesitamos.



Recuerda

El radio y el diámetro están relacionados: el radio mide la mitad del diámetro.



¿Sabías qué...?

Es importante reconocer cada representación geométrica.

Por ejemplo:

- A : corresponde al punto A .
- \overline{AB} : segmento cuyos extremos son A y B .
- \overleftrightarrow{AB} : recta que contiene los puntos A y B .
- \widehat{AB} : arco cuyos extremos son A y B .
- $\angle ABC$: ángulo cuyo vértice es el punto B .



Recuerda

La longitud de la circunferencia se obtiene con la fórmula:

$$C = 2\pi r$$

El área con la fórmula:

$$A = \pi r^2$$

Conclusión

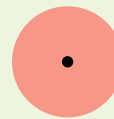
El lugar geométrico de todos los puntos que se ubican a igual distancia de un punto llamado **centro**, se denomina **circunferencia**.

La superficie formada por la circunferencia y todos los puntos que se encuentran en su interior se denomina **círculo**.

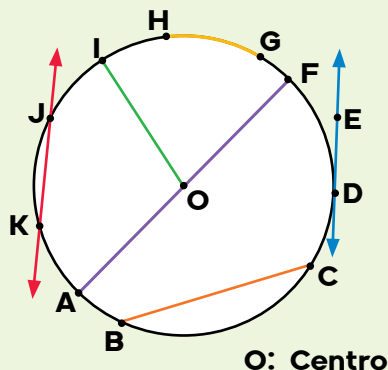
Circunferencia



Círculo



Alguno de los elementos del círculo son:



Diámetro (\overline{AF}): segmento que contiene al centro y 2 puntos de la circunferencia. Mide el doble del radio.

Radio (\overline{OI}): segmento cuyos extremos son el centro y un punto de la circunferencia. Mide la mitad del diámetro.

Cuerda (\overline{BC}): segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia.

Recta tangente (\overleftrightarrow{DE}): recta que interseca la circunferencia en un único punto, además, es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

Recta secante (\overleftrightarrow{JK}): recta que interseca la circunferencia en dos puntos distintos.

Arco (\widehat{GH}): es la parte de la circunferencia que se encuentra entre dos puntos de esta.

Semicircunferencia (\widehat{AF}): es el arco que corresponde a la mitad de la circunferencia.

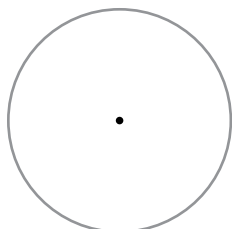
Práctica

Trabaja en
tu cuaderno

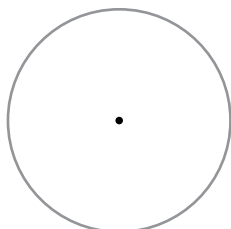


1. Dibuja las circunferencias en el cuaderno y representa los elementos indicados.

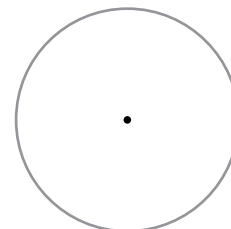
a. El diámetro \overline{AB} , el radio \overline{HK} y la cuerda \overline{BK}



b. La recta tangente \overleftrightarrow{XY} y la recta secante \overleftrightarrow{XD}



c. El arco \widehat{JK} y la semicircunferencia \widehat{PK}



2. Asocia cada término de la columna izquierda con su respectiva definición de la columna derecha. Indica la letra del término y el número que corresponde a su definición. Ejemplo: A → 3.

A. Centro	1. Cuerda que contiene al centro.
B. Círculo	2. Interseca la circunferencia en un único punto.
C. Radio	3. Punto central del círculo.
D. Diámetro	4. Sus extremos son puntos de la circunferencia.
E. Cuerda	5. Corresponde a la mitad de la circunferencia.
F. Semicircunferencia	6. Superficie delimitada por una curva cerrada.
G. Recta secante	7. Interseca la circunferencia en dos puntos distintos.
H. Circunferencia	8. Mide la mitad del diámetro.
I. Recta tangente	9. Curva cerrada que delimita al círculo.

3. Anota en el cuaderno una **V** si la proposición es verdadera o **F** si es falsa. Justifica la respuesta.

- a. La cuerda de mayor longitud es el diámetro.
Justificación:
- b. Las rectas secantes a una circunferencia contienen solo dos puntos del círculo.
Justificación:
- c. Todas las semicircunferencias de un círculo tienen igual medida.
Justificación:
- d. Las rectas tangentes a una circunferencia contienen un único punto del círculo.
Justificación:
- e. Toda cuerda es una semicircunferencia.
Justificación:

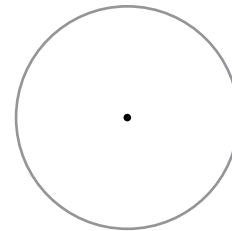
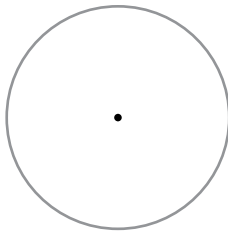
4. Fernanda sumó el diámetro y 3 radios de una circunferencia y obtuvo como resultado 80 cm. ¿Cuándo mide el radio y el diámetro de esa circunferencia?
5. Determina el área y la longitud de la circunferencia de un círculo de diámetro 28 yd.
6. Calcula la longitud de una semicircunferencia si su área es de 25π m²?

1.3 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

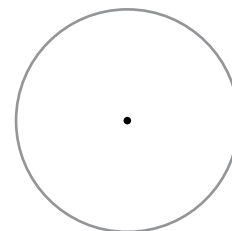
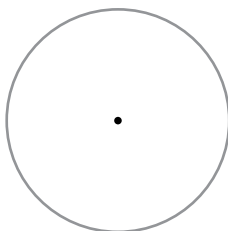
Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera?
 - Todos los radios de una circunferencia son congruentes.
 - Todas las cuerdas de una circunferencia son congruentes.
 - La recta secante interseca la circunferencia en un único punto.
 - El diámetro mide la mitad del radio.
- Si la suma del diámetro y 2 radios da como resultado 28 cm. La medida de su radio y su diámetro corresponden respectivamente
 - 7 y 14.
 - 14 y 28.
 - 14 y 7.
 - 28 y 14.
- Si la longitud de una semicircunferencia es 12π mm, entonces la circunferencia mide
 - 3π mm.
 - 12π mm.
 - 6π mm.
 - 24π mm.
- La expresión que representa el área de un círculo de diámetro $2\sqrt{3}$ dm.
 - 3π dm.
 - $4\sqrt{3}\pi$ dm.
 - 12π dm.
 - $2\sqrt{3}\pi$ dm.
- Dibuja las circunferencias en el cuaderno y representa los elementos indicados.
 - Una recta tangente y un radio perpendicular en el punto de tangencia.
 - Una cuerda y un radio que tengan un punto en común.



- La cuerda de mayor longitud y una cuerda secante a ella.

- Una recta tangente perpendicular a una recta secante.



Ángulos en el círculo

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

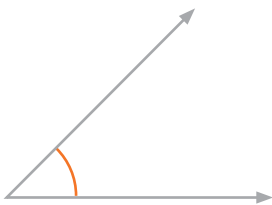


Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

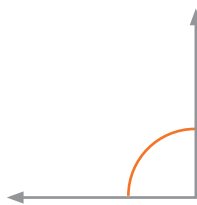
- Los ángulos 56° , 90° y 147° se clasifican respectivamente en
 - obtuso, recto y agudo.
 - agudo, recto y obtuso.
 - recto, agudo y obtuso.
 - agudo, obtuso y recto.
- Sean los ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DBF$ opuestos por el vértice. Si $m \sphericalangle ABC = 80^\circ$, entonces
 - $m \sphericalangle DBF = 40^\circ$.
 - $m \sphericalangle DBF = 160^\circ$.
 - $m \sphericalangle DBF = 80^\circ$.
 - $m \sphericalangle DBF = \pi + 80^\circ$.
- Sean los ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DEF$ tal que $m \sphericalangle ABC = 50^\circ$ y $m \sphericalangle DEF = 40^\circ$, entonces esos ángulos se clasifican como
 - complementarios.
 - congruentes.
 - suplementarios.
 - opuestos por el vértice.
- Sean los ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DBC$, entonces con certeza se cumple que
 - son suplementarios.
 - son opuestos por el vértice.
 - son complementarios.
 - son adyacentes.

Mide los ángulos utilizando el transportador y anota la respuesta en el cuaderno.

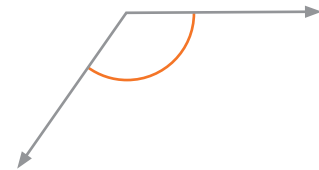
5. Medida:



6. Medida:

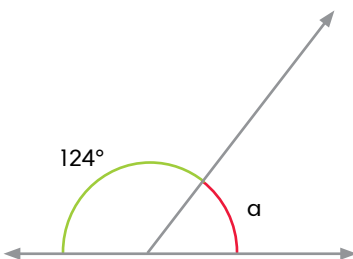


7. Medida:

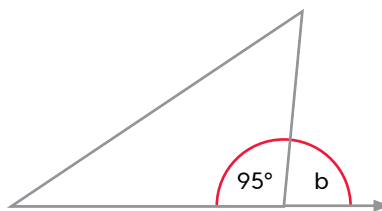


Calcula la medida de cada ángulo faltante y anótala.

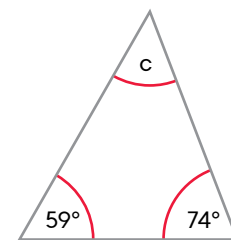
8. Medida:



9. Medida:

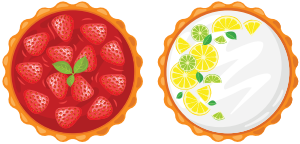


10. Medida:

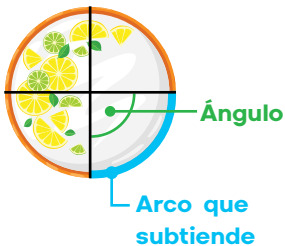


2.2 Ángulos centrales

Problema



¡Atención!



María tiene una repostería. Para obtener ganancias equitativas, dividió las tartas de limón en 4 porciones de igual tamaño y las de fresa, en 6. ¿Cuál estrategia puede usar para obtener porciones iguales en cada tarta?

Responde:

1. Divide la tarta de limón en 4 porciones de igual tamaño.
 - a. ¿Qué representa el punto de intersección de los cortes?
 - b. ¿A cuál elemento de la circunferencia corresponde cada corte?
 - c. ¿Cuánto mide el ángulo que se forma entre cada corte?
2. Determina una fórmula que permita calcular la medida del ángulo de cada porción, al ser dividida en partes iguales. Compruébela con la tarta de fresa.
3. Determina una fórmula que permita calcular la medida de un arco subtendido en una circunferencia dividida en partes iguales.

Solución

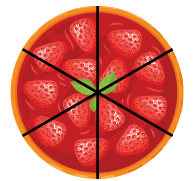
1. Al dividir la tarta de limón en 4 porciones de igual tamaño se obtiene la figura de la derecha.
 - a. El punto de intersección de los cortes marca el centro de la tarta. Es decir, corresponde al centro de la circunferencia.
 - b. En cada corte los extremos son el centro y un punto de la circunferencia, es decir, corresponde al radio.
 - c. Como la circunferencia completa mide 360° y se está dividiendo en 4 partes iguales, entonces, el ángulo mide $360^\circ \div 4 = 90^\circ$.
R: El ángulo que subtiende cada arco mide 90° .



2. Para calcular la medida del ángulo θ se divide 360° entre el número de secciones (n):

$$m \angle \theta = \frac{360}{n}$$

La tarta de fresa se dividió en 6 porciones de igual tamaño, entonces, el ángulo mide $360^\circ \div 6 = 60^\circ$.



3. Para calcular la medida de la circunferencia se usa la fórmula $C = 2\pi r$. Además, la circunferencia se divide en secciones de igual medida, por ello, se divide C entre el número de secciones (n): $\frac{2\pi r}{n}$. Luego, como $m \angle \theta = \frac{360}{n}$, entonces, $n = \frac{360}{m \angle \theta}$. Sea $\theta = m \angle \theta$, entonces la medida del arco subtendido (s), está dado por:

$$s = \frac{2\pi r}{\frac{360}{\theta}} = \frac{2\pi r \theta}{360}$$

Datos interesantes

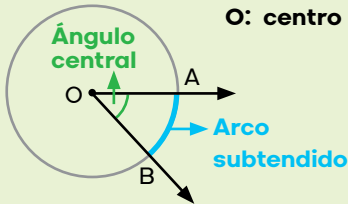
Algunos historiadores consideran que los primeros en dividir el círculo en 360° fueron los babilonios, debido a que su sistema de numeración era de base 60.

Adicionalmente, Hiparco de Nicea (aproximadamente 190-120 a. C.), astrónomo, geógrafo y matemático griego, inventó el sistema formal de latitud y longitud, con el que dividió la Tierra en un círculo de 360 grados, donde cada grado tiene 60 minutos y cada minuto, 60 segundos. Este matemático es considerado el padre de la Trigonometría.

Conclusión

Un **ángulo central** es aquel cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia, además, sus lados son radios de la circunferencia.

El arco que se encuentra entre los puntos de intersección del ángulo central con la circunferencia, se denomina **arco subtendido**.



O: centro

En la figura se tiene:

- Ángulo central: $\angle AOB$ y $m\angle AOB = \frac{360}{n}$,
n: número de divisiones.
- Arco subtendido: \widehat{AB} y $m\widehat{AB} = \frac{2\pi r \theta}{360}$,
r: radio, θ : medida del ángulo central.

Ejemplo:

Determina la medida de cada ángulo central y el arco que subtiende una circunferencia de radio 10 m que se dividió en 8 partes iguales.

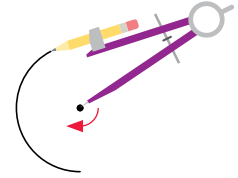
$$m\angle AOB = \frac{360}{n} = \frac{360}{8} = 45^\circ \text{ y } m\widehat{AB} = \frac{2\pi r \theta}{360^\circ} = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 10 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = 7,854$$

Práctica

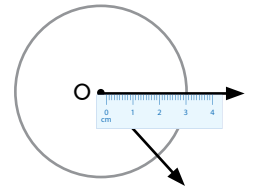
- Completa las expresiones con el símbolo correcto. Usa la imagen.
 - El arco subtendido por $\angle AOD$ corresponde a
 - El arco subtendido por $\angle AOB$ corresponde a
 - El arco subtendido por $\angle COD$ corresponde a
 - \widehat{CB} es el arco subtendido por el ángulo
 - \widehat{DB} es el arco subtendido por el ángulo
 - \widehat{AC} es el arco subtendido por el ángulo
- Calcula la medida solicitada según los datos indicados. Usa la imagen.
 - Si $m\angle BOC = 30^\circ$ y $r = 5$ cm entonces $m\widehat{BC} = \dots\dots\dots$
 - Si $m\angle COD = 60^\circ$, entonces $m\angle COE = \dots\dots\dots$
 - Si $m\angle AOF = \frac{1}{2} \angle AOE$, entonces $m\widehat{AF} = \dots\dots\dots$
 - Si $m\widehat{DF} = 3\widehat{EF}$, entonces $m\angle FOD = \dots\dots\dots$
 - Si $\vec{AD} \perp \vec{BE}$, entonces $m\widehat{AB} = \dots\dots\dots$
 - Si \widehat{BE} es una semicircunferencia, entonces $m\angle BOE = \dots\dots\dots$
- En la figura del lado $m\angle AOD = 57^\circ$ y $r = 6$ dm. Entonces:
 - $m\widehat{AD} = \dots\dots\dots$
 - $m\widehat{CD} = \dots\dots\dots$
 - $m\angle BOC = \dots\dots\dots$
 - $m\widehat{BD} = \dots\dots\dots$

¿Sabías qué...?

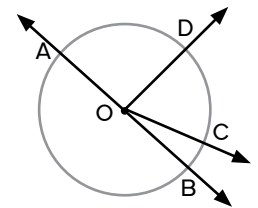
Para trazar un ángulo central se dibuja una circunferencia con un compás:



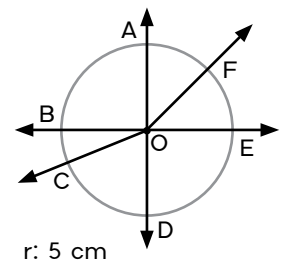
Con una regla se trazan los rayos del ángulo cuyo origen es el centro:



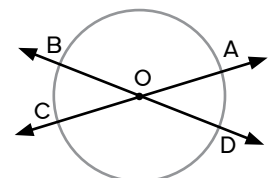
Trabaja en tu cuaderno



O: centro

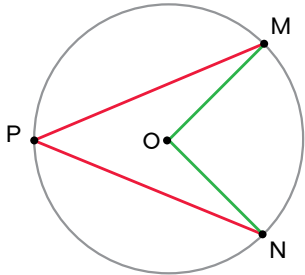


r: 5 cm



2.3 Ángulos inscritos

Problema



O: centro
r: 8 cm

Yajaira debe contestar unas interrogantes relacionadas con la imagen del lado izquierdo. Ayúdala a responderlas.

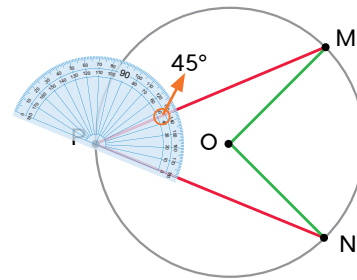
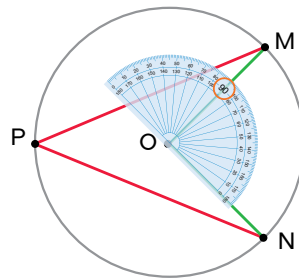
1. ¿Cuánto miden los ángulos $\angle MON$ y $\angle MPN$? Usa el transportador.
2. ¿Cuál es la relación entre $\angle MON$ y $\angle MPN$?
3. ¿Cuál arco subtende $\angle MPN$? Determina su medida.

Solución

1. Al medir los ángulos con el transportador se obtiene:

$$m\angle MON = 90^\circ$$

$$m\angle MPN = 45^\circ$$

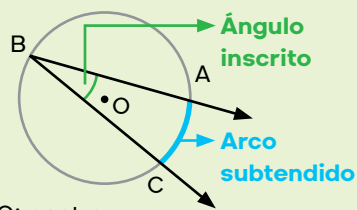


2. $45 = \frac{1}{2} \cdot 90$ entonces, $m\angle MPN = \frac{1}{2} \cdot m\angle MON$.

3. $\angle MPN$ y $\angle MON$ subtenden el arco \widehat{MN} . Además, $m\angle MON = 90^\circ$, entonces, $m\widehat{MN} = \frac{2\pi r \theta}{360^\circ} = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 8 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 12,5664$ cm.

Conclusión

Un **ángulo inscrito** es aquel cuyos lados son secantes a la circunferencia, pues su vértice es un punto de ella. Además, su medida es igual a la mitad del ángulo central subtendido por el mismo arco.



O: centro

En la figura se tiene:

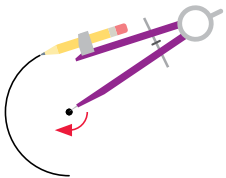
- Ángulo inscrito: $\angle ABC$
- Arco subtendido: \widehat{AC}

$$\text{Además: } m\angle ABC = \frac{1}{2} m\angle AOC = \frac{m\angle AOC}{2}$$

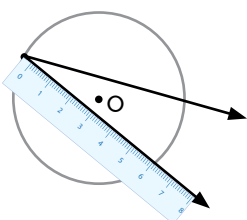
Por ejemplo, si $m\angle AOC = 50^\circ$, entonces, $m\angle ABC = 25^\circ$.

¿Sabías qué...?

Para trazar un ángulo inscrito se dibuja una circunferencia con un compás:



Con una regla se trazan los rayos secantes del ángulo cuyo origen es un punto de la circunferencia:



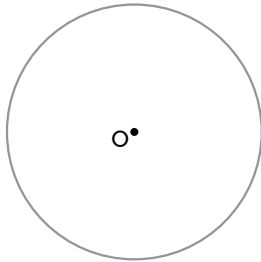
Práctica

Trabaja en tu cuaderno



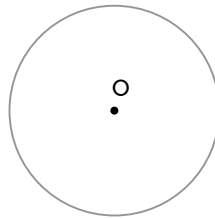
1. Dibuja en el cuaderno las circunferencias según la medida indicada. Luego, representa el ángulo solicitado en cada caso. Usa el compás, el transportador y la regla.

a. El ángulo inscrito que subtiende el arco \widehat{MN} , con $m\angle MON = 60^\circ$.



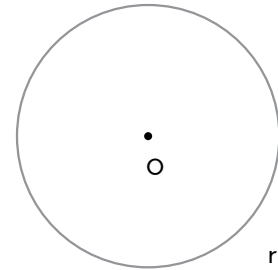
$r = 5 \text{ cm}$

b. El ángulo inscrito que subtiende el arco \widehat{HK} , con $\angle HOK = 100^\circ$.



$r = 3 \text{ cm}$

c. Un ángulo inscrito y uno central inscritos por el arco \widehat{AB} , con $\angle AOB = 90^\circ$.



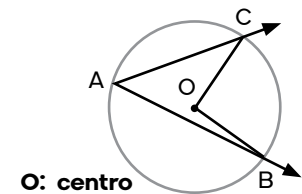
$r = 7 \text{ cm}$

2. Completa las expresiones con el símbolo correcto. Usa la imagen.

a. El arco subtendido por $\angle CAB$:

b. \widehat{CB} es el arco subtendido por el ángulo central:

c. \widehat{CB} es el arco subtendido por el ángulo inscrito:



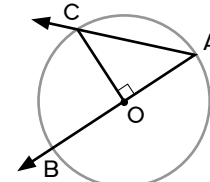
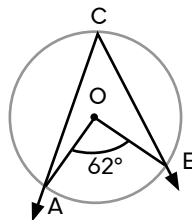
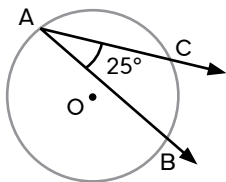
O: centro

3. Calcula la medida del ángulo solicitado en cada figura.

a. $m\angle COB =$

b. $m\angle ACB =$

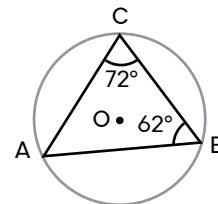
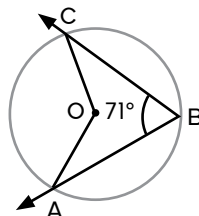
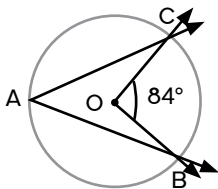
c. $m\angle BAC =$



d. $m\angle BAC =$

e. $m\angle AOC =$

f. $m\angle BOC =$

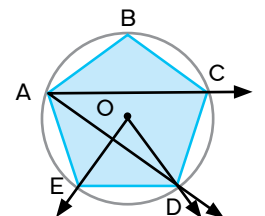


4. Determina la medida solicitada. En la figura, ABCDE es un pentágono regular.

a. Si $m\angle CAD =$

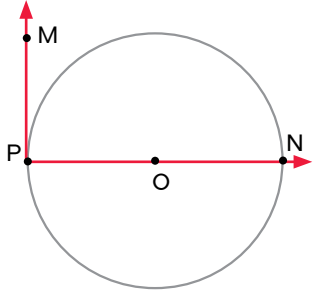
b. Si $m\angle DOE =$

c. Si $m\angle ACD =$



2.4 Ángulos semiinscritos

Problema



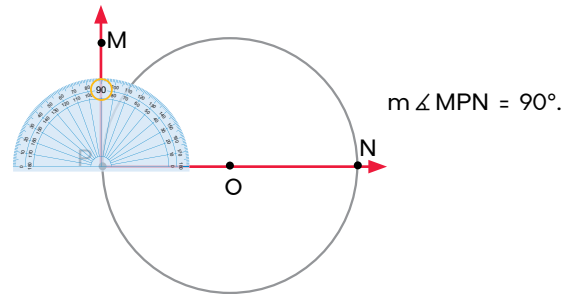
O: centro

Contesta según la imagen del lado donde \overline{MP} es tangente a la circunferencia en el punto P.

1. ¿Cuál es la medida de $\angle MPN$? Usa el transportador.
2. ¿Cuál arco subtiende $\angle MPN$? Determina su medida.
3. ¿Cuál es la relación entre las medidas de $\angle MPN$ y \widehat{PN} ?

Solución

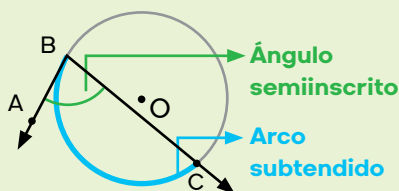
1. Al medir $\angle MPN$ con el transportador se obtiene:



2. El arco que subtiende el ángulo $\angle MPN$ es \widehat{PN} .
Al calcular su medida se observa que \overline{NP} es un diámetro, por lo tanto, $m\angle PON = 360 \div 2 = 180^\circ$.
3. Como $90 = \frac{1}{2} \cdot 180$ entonces, $m\angle MPN = \frac{1}{2} \cdot m\angle PON$.

Conclusión

Un **ángulo semiinscritos** tiene su vértice en la circunferencia, además, uno de sus lados es secante a la circunferencia y el otro es tangente a ella. Por otra parte, su medida es igual a la mitad del ángulo central subtendido por el mismo arco.



En la figura se tiene:

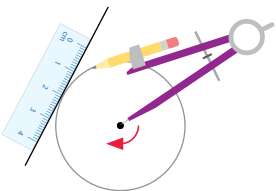
- Ángulo semiinscritos: $\angle ABC$
- Arco subentendido: \widehat{BC}

$$\text{Además: } m\angle ABC = \frac{1}{2} m\angle BOC = \frac{m\angle BOC}{2}$$

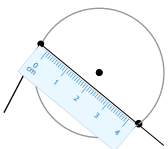
Por ejemplo, si $m\angle BOC = 170^\circ$, entonces, $m\angle ABC = 85^\circ$.

¿Sabías qué...?

Para trazar de forma aproximada un ángulo semiinscritos se dibuja una circunferencia con un compás y una recta tangente con una regla:



Identifica el punto de tangencia y traza un rayo secante con origen en el punto de tangencia. Borra la parte de la recta tangente que no necesites:



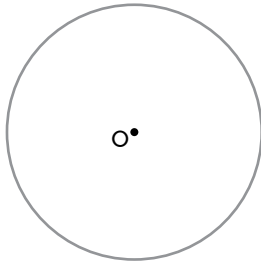
Práctica

Trabaja en tu cuaderno



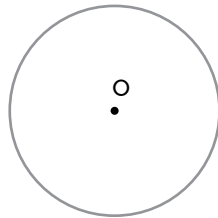
1. Dibuja en el cuaderno las circunferencias según la medida indicada. Luego, representa el ángulo solicitado en cada caso. Usa el compás, el transportador y la regla.

a. El ángulo semiinscrita que subtende el arco \widehat{AB} , con $m\angle AOB = 60^\circ$.



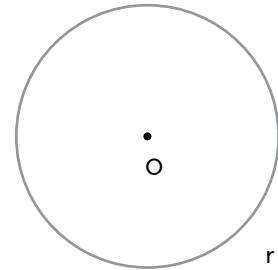
$r = 6 \text{ cm}$

b. El ángulo semiinscrita que subtende el arco \widehat{PQ} , con $m\angle POQ = 180^\circ$.



$r = 4 \text{ cm}$

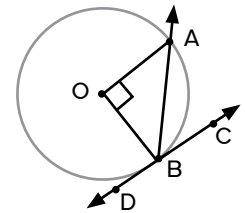
c. Un ángulo semiinscrita y uno inscrito que subtenden arcos con ángulos centrales de 90° .



$r = 8 \text{ cm}$

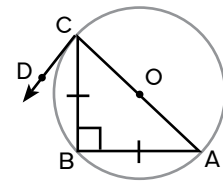
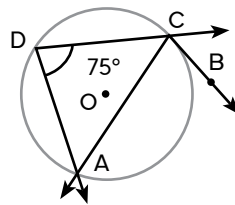
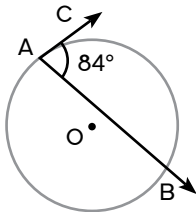
2. Completa las expresiones con el símbolo correcto. Usa la imagen.

- a. El arco subtendido por $\angle ABD$:
- b. \widehat{AB} es el arco subtendido por el ángulo central:
- c. \widehat{AB} es el arco subtendido por el ángulo semiinscrita:

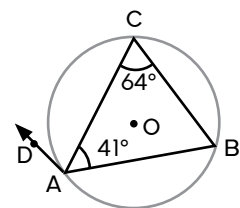
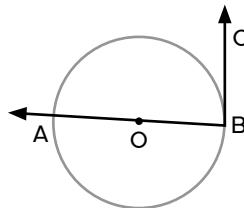
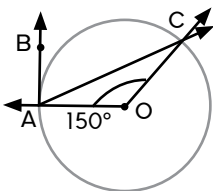


3. Calcula la medida del ángulo solicitado en cada figura.

- a. $m\angle AOB =$
- b. $m\angle ACB =$
- c. $m\angle BCD =$

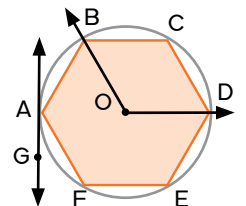


- d. $m\angle BAC =$
- e. $m\angle ABC =$
- f. $m\widehat{CB} =$



4. Determina la medida solicitada. En la figura, ABCDEF es un hexágono regular.

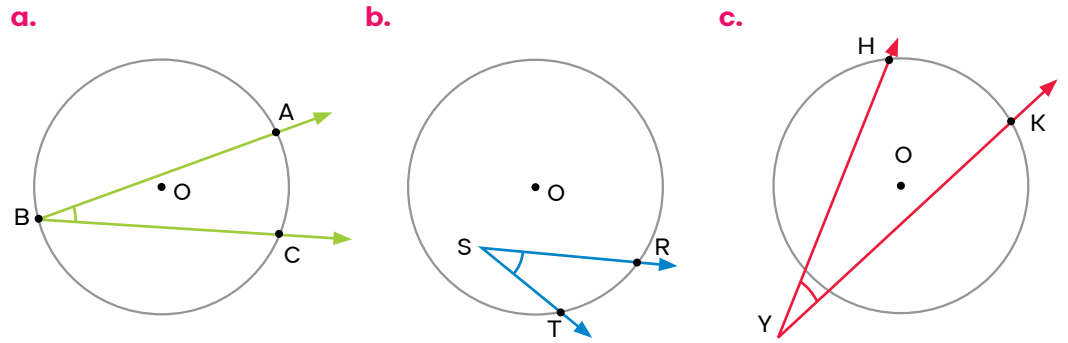
- a. Si $m\angle BOD =$
- b. Si $m\angle FAG =$
- c. Si $m\angle BCD =$



2.5 Ángulos exteriores e interiores

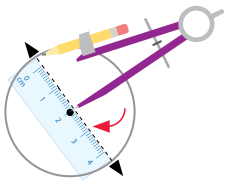
Problema

Clasifica los ángulos representados según su posición en la circunferencia. En cada círculo, O corresponde al centro.

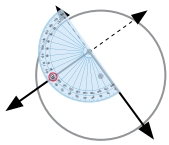


¿Sabías qué...?

Para trazar de forma aproximada un ángulo interno se dibuja una circunferencia con un compás y se traza una recta secante:



Identifica el vértice y con un compás y una regla se traza la segunda recta según la medida del ángulo:



Solución

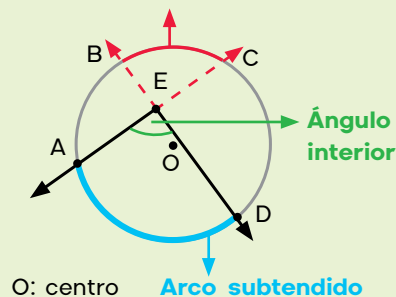
Al observar las figuras se nota que el vértice de la figura **a** se encuentra en la circunferencia, el de la figura **b**, en el interior del círculo y el de la figura **c**, en el exterior. Por lo tanto, pueden clasificarse de la siguiente manera:

- $\angle ABC$ se ubica en la circunferencia.
- $\angle RST$ se ubica en el interior del círculo.
- $\angle HYK$ está en el exterior del círculo.

Conclusión

Un **ángulo interior** tiene su vértice en el interior del círculo y sus lados son secantes a la circunferencia. Su medida es igual a la semisuma de los ángulos centrales subtendidos por los arcos que comprenden sus lados.

Arco subtendido proyectado



En la figura se tiene:

- Ángulo interior: $\angle AED$
- Arco subtendido: \widehat{AD}
- Arco subtendido proyectado por el ángulo interior: \widehat{BC} .

$$\text{Además: } m\angle AED = \frac{m\angle AOD + m\angle BOC}{2}$$

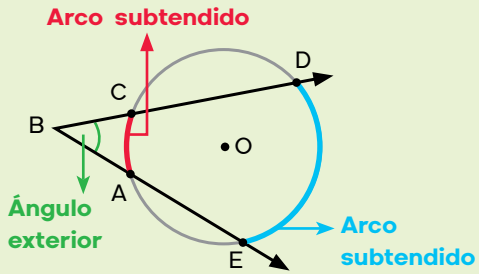


¡Atención!

La semisuma es la mitad de la suma de dos o más números.

La semidiferencia es la mitad de la resta de dos o más números.

Un **ángulo exterior** tiene su vértice en el exterior del círculo y sus lados son secantes a la circunferencia. Su medida es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales subtendidos por los arcos que comprenden sus lados.



En la circunferencia de centro O se tiene:

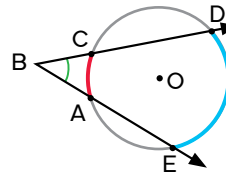
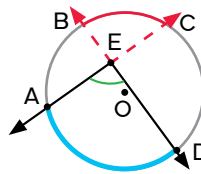
- Ángulo exterior: $\angle ABC$
- Arcos subtendidos: \widehat{DE} y \widehat{AC}

Además: $m\angle ABC = \frac{m\angle DOE - m\angle AOC}{2}$

Observa cómo se hace

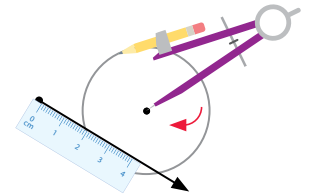
Observa la forma en que se calculan los ángulos determinados por la circunferencia de centro O.

- Si $m\angle AOD = 130^\circ$ y $m\angle BOC = 40^\circ$,
¿cuánto mide $\angle AED$?
 $m\angle AED = \frac{m\angle AOD + m\angle BOC}{2} = \frac{130 + 40}{2} = 85^\circ$
- Si $m\angle DOE = 125^\circ$ y $m\angle AOC = 35^\circ$,
¿cuánto mide $\angle ABC$?
 $m\angle ABC = \frac{m\angle DOE - m\angle AOC}{2} = \frac{125 - 35}{2} = 45^\circ$

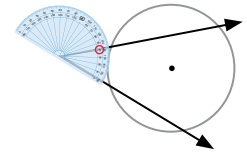


¿Sabías qué...?

Para trazar de forma aproximada un ángulo externo se dibuja una circunferencia con un compás y se traza una recta secante:



Identifica el vértice y con el compás y una regla traza el segundo rayo según la medida del ángulo:



Práctica

Trabaja en tu cuaderno



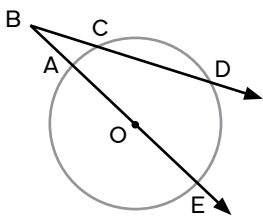
- Dibuja en el cuaderno una circunferencia de 10 cm de radio. Luego, representa un ángulo interior de 50° y uno exterior de 35° .
- Calcula del ángulo solicitado en cada circunferencia de centro O.

a. $m\angle ABC =$

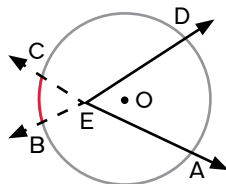
b. $m\angle AED =$

c. $m\angle GAB =$

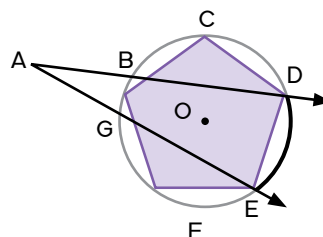
d. $m\angle BEC =$



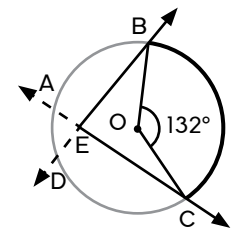
$m\angle AOC = 17^\circ$
 $m\angle DOE = 113^\circ$



$m\angle BOC = 39^\circ$
 $m\angle AOD = 101^\circ$



BCDEF: pentágono regular
 $m\angle BOG = 24^\circ$



$m\angle AOD = 44^\circ$



1. Asocia cada término de la columna izquierda con su respectiva definición de la columna derecha. Indica la letra del concepto y el número que corresponde a la definición. Ejemplo: A → 1.

A. Ángulo inscrito

1. Su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

B. Ángulo interior

2. Su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados dos radios.

C. Ángulo central

3. Su vértice es un punto del exterior del círculo y sus lados son secantes a la circunferencia.

D. Arco subtendido por el ángulo central

4. Arco acotado por dos rayos secantes a la circunferencia.

E. Ángulo semiinscrito

5. Su vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados es secante y el otro tangente a ella.

F. Arco subtendido por el ángulo inscrito

6. Arco acotado por dos rayos, uno secante y el otro tangente a la circunferencia.

G. Ángulo exterior

7. Su vértice es un punto del interior del círculo y sus lados son secantes a la circunferencia.

H. Arco subtendido por el ángulo semiinscrito

8. Su medida es igual a $2\pi r \theta$ dividido entre 360° .

2. Copia las afirmaciones en el cuaderno y coloca un gancho (✓) en las correctas. Justifica la respuesta.

a. Un ángulo central α que abarca el mismo arco que un ángulo inscrito β , es el doble de β . Justificación:

b. El arco de un cuarto de circunferencia mide un cuarto de la circunferencia entera. Justificación:

c. Un ángulo semiinscrito α que abarca el mismo arco que un ángulo inscrito β , es la mitad de β . Justificación:

d. Cualquier ángulo inscrito que abarque media circunferencia es un ángulo recto. Justificación:

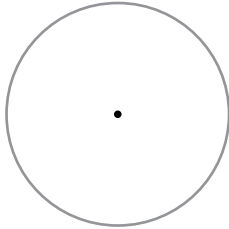
e. Un ángulo exterior α que abarca el mismo arco que un ángulo central β , es igual a β . Justificación:

3. Dibuja las circunferencias en el cuaderno, representa los elementos indicados y anota la medida de los ángulos solicitados.

a. Un ángulo inscrito y un semiinscrito que abarcan un cuarto de circunferencia.

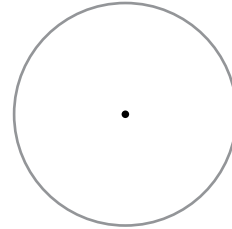
Ángulo semiinscrito:

Ángulo inscrito:



b. Un ángulo exterior cuyos arcos determinados por las secantes abarcan un cuarto y un octavo de circunferencia.

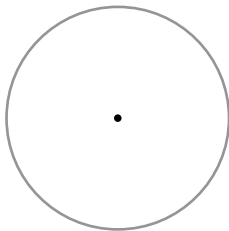
Ángulo exterior:



c. Un ángulo central que abarcan un décimo de la circunferencia y uno inscrito que subtiendan el mismo arco.

Ángulo inscrito:

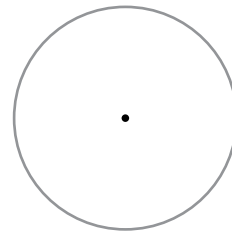
Ángulo central:



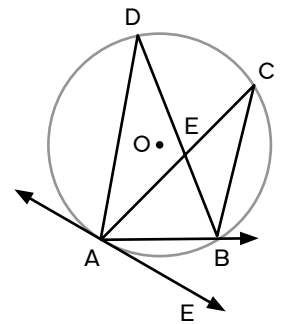
d. Un ángulo central de 60° y un ángulo inscrito y un semiinscrito que abarcan el mismo arco.

Ángulo semiinscrito:

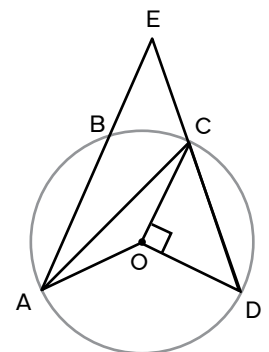
Ángulo inscrito:



4. Determina la medida de $\angle BAE$ y de $\angle DOC$ en la circunferencia de centro O adjunta, donde, $m\angle DAE = 20^\circ$ y $m\angle BEC = 110^\circ$.



5. Determina la medida de los ángulos $\angle AED$, $\angle ACD$ y $\angle AOB$ en la circunferencia de centro O adjunta, donde, $m\angle AOC = 120^\circ$ y $m\angle BOC = \frac{1}{3} m\angle AOC$.



Poliedros regulares

3.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno



1. Anota en el cuaderno el nombre de cada cuerpo geométrico.

a. _____



b. _____



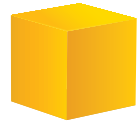
c. _____



d. _____



e. _____



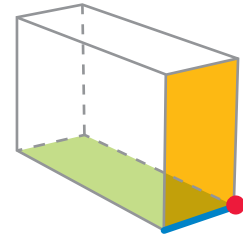
2. Escribe el nombre del elemento repintado según el color indicado.

a. Rojo: _____

b. Amarillo: _____

c. Azul: _____

d. Verde: _____



3. Contesta según el poliedro del lado.

a. ¿Cuántas aristas tiene en total? _____

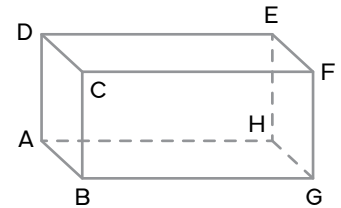
b. ¿Cuántas caras lo forman? _____

c. ¿Cuántos vértices posee en total? _____

d. Dos segmentos paralelos son: _____

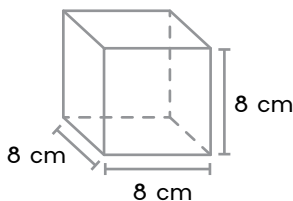
e. Dos segmentos perpendiculares son: _____

f. Si $AB = 6$ dm, $BC = 5$ dm y $DE = 10$ dm, entonces el volumen en metros es: _____

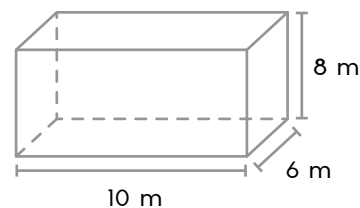


4. Calcula el volumen de los poliedros en la unidad indicada.

a. $V =$ _____ mm^3



b. $V =$ _____ dam^3



5. Marcia quiere forrar con papel satinado una caja con forma de cubo.

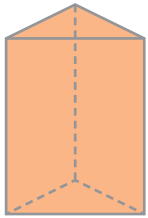
a. Si cada arista de la caja mide 30 cm, ¿cuántos centímetros cuadrados de papel necesita para forrar una cara?

b. ¿Cuánto papel necesita en total para forrar todas sus caras?

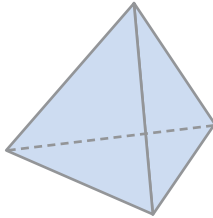
3.2 Concepto y descripción de poliedros regulares

Problema

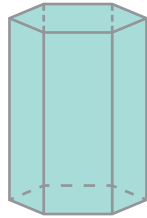
Kemly debe identificar cuáles de los siguientes poliedros son regulares, al investigar leyó que un poliedro regular es aquel que todas sus caras son polígonos regulares.



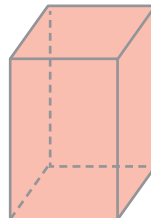
Prisma triangular



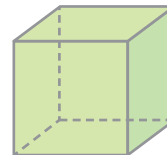
Tetraedro regular



Prisma hexagonal



Prisma cuadrangular



Cubo

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles figuras planas forman cada poliedro? ¿Cuántas tiene?
2. ¿Cuáles de esos poliedros son regulares?

Solución

1. Al observar las figuras planas que forman cada poliedro se obtiene:
 - Prisma triangular:** sus bases son 2 triángulos y sus caras 3 rectángulos.
 - Tetraedro:** está formado por 4 triángulos equiláteros.
 - Prisma hexagonal:** sus bases son dos hexágonos regulares y sus caras laterales son 6 rectángulos.
 - Prisma cuadrangular:** sus bases son dos cuadrados y sus caras laterales son 4 rectángulos.
 - Cubo:** está formado por 6 cuadrados.
2. En un poliedro regular, todas las caras son polígonos regulares. Los poliedros que cumplen con esta característica son el tetraedro y el cubo.

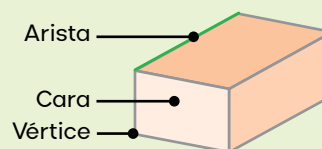
Conclusión

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico formado por superficies poligonales. Algunos de sus elementos son:

Cara: cada superficie plana que lo forma.

Arista: segmento que une dos caras.

Vértice: punto de intersección de 3 aristas.



Recuerda

Un polígono es regular si todos sus lados son congruentes a la vez y sus ángulos internos tienen igual medida. Algunos polígonos regulares son:

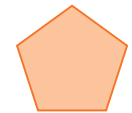
Triángulo equilátero



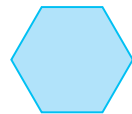
Cuadrado



Pentágono regular



Hexágono regular



Datos interesantes

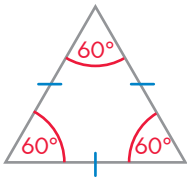
Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran pirámides, cilindros, cubos y prismas.

Un ejemplo es la Gran Pirámide de Guiza, construida por los antiguos egipcios.

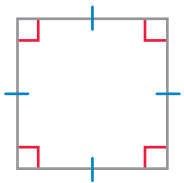


¿Qué pasaría?

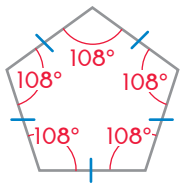
En un triángulo equilátero, los 3 lados son congruentes (de igual medida) y cada uno de sus ángulos internos mide 60° .



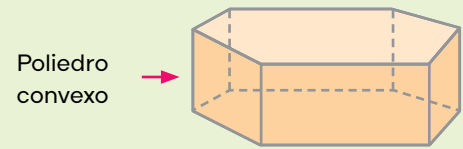
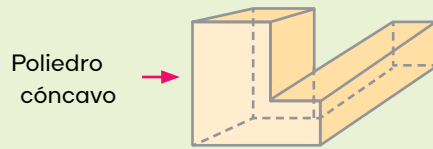
En un cuadrado, los 4 lados son congruentes y los ángulos son rectos.



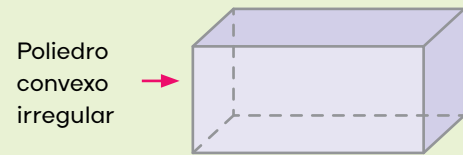
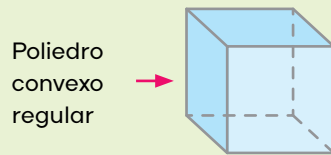
En un pentágono regular, los 5 lados son congruentes y cada ángulo interno mide 108° .



Los poliedros se clasifican en **cóncavos** y **convexos**: es cóncavo si al prolongar el plano de alguna cara, interseca (o "corta") al poliedro; en caso contrario es convexo. Por ejemplo:

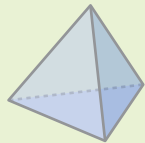


Los poliedros convexos se clasifican en **regulares** o **irregulares**: es regular si todas sus caras son polígonos regulares congruentes. Ejemplo:



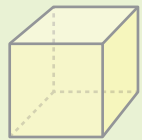
Los siguientes son los poliedros regulares y algunas de sus características.

Tetraedro regular



- Sus caras son triángulos equiláteros.
- Tiene 4 caras, 6 aristas y 4 vértices.

Hexaedro regular (o cubo)



- Sus caras son cuadrados.
- Tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.

Octaedro regular



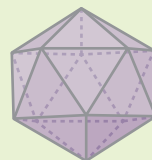
- Sus caras son triángulos equiláteros.
- Tiene 8 caras, 12 aristas y 6 vértices.

Dodecaedro regular



- Sus caras son pentágonos regulares.
- Tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.

Icosaedro regular



- Sus caras son triángulos equiláteros.
- Tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices.

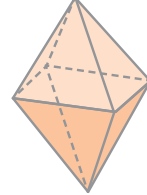
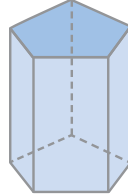
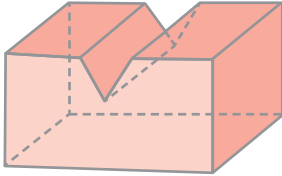
Práctica

Trabaja en tu cuaderno



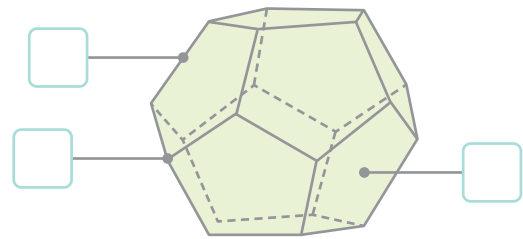
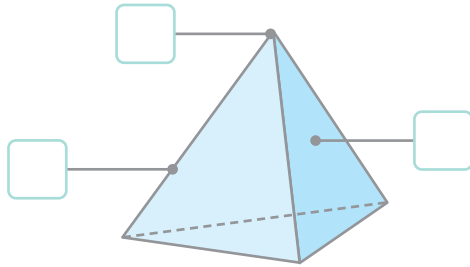
1. Clasifica los poliedros en cóncavo, convexos regulares o convexo irregular según corresponda.

a. Clasificación: _____ b. Clasificación: _____ c. Clasificación: _____



2. Escribe en el recuadro la letra según el elemento representado en cada poliedro.

- a. Cara
- b. Vértice
- c. Arista



3. Copia la tabla en el cuaderno y complétala con las características de los poliedros regulares.

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Forma de sus caras					
Número de caras					
Número de aristas					
Número de vértices					

4. Copia las afirmaciones en el cuaderno y coloca un gancho (✓) en las correctas. Justifica la respuesta.

- a. Las aristas de todos los poliedros regulares son congruentes.
Justificación: _____
- b. Las caras de todos los poliedros convexos son polígonos regulares congruentes.
Justificación: _____
- c. El único poliedro regular que posee 30 aristas es el dodecaedro regular.
Justificación: _____
- d. Tanto el hexaedro regular como el octaedro regular tienen 12 aristas.
Justificación: _____
- e. El único poliedro regular que tiene 12 vértices es el icosaedro regular.
Justificación: _____

¿Sabías qué...?

El conocimiento y el uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos. Se han encontrado objetos tallados en piedra, en Escocia, compatibles con poliedros regulares, que datan de finales del Neolítico o inicios de la Edad del Bronce, es decir, entre 3200 a. C. y 1500 a. C. Sin embargo, los poliedros regulares se estudiaron sistemáticamente mucho después, en la antigua Grecia. Algunas fuentes acreditan su descubrimiento a los pitagóricos en la antigua Grecia, en el siglo VI a. C., razón por la cual también son llamados sólidos pitagóricos.



¡Atención!

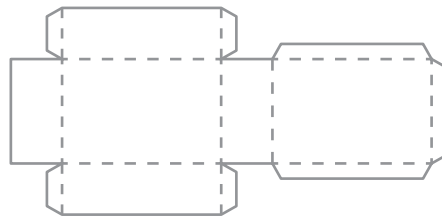
Mide las aristas de los moldes para determinar el tipo de poliedro que forma cada molde.

3.3 Construcción de poliedros regulares

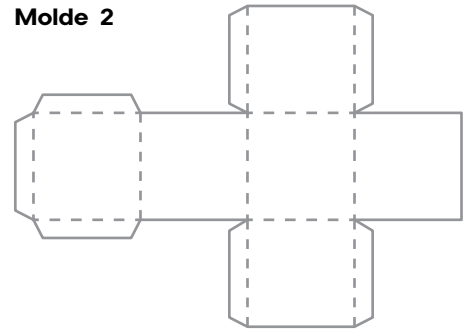
Problema

Daniela debe construir un poliedro regular y encontró en un libro los siguientes moldes.

Molde 1



Molde 2



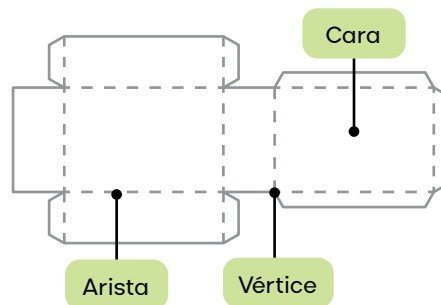
Responde las siguientes preguntas:

1. Identifica en los moldes una cara, un vértice y una arista de cada poliedro.
2. ¿Cuáles poliedros obtiene si arma ambos moldes?
3. ¿Cuál molde debe utilizar para obtener un poliedro regular?

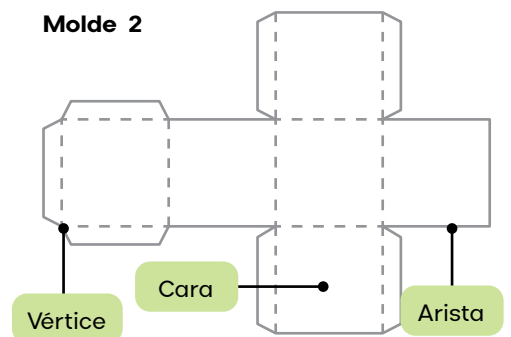
Solución

1. Al observar los moldes se nota que las líneas punteadas indican dónde debe realizarse el dobléz, por tanto pueden identificarse así:

Molde 1



Molde 2



2. Al observar el molde 1 se nota que sus 6 caras son rectangulares, además tiene 3 parejas de rectángulos de diferente medida, por tanto, con ese molde se obtiene un prisma rectangular. En el molde 2 se observa que sus 6 caras son cuadrados congruentes. Por lo tanto, al armarlo se obtiene un cubo.
3. Un prisma rectangular es un poliedro convexo irregular, mientras que el cubo es un poliedro convexo regular.

R: Daniela debe utilizar el molde 2.

Conclusión

Datos interesantes

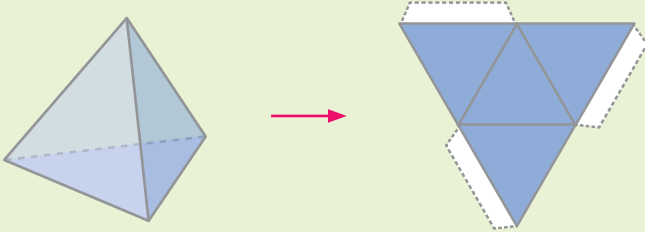
Se considera que el filósofo y matemático griego Platón logró probar que solo existen 5 poliedros regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Por ello, estos poliedros son llamados sólidos platónicos (además de sólidos pitagóricos).

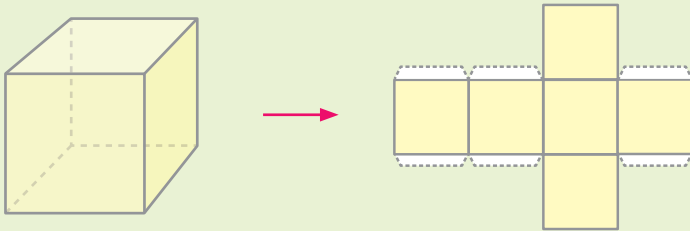
Se llama **plano desarrollado** de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico.

Los planos desarrollados de los poliedros regulares son los siguientes:

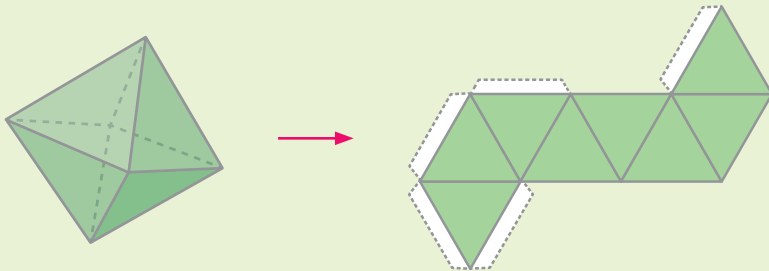
Tetraedro regular



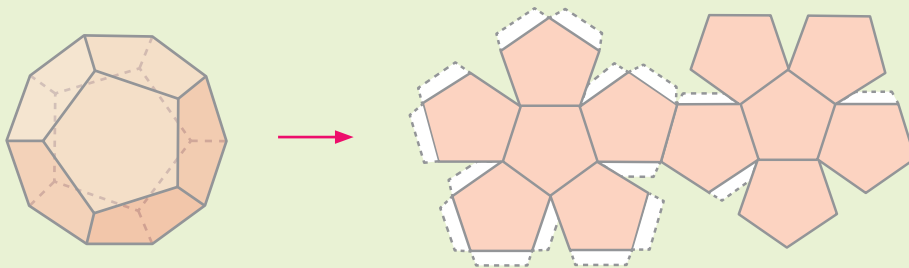
Hexaedro regular (o cubo)



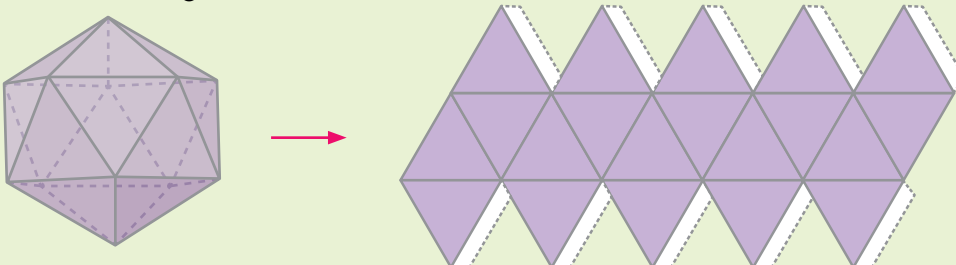
Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular



¿Sabías qué...?

La característica de Euler (o característica de Euler-Poincaré) es un número que describe una estructura.

Esta característica se cumple en todo poliedro convexo con la siguiente fórmula.

$$C + V - A = 2$$

Donde:

C: número de caras

V: cantidad de vértices

A: número de aristas

Ejemplo: en un cubo hay 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, si se sustituyen esos valores en la fórmula se tiene:

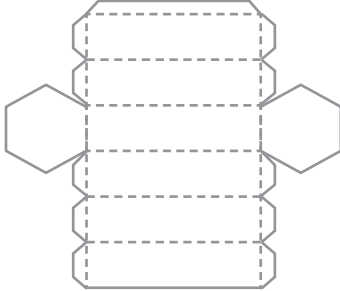
$$6 + 8 - 12 = 2$$

Comprueba la característica de Euler en los demás poliedros regulares.

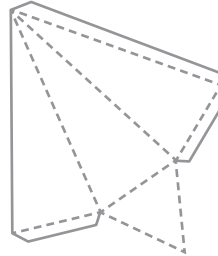


1. Determina el poliedro que se puede construir con cada plano desarrollado. Escribe su nombre, clasificación y menciona cuántos vértices, aristas y caras lo forman.

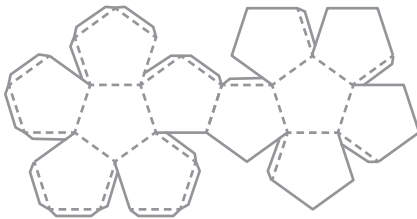
a.



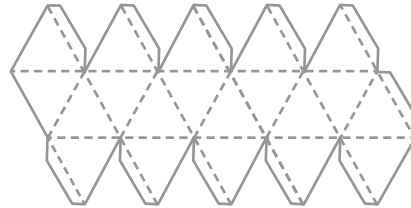
b.



c.

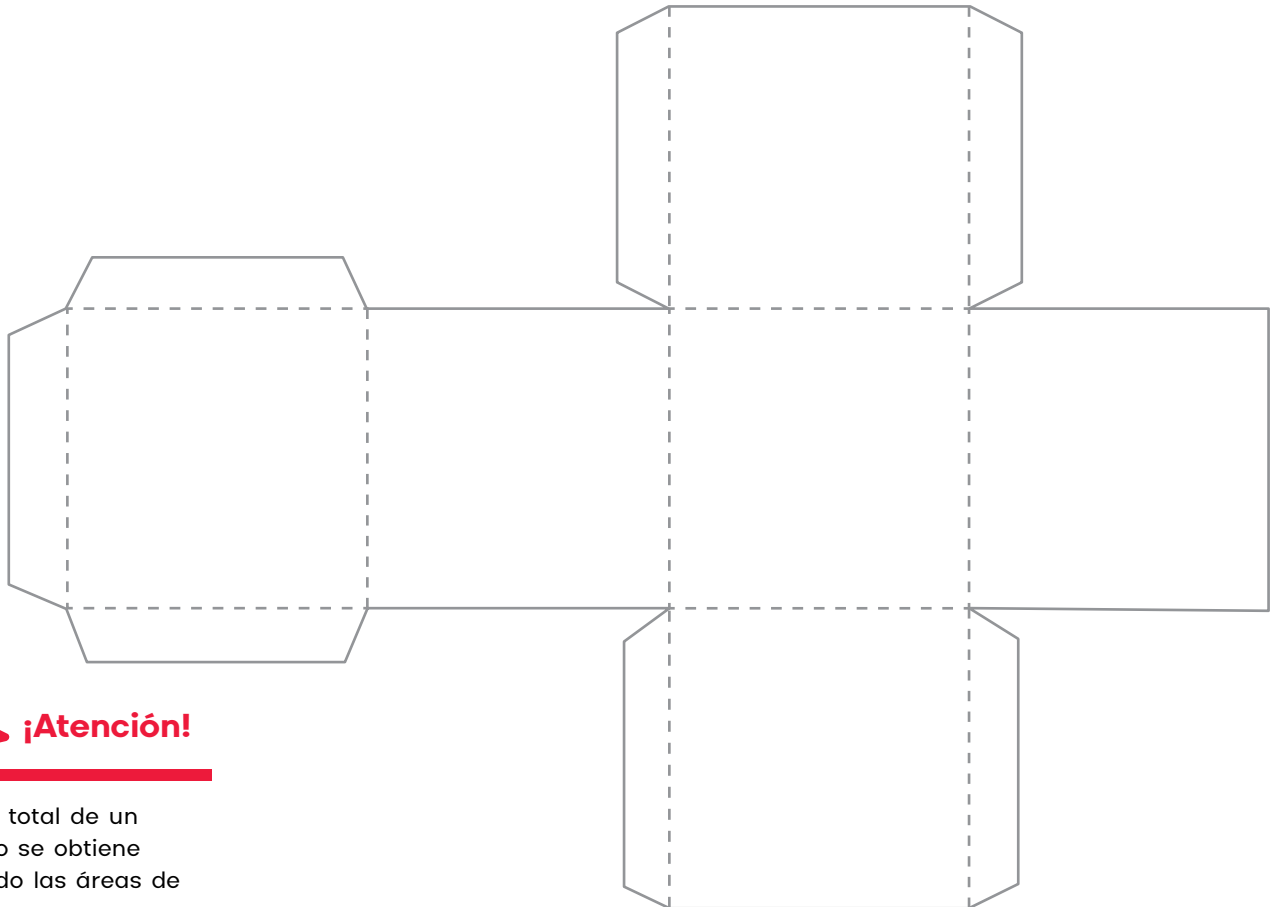


d.



2. Copia (o fotocopia) los planos desarrollados. Pégalos en cartón reciclado, ármalos e indica lo siguiente: nombre del poliedro, número de caras, aristas y vértices, superficie y perímetro de una de sus caras, área total del poliedro.

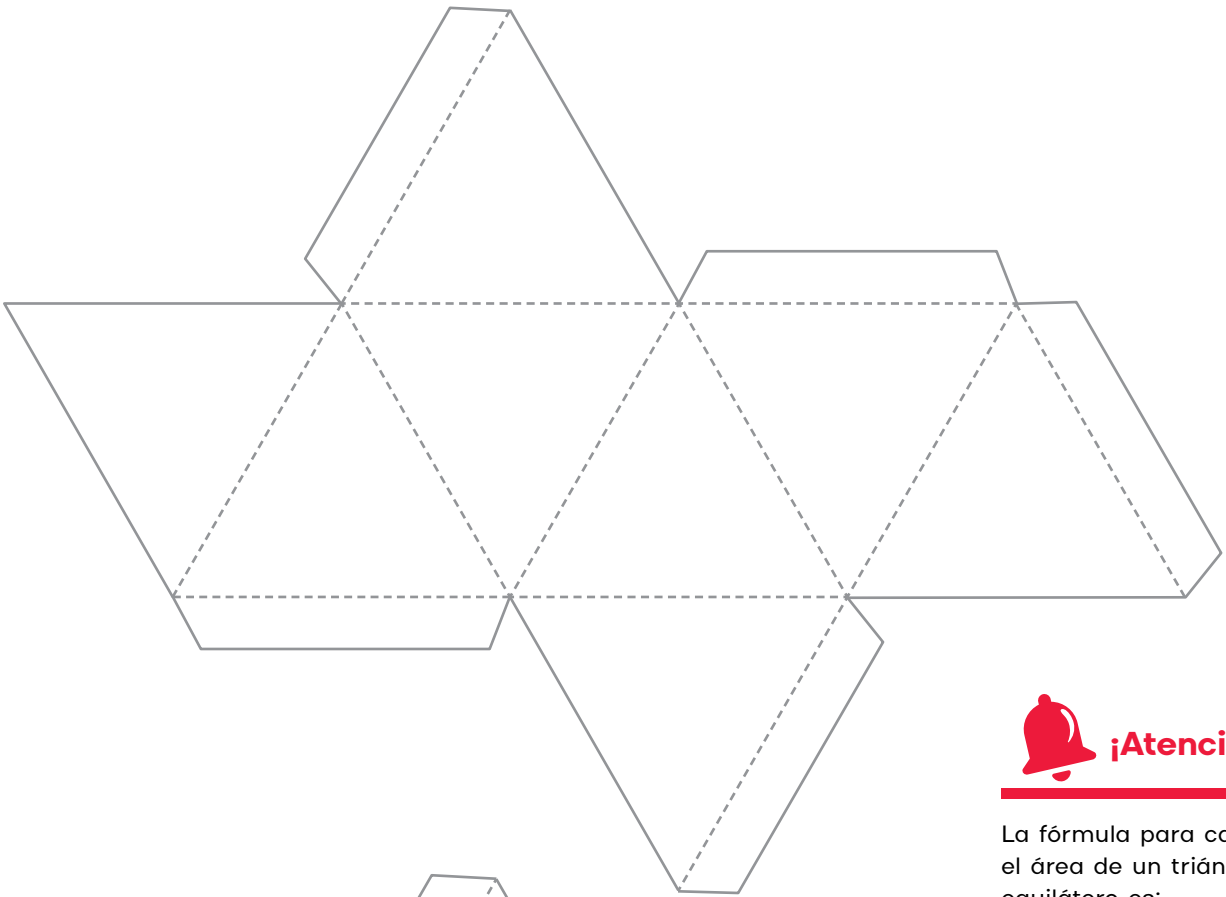
a.



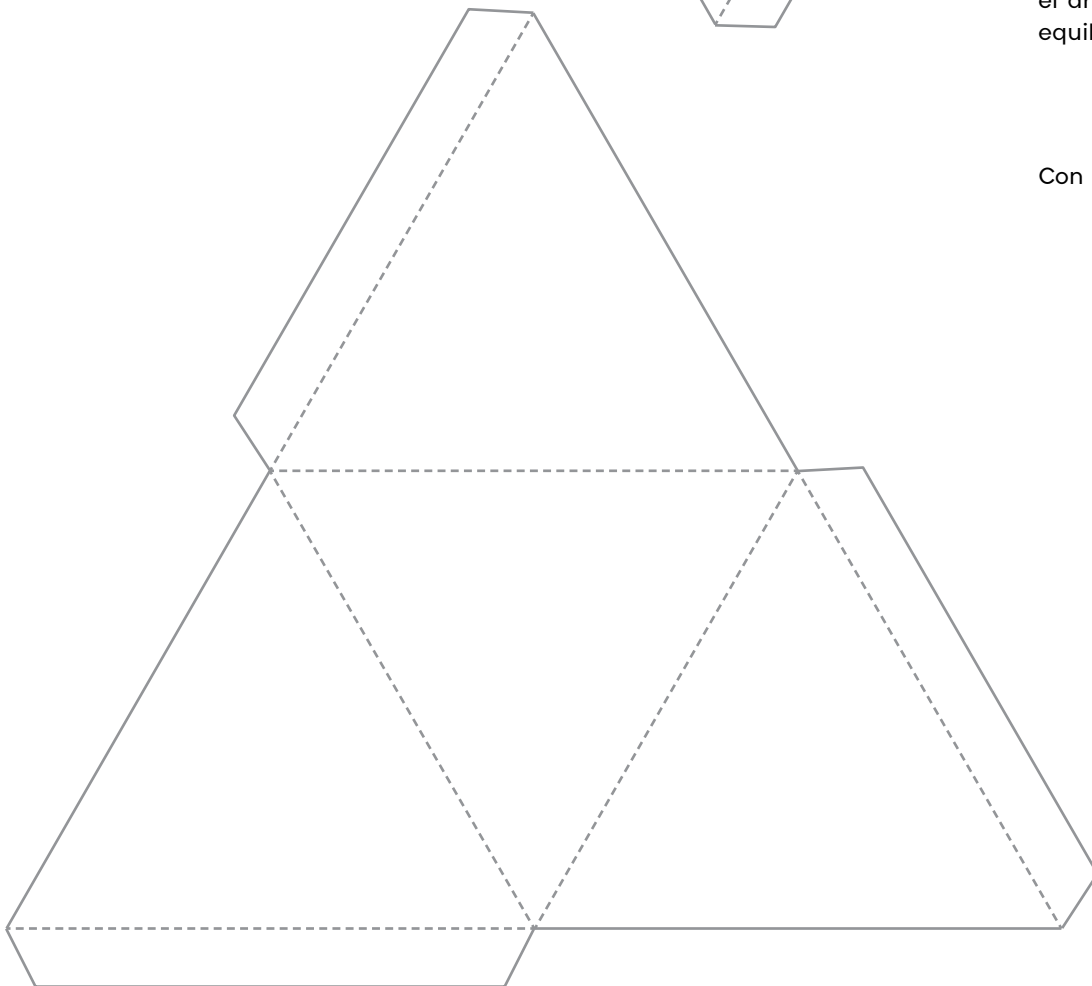
¡Atención!

El área total de un poliedro se obtiene sumando las áreas de todas sus caras.

b.



c.



¡Atención!

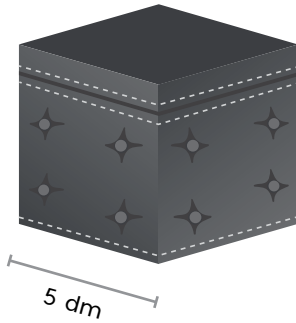
La fórmula para calcular el área de un triángulo equilátero es:

$$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

Con ℓ lado del triángulo.

3.4 Área de las caras de un poliedro regular

Problema



José construye bancos cúbicos forrados con cuerina negra (excepto la base que se coloca en el piso) similares a la imagen de la izquierda.

Si recibió un pedido para hacer un banco forrado con cuerina blanca, ¿cuántos metros cuadrados debe comprar de ese color como mínimo?

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la forma y las medidas de cada cara que forma el banco?
2. Dibuja la figura plana que representa una de sus caras y calcula su área. ¿Qué significa ese valor para el problema planteado?
3. Calcula el área total de las caras que serán forradas con cuerina.

Solución

1. Como es un banco cúbico implica que se relaciona con el hexaedro regular cuyas caras son cuadrados congruentes. La imagen indica que cada arista mide 5 dm, es decir, sus caras son cuadrados de 5 dm de lado.

2. La figura plana que determina una de las caras corresponde a la indicada al lado, es decir, un cuadrado de 5 dm de lado.

La fórmula para calcular el área de un cuadrado es

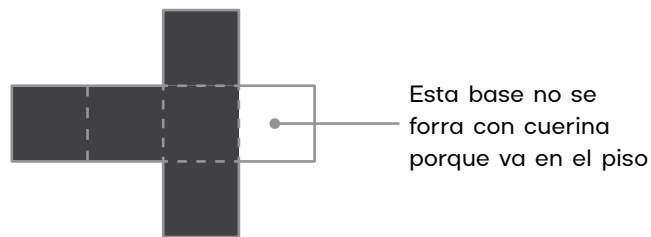
$A = \ell^2$, por lo tanto:

$$A = 5^2 = 25 \text{ dm}^2$$



Ese valor representa la cantidad de material que necesita José para forrar una de las caras del banco.

3. Aunque el poliedro tiene 6 caras se debe tener presente que la base sobre la que se coloca el banco no irá forrada:



Por lo tanto, para calcular la cantidad total de material debe multiplicarse el área de una cara por 5:

$$A_T = 5 \cdot 25 = 125 \text{ dm}^2 = 1,25 \text{ m}^2$$

R: Debe comprar es 1,25 m² de cuerina como mínimo.

Trabajo colaborativo

En pares, realicen un resumen de las características de un poliedro. Descompongan cada uno en las figuras planas que forman sus caras y anoten las fórmulas para calcular el perímetro de una de sus caras, el área de una de sus caras y el área total.

Conclusión

Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de algunos polígonos regulares son las siguientes:

Triángulo equilátero

$$P = 3 \cdot \ell$$

$$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

ℓ : lado del triángulo.

Cuadrado

$$P = 4 \cdot \ell$$

$$A = \ell^2$$

ℓ : lado del cuadrado.

Pentágono

$$P = 5 \cdot \ell$$

$$A = \frac{P \cdot a_p}{2}$$

ℓ : lado y a_p : apotema.

Dado que las caras de los poliedros regulares son polígonos regulares, entonces se utilizan las fórmulas anteriores para calcular el perímetro y el área de una de sus caras y el área total del poliedro.

Estas fórmulas se resumen en la siguiente tabla:

	Perímetro de una cara	Área de una cara	Área total
Tetraedro	$P = 3 \cdot \ell$	$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_T = 4 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \ell^2 \sqrt{3}$
Cubo	$P = 4 \cdot \ell$	$A = \ell^2$	$A_T = 6 \ell^2$
Octaedro	$P = 3 \cdot \ell$	$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_T = 8 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = 2 \ell^2 \sqrt{3}$
Dodecaedro	$P = 5 \cdot \ell$	$A = \frac{P \cdot a_p}{2}$	$A_T = 12 \cdot \frac{P \cdot a_p}{2} = 6 \cdot P \cdot a_p$
Icosaedro	$P = 3 \cdot \ell$	$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_T = 20 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = 5 \ell^2 \sqrt{3}$

Observa cómo se hace

Observa la forma en que se obtiene el perímetro de una cara, el área de una cara y el área total del dodecaedro representado a la derecha.

- Se calcula el perímetro de una cara: $P = 5 \cdot \ell = 5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}$.
- Se calcula el área de una cara: $A = \frac{P \cdot a_p}{2} \approx \frac{40 \cdot 5,51}{2} \approx 110,2 \text{ cm}^2$.

Al calcular el área total se pueden usar dos estrategias:

1. Se multiplica el valor obtenido en el paso anterior por el número de caras: $12 \cdot 110,2 = 1322,4 \text{ cm}^2$.
2. Se usa la fórmula de la tabla: $A = 6 \cdot P \cdot a_p = 6 \cdot 40 \cdot 5,51 = 1322,4 \text{ cm}^2$.



Recuerda

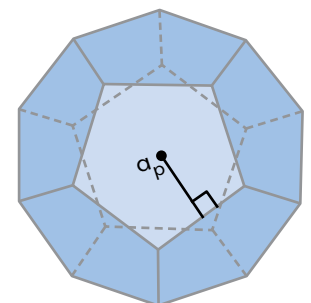
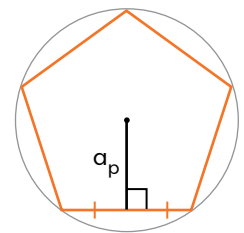
El perímetro de una figura plana es la medida de su contorno.

El área es la medida de su superficie.



¡Atención!

La apotema (a_p) de un polígono regular es el segmento perpendicular que tiene como extremos el centro y el punto medio de un lado.



$$a_p \approx 5,51 \text{ cm}$$

$$\ell = 8$$



1. Calcula el área y el perímetro de una de las caras del poliedro según los datos indicados.

a. Hexaedro de arista 15 cm.

$$P = \dots\dots\dots$$

$$A = \dots\dots\dots$$

c. Tetraedro de arista 8 dm.

$$P = \dots\dots\dots$$

$$A = \dots\dots\dots$$

e. Octaedro de arista 2,3 m.

$$P = \dots\dots\dots$$

$$A = \dots\dots\dots$$

b. Dodecaedro de arista 6 m y $a_p \approx 4,13$ m.

$$P = \dots\dots\dots$$

$$A = \dots\dots\dots$$

d. Icosaedro de arista 7 cm.

$$P = \dots\dots\dots$$

$$A = \dots\dots\dots$$

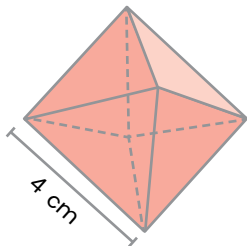
f. Tetraedro de arista 20 cm.

$$P = \dots\dots\dots$$

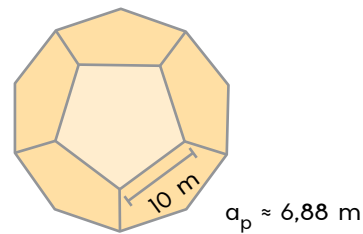
$$A = \dots\dots\dots$$

2. Calcula el área total del poliedro según los datos de cada figura.

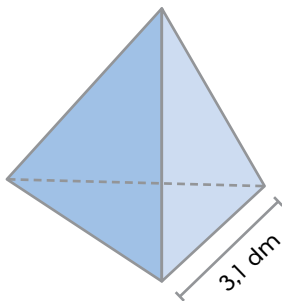
a. AT =



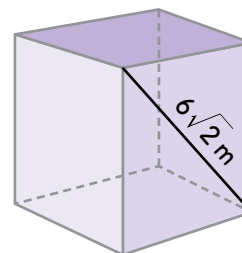
b. AT =



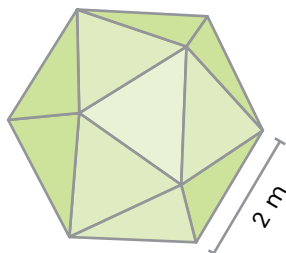
c. AT =



d. AT =



e. AT =



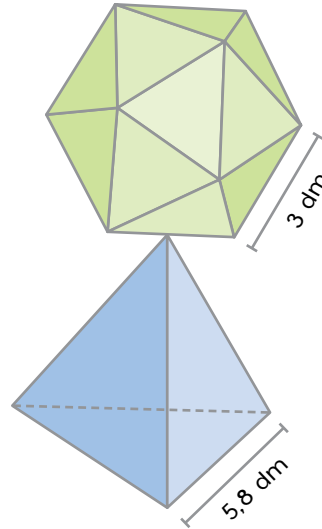
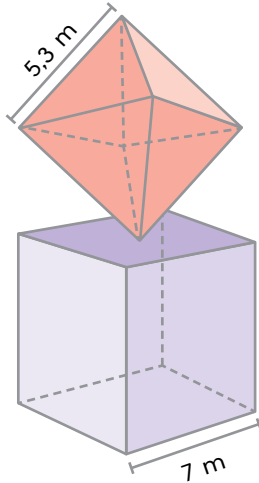
¡Atención!

Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la medida del lado del cuadrado.

3. Andrea armó diferentes figuras con poliedros regulares. Calcula el área total de cada figura compuesta.

a. $A_{\text{Cubo}} =$ _____
 $A_{\text{Octaedro}} \approx$ _____
 $A_T \approx$ _____

b. $A_{\text{Tetraedro}} \approx$ _____
 $A_{\text{Icosaedro}} =$ _____
 $A_T =$ _____



4. Resuelve los siguientes problemas.

- a. Melvin es amante de los astros y de la naturaleza, por ello construyó, en lo alto de una torre de su finca, un observatorio con forma de icosaedro regular de 4 m de lado. Si lo forra completamente con vidrio para una mayor visibilidad, ¿cuántos metros cuadrados de vidrio colocará?
- b. Eneida construyó la maqueta de un octaedro de 7 dm de lado. Si pintó 2 caras de rojo, 3 de azul y el resto de verde, ¿cuántos decímetros cuadrados pintó de cada color?
- c. Para una graduación, los padres forrarán unas cajas cúbicas de 10 cm de lado con terciopelo que se utilizará para entregar un regalo a cada graduando. Si el metro cuadrado de terciopelo cuesta 8,50 balboas y se forrarán 80 cajas, ¿cuántos metros de tela utilizarán? ¿Cuánto pagarán por la tela?
- d. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de un octaedro regular y un hexaedro regular, ambos de 5 m de lado?

3.5 Practico lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada poliedro de la columna izquierda con sus respectivas características de la columna derecha. Indica la letra del poliedro y el número que corresponde a sus cualidades. Cada poliedro se relaciona con dos características. Ejemplo: A → 1 y 4.

A. Tetraedro regular

B. Hexaedro regular

C. Octaedro regular

D. Dodecaedro regular

E. Icosaedro regular

1. Sus caras son triángulos equiláteros.

2. Sus caras son 6 cuadrados congruentes.

3. Sus caras son 12 pentágonos regulares congruentes.

4. Posee 6 aristas y 4 vértices.

5. Posee 30 aristas y 12 vértices.

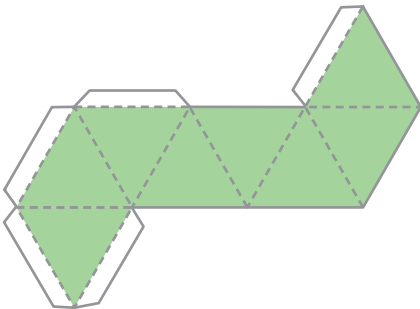
6. Posee 30 aristas y 20 vértices.

7. Posee 12 aristas y 8 vértices.

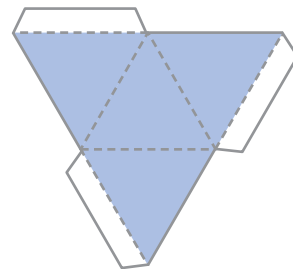
8. Posee 12 aristas y 6 vértices.

2. Escriba el nombre del poliedro regular que se forma con cada plano desarrollado.

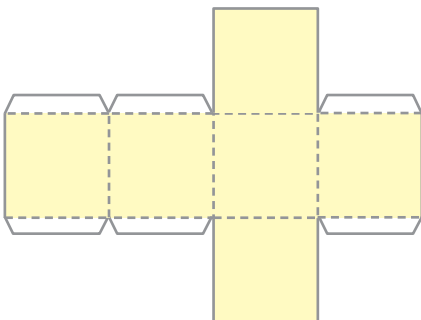
a.



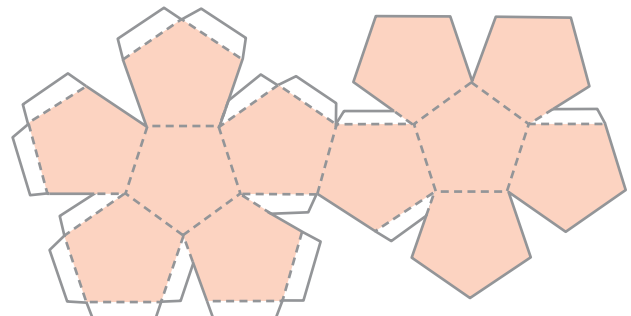
b.



c.



d.

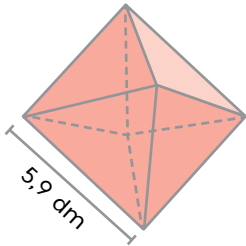


3. Para cada poliedro indicado determina lo solicitado.

a. Perímetro de una cara:

Área de una cara:

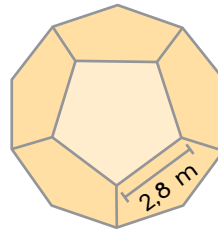
Área total del poliedro:



b. Perímetro de una cara:

Área de una cara:

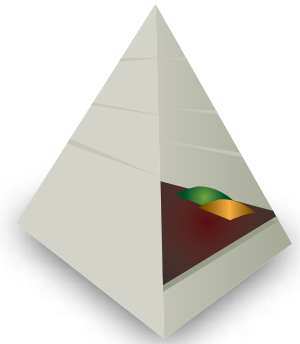
Área total del poliedro:



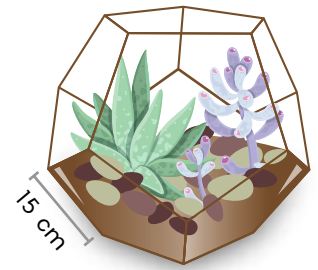
$$a_p \approx 6,88 \text{ m}$$

4. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una empresa decidió probar un nuevo producto: carpas para sol similares a la imagen. Si la carpa tiene forma de tetraedro regular de 2 m de lado, ¿cuántos metros cuadrados de lona necesitan para construirla? **Nota:** el piso no está forrado.



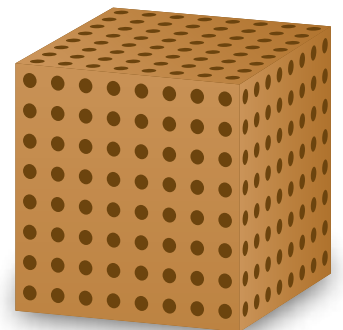
b. Isabel construyó un masetero con forma de dodecaedro regular similar al de la imagen del lado. Para no gastar mucho dinero colocó vidrio únicamente a las 6 caras inferiores. ¿Cuántos centímetros cuadrados de vidrio utilizó?



$$a_p \approx 10,32 \text{ cm}$$

c. Marco construyó 6 bancos cúbicos de madera similares a la imagen. Si la altura de cada banco es de 1 m e hizo en cada cara 64 huecos circulares de 8 cm de diámetro.

- ¿Cuántos centímetros cuadrados utilizó en cada lado del banco?
- ¿Cuánta madera utilizó en un banco completo?
- Si construyó 6 bancos, ¿cuántos metros cuadrados de madera utilizó en total?



Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante el trimestre. Utiliza la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico la diferencia entre una circunferencia y un círculo a través de su definición.			
2. Trazo con precisión los elementos de la circunferencia y el círculo utilizando el juego de geometría.			
3. Trazo con seguridad ángulos en una circunferencia utilizando el juego de geometría.			
4. Distingo los ángulos centrales en el círculo.			
5. Distingo los ángulos inscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.			
6. Distingo los ángulos semiinscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.			
7. Distingo los ángulos exteriores e interiores.			
8. Determino las medidas de ángulos inscritos cuyo ángulo central está al interior del ángulo inscrito y viceversa.			
9. Identifico correctamente los poliedros regulares.			
10. Describo con precisión los poliedros regulares.			
11. Construyo con creatividad poliedros regulares.			
12. Resuelvo problemas relacionados con el área de las caras. Utilizo la fórmula para calcular el área de las caras de un poliedro regular. de un poliedro.			
13. Resuelvo problemas relacionados con el área de las caras de un poliedro.			

Estadística

La estadística tuvo sus orígenes en actividades que estaban relacionadas directamente con la organización política, jurídica y administrativa de distintas civilizaciones, entre las que se pueden mencionar los egipcios, los babilonios y los romanos; para ello, los funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, matrimonios y defunciones, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas que poseían los territorios conquistados. Sin embargo, John Graunt (1620-1674) fue el primero que colocó las bases de una estadística científica, realizando un trabajo a partir de las tablas de mortalidad de la ciudad de Londres.

La estadística juega un papel clave en áreas diversas: en educación, permite estudiar las características de la población estudiantil y su distribución geográfica; en economía, sirve para estudiar las finanzas de empresas e instituciones, o el esquema de los salarios de la población; en biología, es una herramienta para estudiar las poblaciones de animales o plantas, y así en numerosas disciplinas.

La estadística no solo describe fenómenos, sino que proporciona herramientas metodológicas que facilitan la recolección, la comparación y el análisis de datos, con el fin de generar modelos para hacer predicciones y facilitar la toma de decisiones. Por ejemplo, las redes sociales, se nutren de un continuo análisis estadístico en el desarrollo de sus aplicaciones internas.



En esta unidad aprenderás a...

- Definir cada una de las medidas de tendencia central.
- Identificar situaciones donde se puede calcular la media, la mediana y la moda.
- Calcular con exactitud la media, la moda y la mediana de datos agrupados.
- Resolver problemas aplicando las fórmulas para calcular las medidas de tendencia central de datos agrupados.

Medidas de tendencia central para datos no agrupados



Recuerda

Al construir la tabla de frecuencias se anota en la primera columna el dato y en la segunda la frecuencia de ese dato.

1.1 Moda para datos no agrupados

Problema

En un centro de salud anotaron la edad de los niños que atendieron en una semana. Obtuvieron los siguientes datos:

5	6	5	6	6	7	8	10	9	5
5	6	10	7	6	5	9	6	6	5
8	7	9	5	10	6	6	7	6	9

Realiza las siguientes actividades:

1. Construye la tabla de frecuencia de los datos obtenidos.
2. ¿Qué edad tiene el menor infante que se atendió? ¿Y el mayor?
3. ¿Cuál fue la edad que más se repitió? ¿Qué representa ese dato?



¡Atención!

De la tabla de frecuencias se pueden obtener algunas conclusiones, por ejemplo:

- Se atendieron 3 niños de 10 años.
- Solo dos de los niños atendidos tenían 8 años.
- En una semana se atendieron 30 niños en total cuyas edades rondan entre los 5 y 10 años.

Solución

1. Al construir la tabla de frecuencias se observa que los datos van desde 5 hasta 11, luego, se cuenta las veces que se repite cada uno y se obtiene la tabla del lado derecho.
2. Al observar la tabla se nota que la menor edad de los niños atendidos es 5 años y la mayor edad 10 años.
R: La edad del menor infante que se atendió es 5, y del mayor, 10.
3. Al observar la columna "Frecuencia" se ve que la mayor es 10, es decir, el dato que más se repitió fue 6 años.

Edad	Frecuencia
5	7
6	10
7	4
8	2
9	4
10	3
Total	30

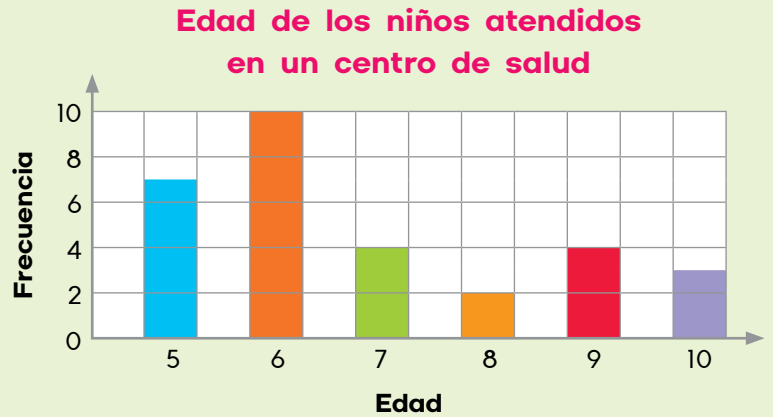
R: La edad que más se repitió fue 6 años, es decir, la mayoría de los niños atendidos tenían 6 años.

Conclusión

Los datos de un estudio pueden resumirse en tablas de frecuencias o gráficas. Por ejemplo, la imagen corresponde a la representación gráfica de los datos del problema inicial.

En un estudio estadístico existen datos representativos, uno de ellos es la **moda** (M_o) que corresponde al dato de mayor frecuencia absoluta. Un estudio puede no tener moda, poseer una moda, dos modas (bimodal) o tres o más modas (multimodal).

Por ejemplo, en el problema inicial la moda es 6, es decir, $M_o = 6$. Si se observa en la gráfica, corresponde a la columna más alta.



Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Determina en cada grupo de datos las modas. Indica si es bimodal o multimodal.

a. $M_o =$

35	21	15	0	53	17	28	40	21	35
21	35	10	35	21	53	21	35	21	35

b. $M_o =$

89	16	89	16	16	2	89	10	89	61
12	16	12	1	12	11	12	13	26	98

2. Completa la tabla y determina la moda.

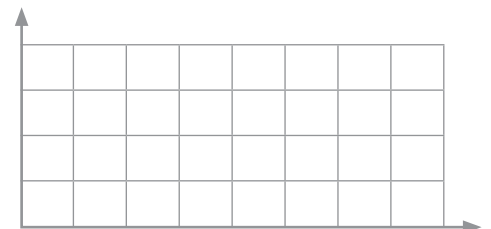
$M_o =$

Estudiantes según nivel	
Nivel	Frecuencia
7.º	86
8.º	
9.º	92
Total	279

3. Construye la gráfica que resuma los datos que obtuvo un docente en las notas de un examen.
- Determina la moda.

$M_o =$

5	4	5	3	5	5	3	3	4	4
4	5	3	2	4	2	3	4	5	2

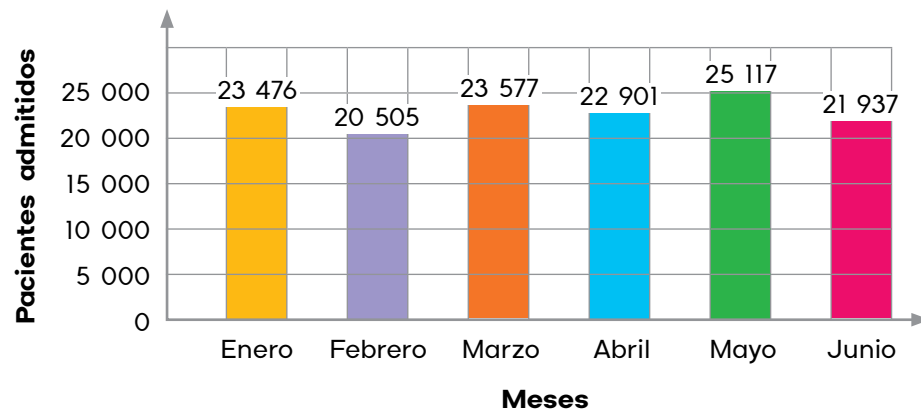


1.2 Media aritmética para datos no agrupados

Problema

La gráfica muestra los pacientes admitidos en hospitales entre los meses de enero y junio de 2021.

Pacientes admitidos en los hospitales de la República según mes: enero-junio de 2021



Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Censo - Panamá.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál fue la menor cantidad de pacientes admitidos? ¿En qué mes sucedió?
2. ¿Cuál es la moda de los datos? ¿Qué representa?
3. En promedio, ¿cuántos pacientes se admitieron por mes?

Solución

1. Al observar las barras se nota que la más baja corresponde a la del mes de febrero con 20 505 pacientes admitidos.
R: 20 505 pacientes, en febrero.
2. Las barra más alta es la de mayo con 25 117 pacientes admitidos.
R: La moda de los datos es mayo y corresponde al mes en que se admitió la mayor cantidad de pacientes.
3. Para calcular el promedio de los pacientes admitidos deben sumarse todos los datos y dividirse entre el número de datos. Los datos corresponden a la cantidad de pacientes admitidos según mes, y el número de datos a la cantidad de meses en que se desarrolló el estudio. Así:

$$\bar{x} = \frac{23\,476 + 20\,505 + 23\,577 + 22\,901 + 25\,117 + 21\,937}{6} \approx 22\,918,8$$

R: Se admitieron 22 919 pacientes en promedio por mes.

¿Sabías qué...?

De la gráfica se pueden obtener algunas conclusiones, como:

- Los meses en que se admitieron más pacientes fueron mayo y marzo.
- Se admitieron más de 20 mil pacientes por mes.
- En 6 meses se admitió un total de 137 513 pacientes.



Desarrollo sostenible

Al enfermar, es necesario consultar a un médico con prontitud y no automedicarse, pero también existen acciones que reducen el riesgo de contraer enfermedades, como tener una alimentación saludable, ejercitarse regularmente, dormir suficiente y practicar hábitos de higiene. Investiga sobre otras medidas de prevención y compártelas con los miembros de tu familia.

Conclusión

Otra medida representativa es el **promedio o media aritmética** (\bar{x}). Para calcular el promedio de un grupo de datos no agrupados se suman los datos y se divide entre el total de datos (**n**):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Si los datos son cuantitativos y se encuentran en una tabla de frecuencias, se multiplica cada dato por la frecuencia, se suman y se divide entre el total de datos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{n}$$

Por ejemplo, al calcular el promedio de las notas del examen representadas en la tabla es 3,81 porque:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 7}{26} \approx 3,92$$

Notas de un examen	
Nota	Frecuencia
2	2
3	5
4	12
5	7
Total	26



¡Atención!

El promedio o media aritmética es un valor que representa al grupo de datos. Por ejemplo, en la tabla de las notas de un examen el promedio fue 3,92 lo que implica que los resultados en general fueron positivos.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Determina la moda y el promedio de cada grupo de datos que representan las edades de dos familias.

- a. Familia Gómez

\bar{x} = Mo =

36	23	42	15	75	70	21	32	8	15
----	----	----	----	----	----	----	----	---	----

- b. Familia Quesada

\bar{x} = Mo =

1	3	3	40	7	36	50	1	16	16
3	36	1	16	40	36	7	56	80	3

2. Completa las representaciones de cada grupo de datos. Determina la moda y el promedio.

- a. Estatura en metros de un grupo de niños

\bar{x} = Mo =

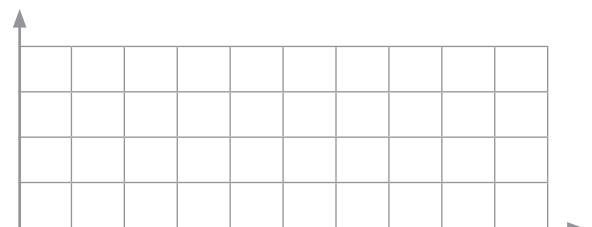
0,9	1,2	0,5	0,7	1,4	1,5	0,7	0,9	1,5	1,4
0,5	1,4	0,7	1,4	0,5	1,5	1,4	1,5	0,7	0,9

Estatura									
Frecuencia									

- b. Kilogramos de periódico recolectado por día

\bar{x} = Mo =

10	18	15	20	15	20	15	20	15	18
20	15	20	15	20	18	10	25	15	20



1.3 Mediana para datos no agrupados

Problema



Desarrollo sostenible

Para lograr el desarrollo de la sociedad es indispensable que los hombres y las mujeres tengan igualdad de derechos y de oportunidades.

En una caminata los participantes decidieron recoger las botellas plásticas del camino. Anotando por separado lo que recogen las mujeres y los hombres.

Estas son las botellas recolectadas por género.

Mujeres

2	8	9	11	6	8	5
5	6	5	9	9	6	4

Hombres

3	9	5	10	9	7	4
5	7	10	5	5	1	

Realiza las siguientes actividades:

1. Determina la moda de los datos según género.
2. Calcula el promedio de los datos según género.
3. Ordena los datos de cada género ascendentemente. Luego, determina cuál valor se ubica en la mitad de los datos ordenados.
4. Indica el menor y el mayor valor de los datos según cada género.

Solución



Recuerda

Ordenar ascendentemente es anotar los datos del menor al mayor.

1. En los datos de las mujeres se observa que aparece tres veces 5, 6 y 9, por lo tanto, tendría una multimoda: 5, 6 y 9. En los hombres, la moda es 5 porque aparece 4 veces.

2. Al calcular el promedio según género, se obtiene lo siguiente:

$$\text{Mujeres: } \bar{x} = \frac{2 + 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 11}{14} \approx 6,64$$

$$\text{Hombres: } \bar{x} = \frac{1 + 3 + 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 2}{13} \approx 6,15$$

3. Se ordenan los datos ascendentemente, y para determinar el dato que está a la mitad se avanza desde los extremos hasta el centro. Así:

Mujeres:
 2-4-5-5-5-6-6-6-8-8-9-9-9-11

Hombres:
 1-3-4-5-5-5-5-7-7-9-9-10-10

En las mujeres hay dos datos centrales que corresponden al mismo número: 6. En los hombres el dato central es 5.

4. En las mujeres el dato menor es 2 y el mayor 11. En los hombres el dato menor es 1 y el mayor 10.

Conclusión

Otras medidas representativas en una distribución de datos cuantitativos es el **rango (R)** y la **mediana (M_e)**.

El **rango** es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. Indica cuán dispersos son los datos. Por ejemplo, en el problema inicial el rango de las mujeres es 9 ($R = 11 - 2$).

La **mediana** es el valor central de un grupo de datos ordenados, por ello divide los datos a la mitad. Al calcular la mediana en un grupo de datos no agrupados, primero se ordenan de forma ascendente; luego, se considera si el total de datos es par o impar:

- **n impar:** El valor central de los datos es la mediana.
- **n par:** El promedio de los dos valores centrales es la mediana.

Por ejemplo, en el problema inicial se tienen los siguientes casos:

- En las mujeres **n** es par ($n = 14$), por lo tanto, $Me = \frac{6+6}{2} = 6$.

2-4-5-5-5-6-6-6-8-8-9-9-9-11

- En los hombres como **n** es impar ($n = 13$), entonces $Me = 5$.

1-3-4-5-5-5-5-7-7-9-9-10-10



La moda, el promedio, la mediana y el rango son llamadas medidas de tendencia central.



Al calcular la mediana en una tabla o gráfica, recuerda que 50% de los datos son menores que ella y el otro 50% mayores.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Determina la moda, el promedio, la mediana y el rango de cada grupo de datos.

a. $M_o = \dots\dots\dots$ $\bar{x} = \dots\dots\dots$
 $M_e = \dots\dots\dots$ $R = \dots\dots\dots$

16	15	25	22	33	12	30	25	16
----	----	----	----	----	----	----	----	----

b. $M_o = \dots\dots\dots$ $\bar{x} = \dots\dots\dots$
 $M_e = \dots\dots\dots$ $R = \dots\dots\dots$

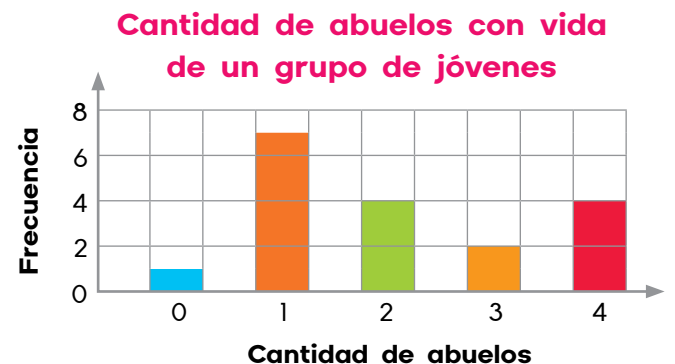
2	5	12	3	9	0	2	5	8	2
---	---	----	---	---	---	---	---	---	---

2. Determina la mediana y el rango de cada representación.

a. $M_e = \dots\dots\dots$ $R = \dots\dots\dots$

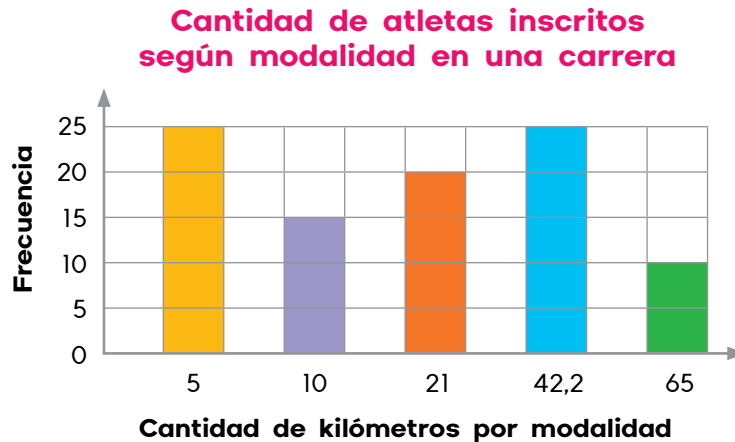
b. $M_e = \dots\dots\dots$ $R = \dots\dots\dots$

Cantidad de primos de un grupo de amigos	
Cantidad de primos	Frecuencia
1	1
2	4
3	7
4	9





1. Analiza la gráfica y contesta.



- a. ¿Cuántos atletas en total se inscribieron en la carrera?
- b. ¿Cuál es la moda de los datos? ¿Qué indica ese dato?
- c. ¿Cuál es el rango de los datos? ¿Qué conclusión se puede obtener al respecto?
- d. Determina la media aritmética de los datos.
- e. ¿Cuál es la mediana de los datos?
- f. En una maratón se corren aproximadamente 42,2 km y si se corren más kilómetros, ultramaratón; entonces, ¿cuántas personas en total se inscribieron para maratón y ultramaratón?
- g. El 50% de los inscritos para la modalidad que es aproximadamente media maratón no lograron terminarla. ¿Cuántas personas la finalizaron?
- h. Una quinta parte de los inscritos para 5 km no la finalizaron. En esa modalidad, ¿cuántas personas la terminaron?
- i. El costo de la inscripción para los 5 km fue 20 balboas; en la de 10 km, 30 balboas; la de 21 km, 40; maratón, 50 y ultramaratón, 60. ¿Cuántos balboas en total se recolectaron en inscripciones?

Medidas de tendencia central para datos agrupados

2.1 Distribución de frecuencias para datos agrupados

Problema

En un salón de belleza anotaron la edad de las personas que atendieron el fin de semana y obtuvieron los datos de la derecha.

24	23	30	29	31	28	24	21	26	24
27	26	24	30	32	29	30	39	24	22
21	22	27	33	30	24	22	24	21	20

Realiza las actividades:

1. Clasifica los datos de la cuadrícula en 5 grupos de 4 en 4. Inicia en 20 y termina en 40.
2. Construye una tabla de frecuencias que resuma las edades de los clientes según la clasificación realizada en el ejercicio 1.
3. ¿En cuál grupo se concentró el mayor número de clientes?
4. ¿Qué cantidad de clientes tiene la mayor edad registrada?
5. ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad inferior a 32 años?

Solución

1. Para clasificar los datos, primero se crean los grupos. Como deben iniciar en 20 e ir de 4 en 4, entonces los grupos serán de 20 a 24, de 24 a 28, de 28 a 32, de 32 a 36 y de 36 a 40.

Luego, se clasifican siguiendo el orden en que aparecen, así:

	24			
	24			
	27			
20	24	30		
21	24	30		
22	26	29		
22	27	30		
21	24	28		
22	26	31		
21	24	29	33	
23	24	30	32	39
De 20 a 24	De 24 a 28	De 28 a 32	De 32 a 36	De 36 a 40



Recuerda

Cada valor de la cuadrícula es un dato. Por ello, es importante verificar que todos los datos se tomaron en cuenta.



¡Atención!

En cada grupo se incluye el primer valor y se excluye el segundo de los utilizados para establecerlo.

Por ejemplo, la clasificación de 20 a 24 incluye el 20 pero el 24 se excluye (no se toma en cuenta), es decir, las edades 24 se anotan en la segunda columna, en el grupo que empieza con 24.

2. Para construir la tabla de frecuencias se escribe el título que explique de qué trata el estudio. Luego, se construyen dos columnas:
- En la primera se anotan las clasificaciones.
 - En la segunda la frecuencia obtenida en cada clasificación.

Así se obtiene la tabla de la derecha.

Edad de los personas atendidas en un salón de belleza	
Clasificación	Frecuencia
De 20 a 24	8
De 24 a 28	11
De 28 a 32	8
De 32 a 36	2
De 36 a 40	1
Total	30

3. En el grupo de edades de 24 a 28 años queda concentrado el mayor número de clientes, 11 clientes en total.
4. La mayor edad registrada (dato mayor) fue 39 años, que corresponde a una persona.
5. Para determinar la cantidad de clientes que tienen menos de 32 años, se cuentan los que quedan en los primeros 3 grupos: $8 + 11 + 8 = 27$, es decir, 27 clientes tienen una edad inferior a 32 años.

Conclusión

Cuando los datos de un estudio estadístico son muchos o muy variados, se organizan en series de grupos que luego se representan en una **tabla de distribución de datos agrupados**.

En una tabla de frecuencias de datos agrupados cada clasificación o grupo de datos se llama **clase** y el total de datos de esa clase se llama **frecuencia**. Por ejemplo, la tabla del problema inicial se representa así:

Edad de los personas atendidas en un salón de belleza		
Clases	x_i	f_i
	[20, 24)	8
	[24, 28)	11
	[28, 32)	8
	[32, 36)	2
	[36, 40]	1
	Total	30

El paréntesis cuadrado indica que el número se incluye en la clase, el paréntesis redondo que se excluye. En la última clase se incluyen ambos límites.

Frecuencia absoluta
Se obtiene a través del conteo.

Para organizar una serie de datos en una tabla de frecuencias de datos agrupados se siguen estos pasos:

1. Se calcula el **rango**: $\text{Rango} = \text{Dato mayor} - \text{Dato menor}$.
2. Se determina la **amplitud de cada clase**, para hacerlo, se divide el rango entre la cantidad de clases que se desean: $\text{Amplitud} = \text{Rango} \div \text{número de clases}$.
3. Se escriben los **límites** de cada clase procurando que tengan la misma amplitud.
4. Se determina la **frecuencia absoluta (fi)** de cada clase a través de un conteo.

- Se calcula la **marca de cada clase** o punto medio (**Pm**) sumando el límite inferior y el límite superior de la clase y dividiendo el resultado entre 2: $Pm = \frac{L_{inf} + L_{sup}}{2}$
- De ser necesario se calcula la **frecuencia acumulada (Fa)** que corresponde a acumular las frecuencias, es decir, anotar en cada clase el total de frecuencias de esa clase más las anteriores a ella.

Observa cómo se hace

Pedro realizó una investigación sobre los salarios en balboas de un grupo de profesionales y obtuvo estos datos:

1600	800	1350	1000	1399	1190	1290	1199	1300	975	1375	1100	1100	995	1200
850	1300	1150	1375	805	1210	930	1080	1095	1195	1350	1390	900	1399	600

Construye una tabla de frecuencias acumulada con 5 clases que resuma la información. Incluye la marca de la clase y la frecuencia acumulada.

Al construir la tabla de frecuencias acumulada se siguen los siguientes pasos:

- Se calcula el rango, como el dato menor es 600 y el mayor 1600, entonces:

$$\text{Rango} = \text{Dato mayor} - \text{Dato menor} = 1600 - 600 = 1000$$

- Se determina la amplitud, dado que solicitan 5 clases, entonces:

$$\text{Amplitud} = \text{Rango} \div \text{número de clases} = 1000 \div 5 = 200$$

- Se escriben los límites de cada clase así:

En la primera clase se escribe el dato menor como límite inferior y se le agrega el valor de la amplitud para obtener el límite superior. Es decir, **clase 1** \rightarrow **[600, 800)**.

En la segunda clase se escribe el valor del límite superior de la clase anterior y se le agrega el valor de la amplitud para obtener el otro límite: **clase 2** \rightarrow **[800, 1000)**.

Y así sucesivamente con las demás clases, por lo tanto se obtendrían estas clases:

clase 1 \rightarrow [600, 800) clase 3 \rightarrow [1000, 1200) clase 5 \rightarrow [1400, 1600]
 clase 2 \rightarrow [800, 1000) clase 4 \rightarrow [1200, 1400)

- Se completa la tabla con las frecuencias absolutas y acumuladas y la marca de cada clase:

Salario en balboas de un grupo de profesionales			
xi	fi	Fa	Pm
[600, 800)	1	1	$\frac{L_{inf} + L_{sup}}{2} = \frac{600 + 800}{2} = 700$
[800, 1000)	7	1 + 7 = 8	900
[1000, 1200)	9	8 + 9 = 17	1100
[1200, 1400)	12	29	1300
[1400, 1600]	1	30	1500
Total	30		



1. Completa la tabla. Luego, responde.

Ingreso mensual en balboas de los trabajadores de una empresa			
xi	fi	Fa	Pm
[200, 450)	7	7	
[450, 700)	15	22	
[700, 950)		34	
[950, 1200)	18		
[1200, 1450)	5		
[1450, 1700]			
Total	60		

- ¿Cuál es el rango de la distribución de frecuencias?
 - ¿Cuántas clases tiene la distribución de frecuencias?
 - ¿Cuál es la amplitud de cada clase?
 - Escribe tres posibles salarios de las personas ubicadas en la tercera clase.
 - ¿Cuál puede ser el menor y el mayor salario que percibe un trabajador en esa empresa?
 - ¿Cuántas personas reciben un salario menor a 1200 balboas?
 - ¿Cuántas personas reciben un salario mayor o igual a 1450 balboas?
2. Analiza la situación y realiza las actividades.
"En un supermercado los precios de los productos del área de hogar oscilan entre los 2 y los 212 balboas".
- Determina el rango de la distribución de frecuencias.
 - Si se desea 7 clases, ¿cuál debe ser la amplitud de cada clase?
 - Escribe los límites de cada clase.
 - Calcula la marca de cada clase.

3. Analiza la situación y realiza las actividades.

En una tienda de ropa deportiva llevan el control de las ventas diarias. Las siguientes son las ventas en balboas del último mes:

328	550	450	575	475	579	467	534	450	515	390	520	575	500	625
529	428	378	455	600	430	577	425	545	477	500	400	523	628	478

- Determina el rango de los datos.
- Calcula la amplitud, si se desean 6 clases.
- Escribe en los límites de cada clase.
- Completa la tabla con los datos correspondientes.

Venta diaria en balboas de una tienda de ropa deportiva			
xi	fi	Fa	Pm
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
[<input type="text"/> , <input type="text"/>)			
Total			

- ¿Cuánto fue la menor y la mayor venta diaria del mes?
 - ¿Cuántos días vendieron menos de 428 balboas?
4. Los siguientes datos representan la estatura en centímetros de un grupo de amigos. Construye su tabla de frecuencias con 8 clases.

142	158	166	168	167	147	163	157
174	165	175	143	165	170	161	156
179	159	150	180	177	171	162	155
148	165	183	152	164	169	160	189



¡Atención!

Aproxima la amplitud a la unidad.

2.2 Moda para datos agrupados

Problema



¡Atención!

La clase modal se relaciona con la moda de los datos de un estudio estadístico.

En la tabla se muestra la edad de las personas atendidas en un salón de belleza en un día.

Responde lo siguiente:

1. ¿Cuál clase tiene la mayor frecuencia?
2. Si la clase obtenida en el ejercicio anterior es la clase modal del grupo de datos, ¿qué representa ese dato para el estudio?

Edad de los personas atendidas en un salón de belleza	
x_i	f_i
[20, 24)	8
[24, 28)	11
[28, 32)	8
[32, 36)	2
[36, 40]	1
Total	30

Solución

1. En la tabla se observa que la mayor frecuencia es 11, por lo tanto, la clase con la mayor frecuencia es [24, 28).
2. La clase modal es la que tiene la mayor frecuencia absoluta, es decir, la mayoría de las personas que asistieron al salón de belleza ese día tenían entre 24 y 28 años.

Conclusión



Recuerda

La moda de un estudio estadístico es el dato que más se repite. Además, en un estudio, puede que no haya moda o que haya varias.

La clase modal es la que tiene la mayor frecuencia absoluta, además, puede que a veces no haya clase modal o que haya más de una.

Cálculo de la moda en datos agrupados

Para calcular la **moda** (M_o) de un grupo de datos agrupados se utiliza la siguiente fórmula:

$$M_o = L_{inf} + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] i$$

Donde:

L_{inf} : límite inferior de la clase modal

d_1 : frecuencia de la clase modal menos la frecuencia anterior

d_2 : frecuencia de la clase modal menos la frecuencia posterior

i : amplitud del intervalo de clase

Observa cómo se hace

Observa cómo se calcula la moda del **Problema** de la página 120:

- Se identifica la clase modal (la de mayor frecuencia absoluta) y se extraen estos datos:
 - Límite inferior: $L_{inf} = 24$
 - Frecuencia de la clase modal: $f_{mod} = 11$
 - Frecuencia de la clase anterior: $f_{ant} = 8$
 - Frecuencia de la clase posterior: $f_{pos} = 8$
 - Amplitud del intervalo: $i = 28 - 24 = 4$
- Se calcula d_1 : $d_1 = f_{mod} - f_{ant} = 11 - 8 = 3$.
- Se determina d_2 : $d_2 = f_{mod} - f_{pos} = 11 - 8 = 3$.
- Se sustituyen los valores en la fórmula y se resuelve:

xi	fi
[20, 24)	8
[24, 28)	11
[28, 32)	8
[32, 36)	2
[36, 40]	1
Total	30

$$M_o = L_{inf} + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] i = 24 + \left[\frac{3}{3 + 3} \right] \cdot 4 = 26$$

¿Qué pasaría?

También se pueden incluir todas las operaciones en la fórmula y resolverlas directamente:

$$\begin{aligned} M_o &= L_{inf} + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] i \\ &= 24 + \left[\frac{11 - 8}{11 - 8 + 11 - 8} \right] \cdot 4 \\ &= 24 + \left[\frac{3}{6} \right] \cdot 4 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



- Determina la información solicitada según los datos de la tabla.
 - Clase modal:
 - Límite inferior de la clase modal:
 - Frecuencia de la clase modal:
 - Frecuencia de la clase anterior:
 - Frecuencia de la clase posterior:
 - Amplitud de cada intervalo:
 - $d_1 = \dots - \dots = \dots$
 - $d_2 = \dots - \dots = \dots$

i. $M_o = L_{inf} + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] i = \boxed{} + \left[\frac{\boxed{}}{\boxed{} + \boxed{}} \right] \cdot \boxed{} \approx \boxed{}$

- Analiza la información de la tabla.
 - Calcula la moda.
 - Escribe una conclusión relacionada con el cálculo de la moda.

Basura recolectada en kilogramos, en un grupo de comunidades

xi	fi
[50, 60)	1
[60, 70)	6
[70, 80)	7
[80, 90)	9
[90, 100]	5

Salario en balboas de un grupo de profesionales

xi	fi
[600, 800)	1
[800, 1000)	7
[1000, 1200)	9
[1200, 1400)	12
[1400, 1600]	1

2.3 Media aritmética para datos agrupados



Recuerda

La marca de cada clase o punto medio corresponde a la suma de sus límites dividido entre 2.

$$P_m = \frac{L_{inf} + L_{sup}}{2}$$

Problema

En la tabla se muestra el ingreso mensual de un grupo de familias.

Responde:

1. ¿Qué representa los valores de la columna **Pm**?
2. ¿Cuántas familias en total participaron de la encuesta?

Salario de un grupo de familias		
xi	fi	Pm
[220, 350)	3	285
[350, 480)	4	415
[480, 610)	12	545
[610, 740)	24	675
[740, 870)	15	805
[870, 1000]	7	935

Solución

1. La columna **Pm** es la marca de cada clase, también llamada punto medio y corresponde al promedio de cada clase.
2. Para determinar el total de familias que participaron en la encuesta se suman las frecuencias de cada clase, por lo tanto:

$$n = 3 + 4 + 12 + 24 + 15 + 7 = 65$$

Conclusión



¡Atención!

La media aritmética de un grupo de datos agrupados es el valor que los representa.

Para calcular la **promedio o media aritmética** (\bar{x}) de un grupo de datos agrupados se utiliza la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{P_{m1} \cdot f_1 + P_{m2} \cdot f_2 + P_{m3} \cdot f_3 + \dots + P_{mc} \cdot f_c}{n}$$

Donde:

P_{mi} : Marca de la i -ésima clase

f_i : frecuencia de la i -ésima clase

c : cantidad total de clase

n : número total de datos

Entonces:

$P_{m1} \cdot f_1$ corresponde al producto de la marca de la clase por la frecuencia de la primera clase.

$P_{m2} \cdot f_2$ corresponde al producto de la marca de la clase por la frecuencia de la segunda clase y así sucesivamente.

Observa cómo se hace

Observa la forma en que se calcula el promedio del **Problema** de la página 122:

1. Se identifica la marca de la clase o se calcula.

2. Se identifica o calcula el valor de n :

$$n = 3 + 4 + 12 + 24 + 15 + 7 = 65$$

3. Como son 6 clase la fórmula para el cálculo del promedio es la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{Pm_1 \cdot f_1 + Pm_2 \cdot f_2 + Pm_3 \cdot f_3 + Pm_4 \cdot f_4 + Pm_5 \cdot f_5 + Pm_6 \cdot f_6}{n}$$

4. Se sustituyen los valores en la fórmula y se resuelve:

$$\bar{x} = \frac{285 \cdot 3 + 415 \cdot 4 + 545 \cdot 12 + 675 \cdot 24 + 805 \cdot 15 + 935 \cdot 7}{65}$$

$$\bar{x} = 675$$

Salario de un grupo de familias		
xi	fi	Pm
[220, 350)	3	285
[350, 480)	4	415
[480, 610)	12	545
[610, 740)	24	675
[740, 870]	15	805
[870, 1000]	7	935

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Calcula la media aritmética de los datos de la tabla donde se resume los salarios de un grupo de profesionales.

xi	fi	Pm
[600, 800)	1	700
[800, 1000)	7	900
[1000, 1200)	9	1100
[1200, 1400)	12	1300
[1400, 1600]	1	1500

2. Una empresa realizó una evaluación de desempeño a los trabajadores de los departamentos de ventas y bodega con una escala máxima de 100. Completa las tablas y contesta.

Nota obtenida en la evaluación de desempeño del departamento de ventas		
xi	fi	Pm
[50, 60)	2	
[60, 70)	5	
[70, 80)	3	
[80, 90)	7	
[90, 100]	8	

Nota obtenida en la evaluación de desempeño del departamento de bodega		
xi	fi	Pm
[50, 60)	2	
[60, 70)	0	
[70, 80)	8	
[80, 90)	7	
[90, 100]	8	

a. ¿Cuál es la media aritmética de la notas de ambos departamentos?

2.4 Cálculo de la mediana para datos agrupados

Problema



Recuerda

La **frecuencia acumulada (Fa)** corresponde al total de frecuencias de esa clase más las anteriores.

En la tabla se muestra la estatura en centímetros de un grupo de niños.

Realiza las actividades:

1. Completa la columna **Fa**.
2. ¿Cuántos niños participaron en la encuesta?
3. ¿En cuál clase se ubica la mediana de los datos?
4. Si los datos de la tabla son los de la cuadrícula, ¿cuál es la mediana de los datos?

xi	fi	Fa
[132, 137)	3	
[137, 142)	5	
[142, 147)	5	
[147, 152)	6	
[152, 157]	1	

132	145	146	148	140	139	149	150	136	146
142	147	133	155	140	146	151	138	147	137

Solución

1. La columna Fa corresponde a la frecuencia acumulada, para obtenerla se suma la frecuencia absoluta de la clase más las anteriores. Por tanto la tabla se completa tal cual está a la derecha:

xi	fi	Fa
[132, 137)	3	3
[137, 142)	5	8
[142, 147)	5	13
[147, 152)	6	19
[152, 157]	1	20

2. Para determinar el total de niños que participaron en la encuesta se suman las frecuencias de cada clase, por lo tanto:

$$n = 3 + 5 + 5 + 6 + 1 = 20$$
3. Para determinar la clase donde se ubica la mediana se debe recordar que la mediana es el dato central. Como $n = 20$ (n par), la mediana corresponderá al promedio de dos posiciones la 10 y la 11, Si se observa la columna **Fa**, esas posiciones están en la clase [142, 147).
4. Al ordenar los datos se obtiene:

132-133-136-137-138-139-140-140-142-145-146-146-146-147-147-148-149-150-151-155

Por tanto: $Me = \frac{145 + 146}{2} = 145,5$ que se ubica en la clase [142, 147).



¡Atención!

La **mediana** es el valor que divide los datos a la mitad. Es decir, el 50% de los datos son mayores a ella y el otro 50% menores.

Para calcularla en un grupo de datos no agrupados, se ordenan ascendentemente, luego, si n es impar, la mediana será el valor central de los datos. Si n es par será el promedio de los dos valores centrales.

Conclusión

Para calcular la **mediana** (M_e) de un grupo de datos agrupados se utiliza la siguiente fórmula:

$$M_e = L_{\text{inf}} + \left[\frac{\frac{n}{2} - Fa_a}{f_i} \right]_i$$

Donde:

L_{inf} : límite inferior de la clase mediana

n : número de datos

Fa_a : frecuencia acumulada anterior

i : amplitud del intervalo de clase

f_i : frecuencia absoluta

Observa cómo se hace

Observa la forma como se calcula la mediana del **Problema** de la página 124 usando la fórmula:

1. Se determina el valor de n :

$$n = 3 + 5 + 5 + 6 + 1 = 20$$

2. Se identifica el primer intervalo cuya frecuencia acumulada sea mayor que $\frac{n}{2}$, esa será la **clase mediana**:

$$\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

La clase mediana es [142, 147) porque es la primera clase donde la frecuencia acumulada (Fa) es mayor a 10.

3. Determina en la clase mediana lo siguiente:
- Límite inferior: $L_{\text{inf}} = 142$
 - Frecuencia acumulada anterior: $Fa_a = 8$
 - Frecuencia absoluta de la clase mediana: $f_i = 5$
 - Amplitud del intervalo: $i = 147 - 142 = 5$

4. Se sustituyen los valores en la fórmula y se resuelve:

$$M_e = L_{\text{inf}} + \left[\frac{\frac{n}{2} - Fa_a}{f_i} \right]_i = 142 + \left[\frac{20}{2} - 8 \right]_5 \approx 144$$

xi	fi	Fa
[132, 137)	3	3
[137, 142)	5	8
[142, 147)	5	13
[147, 152)	6	19
[152, 157]	1	20



Datos interesantes

Al calcular la mediana en datos agrupados no se conoce cuáles números son o si se repiten, entonces se determina un dato aproximado. Por lo tanto, es posible que la mediana que se obtenga con los datos agrupados no sea parte de los datos recolectados.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Anota en el cuaderno la fórmula para calcular la mediana en un conjunto de datos agrupados y explica la forma en que se aplica.

Fórmula:

Procedimiento:

2. Anota los elementos indicados según los datos de la tabla y calcula la mediana.

- a. $n =$
- b. Clase mediana:
- c. $L_{inf} =$
- d. $Fa_a =$
- e. $f_i =$
- f. $i =$
- g. $M_e \approx$

3. Completa las tablas y contesta.

Masa en kilogramos de los estudiantes del 8-A		
x_i	f_i	Fa
[40, 47)	3	
[47, 54)	7	
[54, 61)	8	
[61, 68)	2	
[68, 75]	6	

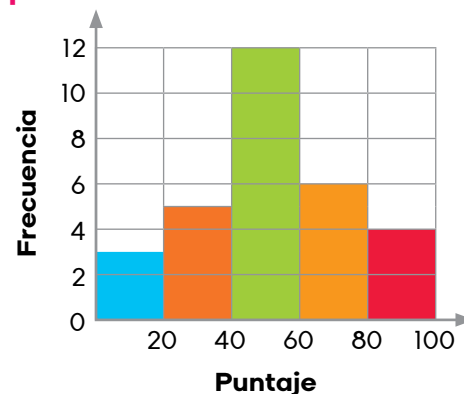
Salarios de un grupo de profesionales		
x_i	f_i	Fa
[600, 800)	1	1
[800, 1000)	7	8
[1000, 1200)	9	17
[1200, 1400)	12	29
[1400, 1600]	1	30

Masa en kilogramos de los estudiantes del 8-B		
x_i	f_i	Fa
[40, 47)	4	
[47, 54)	6	
[54, 61)	7	
[61, 68)	6	
[68, 75]	3	

- a. ¿Cuál es la mediana de la masa de los estudiantes del grupo 8-A?
- b. ¿Cuál es la mediana de la masa de los estudiantes del grupo 8-B?
- c. ¿Qué conclusión puede obtenerse al comparar ambos resultados?
4. En octavo grado de un centro educativo se aplicó una prueba diagnóstica a dos grupos. Un docente decidió graficar los resultados para analizar los datos.

- a. $n =$
- b. Clase mediana:
- c. $L_{inf} =$
- d. $Fa_a =$
- e. $f_i =$
- f. $i =$
- g. $M_e \approx$
- h. Anota una conclusión relacionada con la mediana del estudio.

Puntaje obtenido en la evaluación por los estudiantes de octavo



¡Atención!

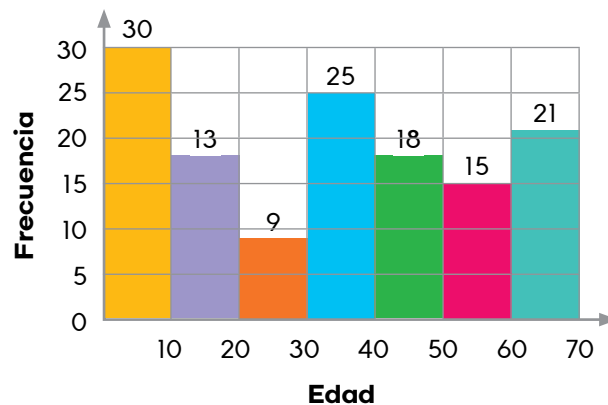
Este tipo de gráfica se llama **histograma** y se usa al representar datos agrupados. En ella cada columna representa una clase cuyos límites se observan en el eje horizontal. Ejemplo, la primera clase es $[0, 20)$ y su frecuencia es 3.

2.5 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Analiza la gráfica, construye la tabla de frecuencias para datos agrupados y contesta.
- Incluye en la tabla las columnas marca de la clase y frecuencia acumulada.

Edad de los pacientes atendidos en un centro de salud durante una semana



- a. Completa la tabla de frecuencias para datos agrupados relacionada con la gráfica.

Edad de los pacientes atendidos en un centro de salud durante una semana			
xi	fi	Fa	Pm

- b. ¿Cuántas personas en total se atendieron en el centro de salud en una semana?
- c. ¿Cuál es la moda de los datos?
- d. ¿Cuál es la rango de los datos? ¿Qué conclusión se puede obtener al respecto?
- e. Determina la media aritmética de los datos.
- f. ¿Cuál es la mediana de los datos?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Defino cada medidas de tendencia central: moda, media aritmética y mediana.			
2. Identifico situaciones donde se puede calcular la media aritmética.			
3. Identifico situaciones donde se puede calcular la mediana.			
4. Identifico situaciones donde se puede calcular la moda.			
5. Calculo con exactitud la media aritmética de datos no agrupados.			
6. Calculo con exactitud la mediana de datos no agrupados.			
7. Calculo con exactitud la moda de datos no agrupados.			
8. Resuelvo problemas aplicando las fórmulas para calcular las medidas de tendencia central de datos no agrupados.			
9. Calculo con exactitud la media aritmética de datos agrupados.			
10. Calculo con exactitud la mediana de datos agrupados.			
11. Calculo con exactitud la moda de datos agrupados.			
12. Resuelvo problemas aplicando las fórmulas para calcular las medidas de tendencia central de datos agrupados.			

Probabilidad

Los primeros conceptos de probabilidad nacieron en el ámbito de la resolución de problemas relacionados con los juegos de azar. Por ejemplo, en un juego dos personas elegían cara o sello al lanzar una moneda, el ganador sería aquel que lograba 5 caras o 5 sellos; sin embargo, los jugadores se retiraron cuando uno tenía 4 caras y el otro 3 sellos. Si cada jugador depositó 32 monedas como apuesta, ¿cuál es la manera más justa de repartir las 64 monedas?

Este problema fue planteado por un experto jugador llamado Antoine Gombaud, caballero de Meré, a los matemáticos franceses Pascal y Fermat, quienes mediante correspondencia resolvieron todo tipo de problemas sobre juegos de azar, para crear la noción de probabilidad y aplicándola en la resolución de problemas. Estos estudios fueron retomados por el matemático francés Pierre-Simon Laplace, quien presentó la teoría analítica de las probabilidades, que dio pie a que se formalizara la teoría de probabilidades con la axiomática del matemático ruso Kolmogórov, en 1933 aproximadamente.

La rama de la estadística inferencial (relacionada directamente con la probabilidad) se desarrolló con el tiempo y su aplicación en diversos campos científicos ha resultado importante porque a partir de la inferencia se ha podido modelar fenómenos y predecir los comportamientos de esos fenómenos con bastante certeza, en áreas como la economía, educación, transporte, construcción y el pronóstico del clima.

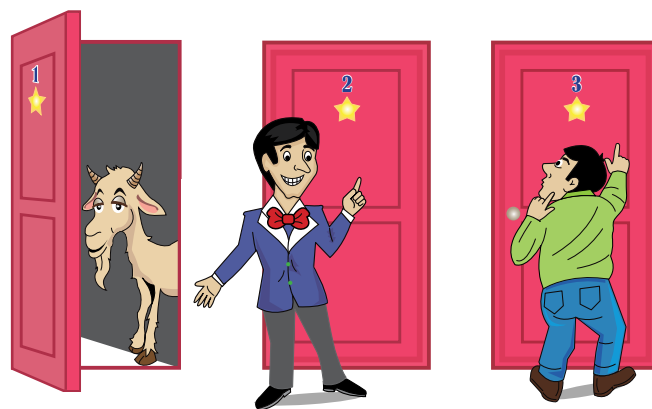


Imagen representativa del problema de Monty Hall, en un concurso de televisión de 1963 en el que un concursante se enfrenta a tres puertas de las cuales una esconde un automóvil, y las otras, una cabra.

En esta unidad aprenderás a...

- Describir con responsabilidad las variables aleatorias en eventos probabilísticos.
- Clasificar con cuidado las variables aleatorias continuas y discretas.
- Presentar con curiosidad situaciones reales que contienen variables cualitativas o cuantitativas.
- Realizar con responsabilidad cálculos probabilísticos.
- Plantear situaciones que requieren de cálculos probabilísticos.

Tipos de variables

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en
tu cuaderno



1. Escribe en el cuaderno 5 posibles respuestas que obtendría una persona si realizara una encuesta donde se pregunte lo indicado. Luego, indica las preguntas que dieron como respuesta números.

- a. ¿Qué tipo de mascota tienen en su familia?
- b. ¿Cuántas personas viven en su hogar?
- c. ¿Qué porcentaje de su presupuesto gasta en alimentación?
- d. ¿Cuál es el consumo eléctrico, en kilovatios/hora en su casa?
- e. ¿Cuáles son sus libros favoritos?



Recuerda

En un estudio estadístico, la **población** es el conjunto de elementos objeto de estudio. Si es muy grande se toma una parte de ella, esa parte se llama **muestra**.

La **variable** de un estudio estadístico es la característica o propiedad que se desea estudiar.

2. Analiza cada situación y escribe la población, la muestra y la variable.

- a. Una franquicia de batidos naturales desea abrir una nueva sucursal en Penonomé. Para estar seguros del éxito de su tienda entrevistaron a 300 mujeres, 250 hombres y 100 niños para conocer cuál es su batido favorito y el precio que estarían dispuestos a pagar.

Población:

Muestra:

Variabes:

- b. Una organización desea conocer cuál es el candidato favorito para las próximas elecciones. Para hacerlo, contrata a una empresa especializada quien realiza una encuesta al 10% de la población votante de cada provincia y comarca.

Población:

Muestra:

Variabes:

- c. Una organización no gubernamental (ONG) visita la comarca Ngöbe Buglé y observa sus hogares, lo que comen, la cantidad de miembros por familia e incluso su nivel educativo con el fin de conocer las características socioeconómicas de sus habitantes. Del total de la población de la comarca visitaron 1000 hogares.

Población:

Muestra:

Variabes:

1.2 Variables cuantitativas o cualitativas

Problema

El 22 de enero de 2009 se creó el Instituto Nacional de Estadística y Censo (INEC), como una dependencia adscrita a la Contraloría General de la República, con el fin de dirigir y formar la estadística nacional.

La entidad realiza investigaciones en ámbitos diversos, entre ellos, las estadísticas ambientales, tema sobre el que ha dado a conocer investigaciones sobre las concesiones de uso de agua, la superficie reforestada de la República, los tipos de denuncias por delitos ambientales y la superficie de las áreas protegidas, entre otros.

Responde las siguientes preguntas:

- En el INEC, por cada investigación planteada, se pudo obtener una de las siguientes preguntas. Escribe 2 posibles respuestas para cada una.
 - ¿Cuántas concesiones para el uso del agua se asignaron?
 - ¿Cuál fue la superficie reforestada en la República?
 - ¿Cuántas denuncias por delitos ambientales se dieron?
 - ¿Cuál fue la superficie de las áreas protegidas en la República?
- Clasifica esas investigaciones entre las que generan datos numéricos y las que no lo hacen.



Recuerda

Al calcular el área de un terreno o una figura, estamos determinando la medida de su superficie.

Solución

- Las respuestas posibles son las siguientes:
 - Cantidad de concesiones para el uso del agua: 12 o 21.
 - Superficie reforestada en la República: 1891,6 hectáreas en Darién y 1265,8 en la cuenca canalera.
 - Denuncias por delitos ambientales: Tala de árboles, contaminación.
 - Superficie de las áreas protegidas: 605,8 km² al oriente del país y 195 km² al occidente.
- En las investigaciones **a**, **b** y **d** se generaron cantidades, en la **c**, no.



Datos interesantes

Una concesión es un acto administrativo que otorga el derecho de explotar durante un periodo de tiempo un bien, un servicio o una empresa; por ejemplo, una concesión de un muelle o un atracadero, o una concesión para generar energía eléctrica.

Conclusión

Una **variable** es la característica o la propiedad que se desea estudiar en una población. Las variables se clasifican en:

- **Cuantitativas:** si los valores que toman son cantidades. Por ejemplo: las superficies de áreas protegidas son 605,8 y 195 km².
- **Cualitativas:** si los valores que toman son cualidades (o no numéricos). Por ejemplo: las denuncias por delitos ambientales son la tala de árboles o la contaminación.



1. Clasifica las variables en cuantitativas o cualitativas.
 - a. El número de estudiantes por sección en una escuela.
 - b. Grupo sanguíneo de los miembros de una familia.
 - c. Salario promedio de los trabajadores de una empresa.
 - d. El tipo de mascotas que tienen las familias de una provincia.
 - e. Disciplinas deportivas en las que participará nuestro país en las próximas olimpiadas.
 - f. Sectores reforestados por provincia o comarca.
 - g. Notas obtenidas en el examen de Español en el último trimestre.
 - h. Tiempo logrado por cada participante en una maratón.

2. Analiza cada situación y escribe la población, la muestra, la variable y la clasificación de la variable de cada estudio.
 - a. Una trabajadora social desea conocer el ingreso mensual de las familias que reciben ayuda social. Entrevista a las dos terceras partes de las familias llevando los datos en una bitácora.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- b. La directora de un colegio desea conocer el rendimiento académico de sus estudiantes. Elige 10 estudiantes por sección, revisa sus calificaciones y promedia sus notas.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- c. Una empresa de implementos médicos desea desarrollar uno de sus proyectos en el país. Antes de realizar los trámites administrativos necesita conocer si existe mano de obra calificada para el correcto funcionamiento dentro de nuestras fronteras y por ello contrata a una empresa para que realice el proceso previo de selección de personal. Se entrevistaron aproximadamente 5000 individuos y se validó su nivel académico.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

1.3 Variables aleatorias

Problema

A un evento sobre la *Accesibilidad para todos* asisten 2000 personas de las 294 000 que viven en Colón aproximadamente.

Si a cada participante se le preguntó estatura, sexo, cantidad de hijos y si consideraban que el trabajo de las autoridades permitía la accesibilidad en la provincia (y sus opciones de respuesta eran: *nunca, casi nunca, a veces, casi siempre o siempre*).

Responde las siguientes preguntas:

1. Identifica la población y la muestra del evento.
2. Identifica las variables y clasifícalas.



Solución

1. La población del evento eran las aproximadamente 294 000 personas que viven en Colón.

La muestra fueron las 2000 personas que asistieron.

2. Las variables consultadas en el evento fueron: estatura, sexo, cantidad de hijos y si consideraban que el trabajo de las autoridades permitía la accesibilidad en la provincia (y sus opciones de respuesta eran: *nunca, casi nunca, a veces, casi siempre o siempre*).

Al clasificar las variables se determina lo siguiente:

- Variables cualitativas: sexo y trabajo de las autoridades.
- Variables cuantitativas: estatura y cantidad de hijos.

Conclusión

Las **variables cuantitativas** se clasifican en:

- **Cuantitativas discretas:** toman valores numéricos enteros no negativos. Por ejemplo: la cantidad de hijos de un participante puede ser 1, 2 o 3 hijos.
- **Cuantitativas continuas:** pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo específico. Por ejemplo: la estatura que puede tomar valores, como 1,53 m o 1,62 m.



Desarrollo sostenible

Una sociedad que promueve la accesibilidad en todas sus áreas, permite el crecimiento del individuo y por tanto de la comunidad.



Trabajo colaborativo

Formen grupos de tres personas, investiguen sobre las variables cualitativas nominales y las cualitativas ordinales, e identifiquen las obtenidas en los ejercicios del tema anterior.

Observa cómo se hace

Observa de qué manera se clasifican las variables cuantitativas en continuas o discretas.



Recuerda

El conjunto de los números enteros NO negativos es:

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, A \subset \mathbb{Z}$$

Variable	Clasificación	Explicación
Cantidad de hermanos de los estudiantes de una sección.	Cuantitativa discreta	Se analizan los posibles resultados, algunos pueden ser 0, 1, 2, 3..., es decir sus resultados son enteros no negativos (no se pueden tener 2,5 hermanos).
Masa en kilogramos de los estudiantes de una sección.	Cuantitativa continua	Se analizan los posibles resultados, algunos pueden ser 45 kg, 47,5 kg, 51,35 kg..., es decir sus resultados NO son números enteros.

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Clasifica las variables en cuantitativas continuas o cuantitativas discretas.
 - a. Superficie de los parques nacionales del país.
 - b. Cantidad de donadores de sangre por día en un hospital.
 - c. Salario promedio de los trabajadores de una empresa.
 - d. Cantidad de mascotas que tienen las familias de una provincia.
 - e. Número de deportistas por disciplina deportiva para las próximas olimpiadas.
 - f. Superficie reforestada por provincia o comarca.
 - g. Promedio obtenido en las notas del último año de una sección.
 - h. Tiempo en segundos logrado por cada participante en una competencia de natación.
 - i. Valores de la glucosa en 50 niños menores de 10 años medidos en milimol por litro (mmol/L).
 - j. Estatura de los estudiantes de octavo grado de un colegio.
 - k. Masa de 100 melones.
 - l. El número de integrantes del grupo familiar de una comunidad.

2. Analiza cada situación y escribe la población, la muestra, la variable y la clasificación de la variable de cada estudio.

- a. En la biblioteca de un colegio se desea conocer el número de los libros de Matemática por nivel. Se extraen los libros de 5 estantes, se clasifican y contabilizan.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- b. De todos los niños en edad escolar de Panamá, se encuesta a 100 niños de cada nivel educativo para conocer el ingreso económico de sus familias.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- c. En el Hospital Santo Tomás se desea entrevistar a los pacientes hospitalizados por enfermedades pulmonares para conocer la cantidad en miligramos de un medicamento recetado. Se entrevistó a 100 de ellos.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- d. En el parque nacional Altos de Campana se desea conocer el promedio de la edad de los árboles más antiguos del lugar. Se eligen 50 de ellos y se hacen los cálculos respectivos.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

- e. El cine Caribbean, ubicado en Penonomé se entrevista a los que asisten a una película para investigar cuántas han visto el último año. Se obtuvo el dato de 125 de ellos.

Población:

Muestra:

Variable:

Tipo de Variable:

1.4 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Escribe el ejemplo de una situación que represente un estudio estadístico según las condiciones indicadas.
 - a. Población: Las personas mayores de 35 años de Darién.
Muestra: 100 hombres y 100 mujeres de Darién.
Tipo de Variable: Cualitativa.
 - b. Población: La población votante de la República.
Muestra: 25% de la población de cada provincia o comarca.
Tipo de Variable: Cuantitativa discreta.
 - c. Población: Los niños de edad escolar del país.
Muestra: 200 niños de cada comarca o provincia.
Tipo de Variable: Cuantitativa continua.
 - d. Población: Los centros educativos de Ngöbe Buglé.
Muestra: 75 centros educativos de Ngöbe Buglé.
Tipo de Variable: Cualitativa.
2. Analiza las representaciones y determina la variable y su clasificación.

a. Variable:

Clasificación:

Ingreso mensual de los trabajadores de una empresa	
xi	fi
[200, 450)	7
[450, 700)	15
[700, 950)	12
[950, 1200)	18
[1200, 1450)	5

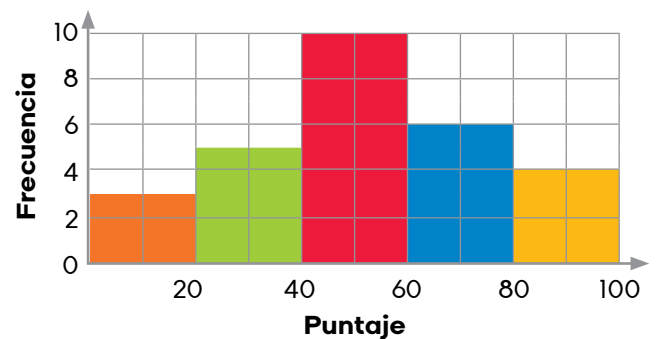
c. Variable:

Clasificación:

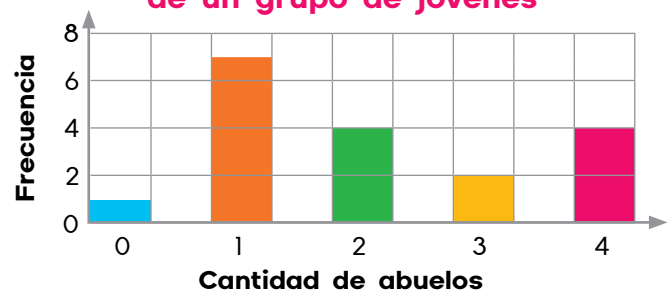
b. Variable:

Clasificación:

Puntaje obtenido en la evaluación por los estudiantes de octavo



Cantidad de abuelos con vida de un grupo de jóvenes



La probabilidad

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno



1. Escribe los eventos al realizar los experimentos descritos.

a. Al lanzar la moneda de la derecha.



b. Al lanzar el dado como el de la derecha.



c. Al lanzar el cubo rubik de la derecha.

- El color de las caras que no se observan es blanco, azul y naranja.



d. Al lanzar el dado de la derecha.

- El color de todas sus caras es el mismo.



¡Atención!

Los eventos de un experimento son sus posibles resultados.

2. Clasifica los eventos descritos en probables, imposibles o seguros según corresponda.

- a. El precio de la gasolina aumentará en los próximos meses. → _____
- b. Julia dice que mañana nevará en la capital de nuestro país. → _____
- c. Luis le comentó a sus amigos que el agua de mar es salada. → _____

3. Analiza la información y utiliza la probabilidad para responder.

Algunos estudios indican que colores como el negro, el rojo y el chocolate o el azul oscuro, atrapan con mayor facilidad la energía lumínica del sol, que luego se transforma en calor y por tanto, tienden a ser colores más calientes que los colores claros como el blanco.

- a. Imagina que eres dueño de una tienda de ropa deportiva en la ciudad de Panamá. ¿Cuáles previsiones tomarías al momento de adquirir las prendas de vestir que venderás en la tienda?
- b. Si un cliente de la tienda de ropa le indica que vive en Cerro Punta, ¿qué recomendaciones le daría respecto a la compra de implementos?

4. Ana y Pedro juegan a lanzar un dado. Si Ana eligió los números pares y Pedro los números impares, ¿cuál de los jóvenes tiene mayor probabilidad de ganar?

2.2 Conceptos de probabilidad

Problema



Para determinar quién inicia la partida en un juego de mesa, tres amigos decidieron lanzar un dado. Quien saque el mayor puntaje inicia la partida. Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los posibles resultados de lanzar el dado? (Suponga que el dado no cae de canto).
2. Al lanzar el dado, ¿cuál evento sucederá con certeza?
3. Al lanzar el dado, ¿cuál evento no es posible que suceda?

Solución

1. Los posibles resultados al lanzar el dado son:

Que caiga en 1.	Que caiga en 3.	Que caiga en 5.
Que caiga en 2.	Que caiga en 4.	Que caiga en 6.
2. Un evento que ocurrirá con certeza es que salga un número entero mayor o igual a 1 y menor o igual a 6.
3. No es posible que al lanzar el dado caiga en 7, por ejemplo.

Conclusión

Un **experimento** es una prueba que consiste en repetir un fenómeno con el fin de analizarlo y extraer conclusiones sobre su comportamiento. Existen dos tipos de experimentos:

- **Determinísticos:** son aquellos donde se sabe con certeza su resultado. Por ejemplo, al lanzar al aire una bola y dejarla caer, de seguro caerá, es decir, se sabe de antemano lo que sucederá.
- **Aleatorios:** son aquellos cuyo resultado es incierto, pero se conocen sus posibles resultados. Por ejemplo, lanzar al aire una moneda puede caer en cara o sello, pero no se sabe en cuál caerá.

Al conjunto de todos los resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral** y se representa con el símbolo Ω .

Por ejemplo, al lanzar un dado el espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Cuya cardinalidad es 6.

¿Sabías qué...?

El evento como "E: ganar el premio mayor en la lotería" es probable aunque su posibilidad es muy baja.



¡Atención!

La cardinalidad de un espacio muestral es la cantidad de elementos que forman el conjunto.

Un **suceso o evento (E)** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo: "salir 2 al lanzar un dado" o "salir 6 al lanzar un dado" son eventos o sucesos del espacio muestral.

Existen diferentes tipos de sucesos o eventos:

1. **Evento seguro:** Está formado por todos los elementos del espacio muestral.
2. **Evento probable:** Está formado por al menos un elemento del espacio muestral, pero no todos.
3. **Evento imposible:** No tiene elementos del espacio muestral.

Observa cómo se hace

Observa de qué modo se analiza y clasifica un evento relacionado con un experimento aleatorio.

En el experimento aleatorio "lanzar un dado" se obtiene el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Determina si los eventos son probables, seguros o imposibles.

1. E: salir un número par al lanzar un dado.
La formación del evento anterior es $E = \{2, 4, 6\}$, que corresponde a un subconjunto de Ω , por lo tanto, es un evento probable.
2. E: salir un número entero mayor que 0 y menor que 7 al lanzar un dado.
La formación del evento anterior es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que contiene todos los elementos de Ω , por lo tanto, es un evento seguro.
3. E: salir un número mayor que 6 y menor que 10 al lanzar un dado.
La formación del evento anterior es $E = \{7, 8, 9\}$, que no posee elementos de Ω , por lo tanto, es un evento imposible.



¡Atención!

Para determinar si un evento es probable, seguro o imposible, es importante identificar el espacio muestral y dar por extensión los elementos que forman el evento.



Trabajo colaborativo

En parejas investiguen sobre las diferentes áreas donde se utiliza la probabilidad en la comunidad, en la escuela o en el hogar. Identifiquen la utilidad de las mismas.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno



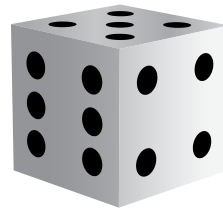
1. Define con tus propias palabras los siguientes términos.

a. Experimento.	b. Evento.
c. Experimentos deterministas.	d. Evento seguro.
e. Experimentos aleatorios.	f. Evento probable.
g. Espacio muestral y su cardinalidad.	h. Evento imposible.

2. Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.
 - a. Sacar, sin mirar, de una caja una bola donde hay pelotas amarillas, azules y verdes.
 - b. Comprar 5 números de la lotería con el fin de ganar el premio mayor.
 - c. Sacar de una caja llena con bolas rojas una sin observar dentro.
 - d. Tomar varias veces el tiempo que tarda en caer una piedra en caída libre desde la misma altura.
3. Analiza los experimentos aleatorios. Determina su espacio muestral y su cardinalidad.
 - a. Lanzar una moneda al aire.
 - b. Sacar, sin mirar, de una caja una bola donde hay una pelota blanca, una azul y una roja.
 - c. Extraer sin ver un lápiz de una cartuchera, donde hay uno rojo, uno azul, uno blanco y uno negro.
 - d. Lanzar, con los ojos cerrados, la bola una vez al aro de baloncesto.

4. Escribe por extensión los elementos de cada evento relacionado con el experimento de lanzar un dado. Indica su cardinalidad.

- a. E: Que caiga en número par mayor a 2.
- b. E: Que caiga un número primo.
- c. E: Que salga un número primo y par.
- d. E: Que caiga un número no racional.



¡Atención!

1 no se considera ni primo ni compuesto.

5. Determina el espacio muestral de cada experimento. Luego, escribe por extensión el evento y clasifícalo en seguro, probable o imposible.

- a. Experimento: Girar la ruleta.
E: Que caiga en amarillo.



- b. Experimento: Lanzar una moneda 3 veces.
E: Obtener cara todas las veces.



- c. Experimento: Lanzar dos dados y sumar los números de ambas caras.
E: La suma de los puntos da 13.



- d. Experimento: Sacar sin mirar una bola.
E: Extraer una bola roja, blanca, azul o verde.

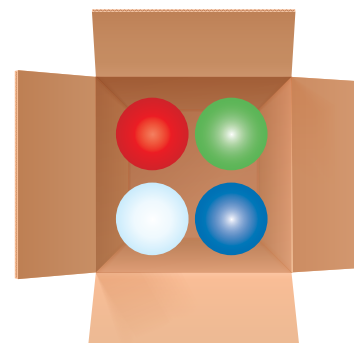


2.3 Cálculo de la probabilidad

Problema

Andrés realizó el siguiente experimento: sacar dos bolas sin ver de la caja. Realiza lo siguiente:

1. Escribe el espacio muestral del experimento y su cardinalidad.
2. Sea E un evento tal que:
E: sacar sin mirar una bola de la caja y obtener al menos una blanca.
 - a. Expresa por extensión los elementos de E.
 - b. Determina la cardinalidad de E.
 - c. ¿Cuántos elementos del experimento cumplen con la condición de E?



Solución

1. El experimento consiste en sacar 2 bolas a la vez, por lo que si representamos con A la bola azul; R, la roja; V, la verde; y B, la blanca obtendríamos el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{AA, AR, AV, AB, RR, RV, RB, VV, VB, BB\}$$
 Cuya cardinalidad es 10.
2. El evento E corresponde a sacar al menos una bola blanca de la caja, es decir, que una de las bolas que se saquen o ambas sean blancas.
 - a. Los elementos del evento son $E = \{AB, RB, VB, BB\}$.
 - b. La cardinalidad de E es 4.
 - c. Para determinar la cantidad de elementos del experimento que cumplen con la condición de E se utiliza una razón donde el antecedente es la cardinalidad del evento y el consecuente la cardinalidad de Ω . Por lo tanto: $\frac{4}{10}$ es la razón que lo representa, que indica que 4 de los 10 elementos del experimento cumplen con la condición de E.

Conclusión

Si en un experimento aleatorio se cumple que cada evento que lo conforma (cada posible resultado) tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces se puede calcular la probabilidad de que ocurra un evento E mediante esta fórmula:

$$P(E) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Donde $n(E)$ corresponde a la cardinalidad de E y $n(\Omega)$ la cardinalidad del espacio muestral del experimento.

Datos interesantes

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), astrónomo, físico y matemático francés, descubrió la Ley de Laplace:

$$P(E) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Donde:

Casos posibles: Son todos los resultados posibles que se obtienen de un experimento.

Casos favorables: Son los resultados de cada experimento.

Observa cómo se hace



¡Atención!

La probabilidad de un evento puede expresarse como un porcentaje, un decimal o una fracción.

Observa de qué manera se calcula la probabilidad de un evento.

Considera el experimento de lanzar un dado y observar el número de su parte superior. Determina la probabilidad del evento A, donde A: obtener un número par.

1. Se analiza el experimento y se obtiene su cardinalidad.
Como $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces su cardinalidad es 6, es decir, $n(\Omega) = 6$.
2. Se analiza el evento y se obtiene su cardinalidad.
Como $A = \{2, 4, 6\}$, entonces su cardinalidad es 3, es decir, $n(A) = 3$.
3. Se sustituyen los valores en la fórmula y se simplifica de ser posible.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

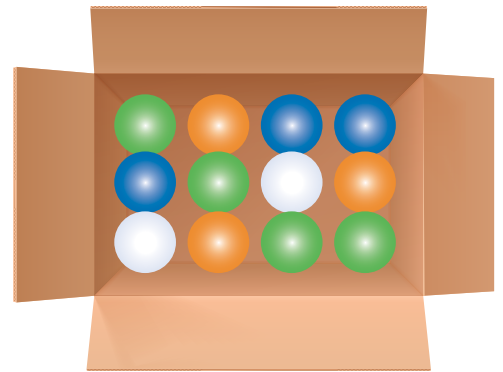
Es decir, la probabilidad de obtener un número par es del 50% (que corresponde a la mitad).

Práctica

Trabaja en
tu cuaderno



1. Analiza cada situación y contesta.
 - a. Se extrae sin mirar una bola de la caja de la derecha.
 - Define el espacio muestral y su cardinalidad.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?



- b. En la bolsa hay caramelos de naranja (color anaranjado), limón (color verde), fresa (color rosado) y menta (color celeste). Y se extrae sin mirar un caramelo de la bolsa.
 - Define el espacio muestral y su cardinalidad.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sea de menta?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sea de fresa?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sea de mora?



- c. Se gira la ruleta y se observa el color de la franja que queda en la parte superior.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la franja sea morada?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la franja sea blanca con un número mayor que 100?

- ¿Cuál es la probabilidad de que en la franja quede un número menor o igual a 500?



2. Calcula la probabilidad de los eventos descritos.

a. Obtener un número primo y par al lanzar un dado.

b. Al lanzar dos dados a la vez, que caiga 3 en ambos.

c. Al lanzar dos dados a la vez y sumar sus puntos se obtenga 7 como resultado.

d. Al lanzar 2 monedas a la vez y que la primera caiga en sello.

e. Al lanzar 3 monedas a la vez y que caiga cara al menos en una.

f. Sacar una bola par, mayor que 7 de una caja con bolas numeradas del 1 al 10.

3. En una urna hay 15 bolas numeradas de 5 a 19. Se extrae una bola al azar y se observa el número. Indica la probabilidad de los eventos.

A: Obtener un número par.

B: Obtener un número primo.

C: Obtener un número impar menor que 11.

Determina:

a. $P(A) =$

b. $P(B) =$

c. $P(C) =$

4. En una ruleta, dividida en 12 franjas, se ubican los primeros 12 números primos, se gira y se observa el número que queda en la parte superior. Indica la probabilidad de los eventos.

A: Obtener un número par.

B: Obtener un número primo.

C: Obtener un número impar mayor o igual que 17.

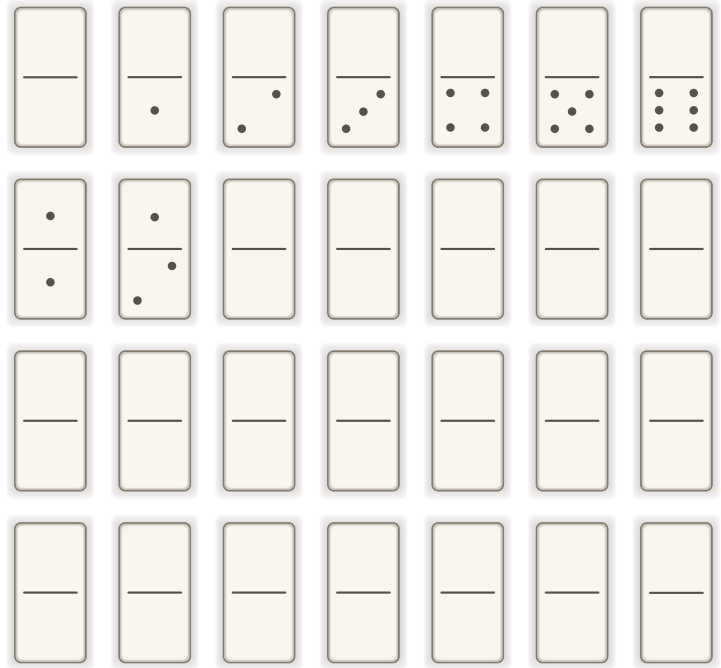
Determina:

a. $P(A) =$

b. $P(B) =$

c. $P(C) =$

5. Analiza la información y realiza las actividades.
- "El dominó es un juego de mesa que nació hace más de 100 años en China. Consta de 28 piezas divididas por la mitad. En cada pieza se representan dos números. Los números que se anotan van del 0 al 6. Inicia en doble cero (blanco) y termina en doble seis".



- Completa las piezas de dominó con los puntos correspondientes.
 - Determina la probabilidad de los eventos.
 - A: Sacar una pieza y que sus puntos sumen 6.
 $P(A) = \dots\dots\dots$
 - B: Sacar una pieza que contenga al menos un 5.
 $P(B) = \dots\dots\dots$
 - C: Sacar una pieza donde se represente 2 veces el mismo número.
 $P(C) = \dots\dots\dots$
 - D: Sacar una pieza que contenga al menos un número impar.
 $P(D) = \dots\dots\dots$
6. Cuatro amigos juegan con una baraja inglesa. Colocan las cartas boca abajo y sacan una. Se ganará cuando se obtenga una carta que corresponda al grupo que cada uno de ellos escogió como suyo. Así:
- Isabel: prefirió las cartas rojas impares del 3 al 9.
 Manuel: eligió los números 2, 3, 7, 10 y K de rombos y espadas.
 Luis: eligió las cartas con números primos del 3 al 9.
- ¿Cuál es la cardinalidad del experimento?
 - Escribe por extensión los eventos vinculados con las cartas elegidas por cada joven.
 - Si ganan un punto cada vez que salga una carta de su elección, ¿cuál joven lo obtendrá si sale el 3 de diamantes?
 - ¿Cuál de los jóvenes tiene mayor probabilidad de ganar?



¡Atención!

Una baraja inglesa es un conjunto de naipes formado por 52 cartas dividida en 4 palos:



← Rombos o diamantes



← Corazones o copas



← Picas o espadas



← Tréboles o bastos

Cada palo consta de 13 cartas ordenadas así: A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (jota), Q (reina), K (rey).

2.4 Practica lo aprendido

Trabaja en
tu cuaderno

1. Asocia cada término de la columna izquierda con su respectiva definición de la columna derecha. Indica la letra del término y el número que corresponde a la definición. Ejemplo: A → 3.

A. Experimento

1. Número que representa la cantidad de elementos del conjunto.

B. Espacio muestral

2. Todos los elementos que lo conforman pertenecen al espacio muestral del suceso.

C. Evento imposible

3. Se repite una prueba con el fin de analizar los resultados y obtener conclusiones.

D. Experimento determinístico

4. Son aquellas pruebas que al efectuarse no se sabe con exactitud su resultado.

E. Cardinalidad

5. Prueba que se sabe con exactitud su resultado.

F. Evento seguro

6. Está formado por todos los posibles resultados del experimento.

G. Experimento aleatorio

7. Al menos uno pero no todos los elementos que lo forman pertenecen al espacio muestral.

H. Evento probable

8. Los elementos que lo conforman no pertenecen al espacio muestral del suceso.

2. Considera el experimento de lanzar tres monedas al aire. Determina:

a. El espacio muestral y su cardinalidad.



b. Escribe por extensión los elementos de cada evento indicado.

A: Obtener dos sellos y una cara.

B: Obtener al menos dos sellos.

C: Obtener al menos una cara.

c. Determina la probabilidad de los eventos anteriores.

• $P(A) = \dots\dots\dots$

• $P(B) = \dots\dots\dots$

• $P(C) = \dots\dots\dots$

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Describo con responsabilidad las variables aleatorias en eventos probabilísticos.			
2. Identifico los conceptos básicos de probabilidad.			
3. Clasifico las variables cualitativas y cuantitativas.			
4. Clasifico las variables cuantitativas en continuas y discretas.			
5. Presento con curiosidad situaciones reales que contienen variables aleatorias continuas.			
6. Presento situaciones reales que contienen variables aleatorias discretas.			
7. Presento situaciones reales que contienen variables cualitativas.			
8. Presento situaciones reales que contienen variables cualitativas.			
9. Realizo con responsabilidad cálculos probabilísticos.			
10. Planteo situaciones que requieren de cálculos probabilísticos.			

Anexos



Fórmulas y simbología

Productos notables

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

IV. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

V. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

VI. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Función lineal

Ecuación: $y = mx + b$ $x = \frac{y - b}{m}$

Superficie en el SI: múltiplos y submúltiplos de metro cuadrado

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
$1 \cdot 10^6 =$ 1 000 000	$1 \cdot 10^4 =$ 10 000	$1 \cdot 10^2 =$ 100	$10^0 =$ 1	$1 \cdot 10^{-2} =$ 0,01	$1 \cdot 10^{-4} =$ 0,000 1	$1 \cdot 10^{-6} =$ 0,000 001

Superficie en el Sistema Inglés

- 1 pie² = 144 pulg²
- 1 yd² = 9 pie²
- 1 yd² = 1296 pulg²
- 1 mi² = 3 097 600 yd²

Equivalencias entre las unidades de superficie del SI y el Sistema Inglés

- 1 pulg² = 6,45 cm²
- 1 pie² = 0,093 m²
- 1 yd² = 0,836 m²
- 1 mi² = 2,59 km²

Al realizar conversiones se **multiplica** para convertir del **Sistema Inglés** al **SI** y se **divide** para pasar del **SI** al **Sistema Inglés**.

Volumen: múltiplos y submúltiplos de metro cúbico

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
$1 \cdot 10^9 =$ 1 000 000 000	$1 \cdot 10^6 =$ 1 000 000	$1 \cdot 10^3 =$ 1000	$10^0 =$ 1	$1 \cdot 10^{-3} =$ 0,001	$1 \cdot 10^{-6} =$ 0,000 001	$1 \cdot 10^{-9} =$ 0,000 000 001

El volumen en el Sistema Inglés

- 1 pie³ = 1728 pulg³
- 1 pulg³ = 0,000579 pie³
- 1 yd³ = 27 pie³

Equivalencias entre las unidades de volumen del SI y el Sistema Inglés

- 1 pulg³ = 16,387 cm³
- 1 pie³ = 28,316 dm³
- 1 yd³ = 0,765 m³

Al realizar conversiones se **multiplica** para convertir del **Sistema Inglés** al **SI** y se **divide** para pasar del **SI** al **Sistema Inglés**.

Fórmulas y simbología

Superficie y perímetro de figuras planas

- Superficie (A)
 - Triángulo $\rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2}$, b: base y h: altura
 - Rectángulo $\rightarrow A = b \times h$
 - Cuadrado $\rightarrow A = \ell^2$, ℓ : lado
 - Polígono regular $\rightarrow A = \frac{P \cdot a_p}{2}$, a_p : apotema
 - Círculo $\rightarrow A = \pi r^2$, r: radio
- Perímetro (P)
 - Triángulo \rightarrow Suma de los 3 lados
 - Rectángulo $\rightarrow P = 2b + 2h$
 - Cuadrado $\rightarrow P = 4\ell$
 - Polígono regular $\rightarrow P = n \times \ell$, con n: número de lados
 - Círculo $\rightarrow C = 2\pi r$

Volumen de cuerpos geométricos

- Prisma cuadrangular: $V = \ell^3$
- Prisma rectangular: $V = b \times h \times H$,
H: altura del prisma
- Prisma triangular: $V = \frac{b \cdot h \cdot H}{2}$
- Esfera: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$
- Cilindro: $V = \pi r^2 h$

Ángulos y arcos en un círculo

- Ángulo central: $m\angle\theta = \frac{360}{n}$, n: número de divisiones
- Arco subtendido por el ángulo central: $m\widehat{AB} = \frac{2\pi r \theta}{360}$, r: radio, θ : medida del ángulo central
- Ángulo inscrito: $m\angle i = \frac{m\angle\theta}{2}$, θ : medida del ángulo central
- Ángulo semiinscrito: $m\angle s = \frac{m\angle\theta}{2}$, θ : medida del ángulo central
- Ángulo interior: $m\angle t = \frac{m\angle\theta_1 + m\angle\theta_2}{2}$, θ_1 y θ_2 : ángulos centrales subtendidos por **t**
- Ángulo exterior: $m\angle e = \frac{m\angle\theta_1 - m\angle\theta_2}{2}$, θ_1 y θ_2 : ángulos centrales subtendidos por **t**, $\theta_1 > \theta_2$

Poliedros regulares: perímetro (P), área de una cara (A) y área total (A_T)

- | | | | |
|--------------|-------------------------|---|---|
| • Tetraedro | $\rightarrow P = 3\ell$ | $\rightarrow A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ | $\rightarrow A_T = \ell^2 \sqrt{3}$ |
| • Cubo | $\rightarrow P = 4\ell$ | $\rightarrow A = \ell^2$ | $\rightarrow A_T = 6 \ell^2$ |
| • Octaedro | $\rightarrow P = 3\ell$ | $\rightarrow A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ | $\rightarrow A_T = 2 \ell^2 \sqrt{3}$ |
| • Dodecaedro | $\rightarrow P = 5\ell$ | $\rightarrow A = \frac{P \cdot a_p}{2}$ | $\rightarrow A_T = 6 \cdot P \cdot a_p$ |
| • Icosaedro | $\rightarrow P = 3\ell$ | $\rightarrow A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ | $\rightarrow A_T = 5 \ell^2 \sqrt{3}$ |

Estadística y probabilidad

- Media aritmética o promedio: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ o $\bar{x} = \frac{Pm_1 \cdot f_1 + Pm_2 \cdot f_2 + Pm_3 \cdot f_3 + \dots + Pm_c \cdot f_c}{n}$
- Moda para datos agrupados: $M_o = L_{inf} + \left[\frac{d_i}{d_i + d_2} \right] i$
- Mediana para datos agrupados: $M_e = L_{inf} + \left[\frac{\frac{n}{2} - Fa_a}{f_i} \right] i$
- Probabilidad de un evento E: $P(E) = \frac{\text{Cantidad de casos probables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$



1. Resuelve los productos notables indicados. Usa las fórmulas correspondientes.

A. $(b^5 + 4)^2 =$

B. $(3h^3 + 2)^2 =$

C. $(-4m^5 - m)^2 =$

D. $(8h - 5)^2 =$

E. $(m^3n - n^3)^2 =$

F. $(2a^{3n} - 3a^{5n})^2 =$

G. $\left(\frac{2}{5}p^2q - \frac{10}{2}p\right)^2 =$

H. $(a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$

I. $(7h^2 + 11h^4)(7h^2 - 11h^4) =$

J. $(8p^{2m} - 4p^{3m})(8p^{2m} + 4p^{3m}) =$

K. $(2m^{a+4} - n^{a+1})(2m^{a+4} + n^{a+1}) =$

L. $(a^3 + 1)(a^3 + 4) =$

M. $(5k^5 + 1)(5k^5 - 2) =$

N. $(6a^{2n} + 1)(6a^{2n} - 5) =$

O. $(6x^{a+1} + 2)(6x^{a+1} + 3) =$

P. $(m^3 + m^2)^3 =$

Q. $(7 + a)^3 =$

R. $(4b^2 + b)^3 =$

S. $(5a^4 - b^2)^3 =$

T. $(3x^6 - 5y^4)^3 =$

U. $(2k^{3m} - hk^{3m})^3 =$

V. $(a^{2+n} - a^{3-n})^3 =$

2. Determina la expresión algebraica que representa el área y el perímetro de un cuadrado de lado $x + 5$.

3. Andrés observó en un libro un rectángulo de lados $(x - 6)$ y $(x + 6)$.

A. ¿Cuáles expresiones representan el área y el perímetro del rectángulo?

B. Si el valor de $x = 7$, ¿cuál es la medida del área y del perímetro del rectángulo?

4. Iris llenó 5 cajas cúbicas idénticas con algodón y las colocó una sobre la otra.

A. Si $(8 + x)$ representa la medida de la arista de una caja, ¿cuál expresión algebraica representa el volumen de una caja?

B. ¿Cuál expresión representa el volumen de todas las cajas?

Ficha 2: Ecuaciones y función lineal

Trabaja en
tu cuaderno



1. Resuelve cada ecuación. Escribe el conjunto solución y comprueba el resultado.

A. $m + 12 = -1$

B. $b - 10 = -7$

C. $a + \sqrt{81} = \sqrt{49}$

D. $h + 10 = 4 - 10$

E. $x - \frac{7}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{8}$

F. $3x + 5 = 11$

G. $-2a - 5 = 7$

H. $-3m + \sqrt{16} = \sqrt{100}$

I. $3a + 2 = 1 - 2$

J. $3x - 8 = \frac{-2}{5} + \frac{4}{5}$

K. $-4a + 3 = 2a - 6$

L. $4x - 8 = 12 - 6x$

M. $-2x - 5 = -3x - 9$

N. $10a + 8 - 3 = 7a + 5 - 1$

O. $8(y - 2) = 16$

P. $-5(x + 1) - 2 = 8$

Q. $10 + 2(a - 1) = -3a - 2$

R. $-3(b + 5) - 4 = -(b + 7)$

S. $a(a + 4) - 3 = a^2 + 5(a + 6)$

T. $\frac{x}{2} + 4 = \frac{\sqrt{9}}{2}$

U. $-8 + \frac{m}{3} = \frac{-5}{4}$

V. $\frac{x}{7} - 1 = \frac{-3}{7} - 8$

W. $\frac{h}{2} - 8 = \frac{10}{8} - 4$

X. $\frac{5x + 1}{x - 1} = \frac{10x - 4}{2x + 3}$

Y. $\frac{4m - 6}{-3m + 2} = \frac{-8m - 1}{6m + 1}$

Z. $\frac{8x + 3}{4x - 6} = -1$

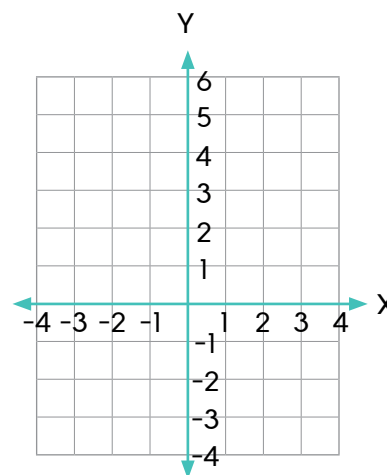
2. Determina el conjunto solución de cada ecuación a través de su gráfica.

Completa la tabla y las gráficas correspondientes.

Ecuación: $2x + 6 = -x + 3$

$S = \{ \square \}$

Valor de x	Valor "y" del primer miembro	Valor "y" del segundo miembro
-3		
-1		
1		
3		



Ficha 3: Construcción de poliedros regularesTrabaja en
tu cuaderno

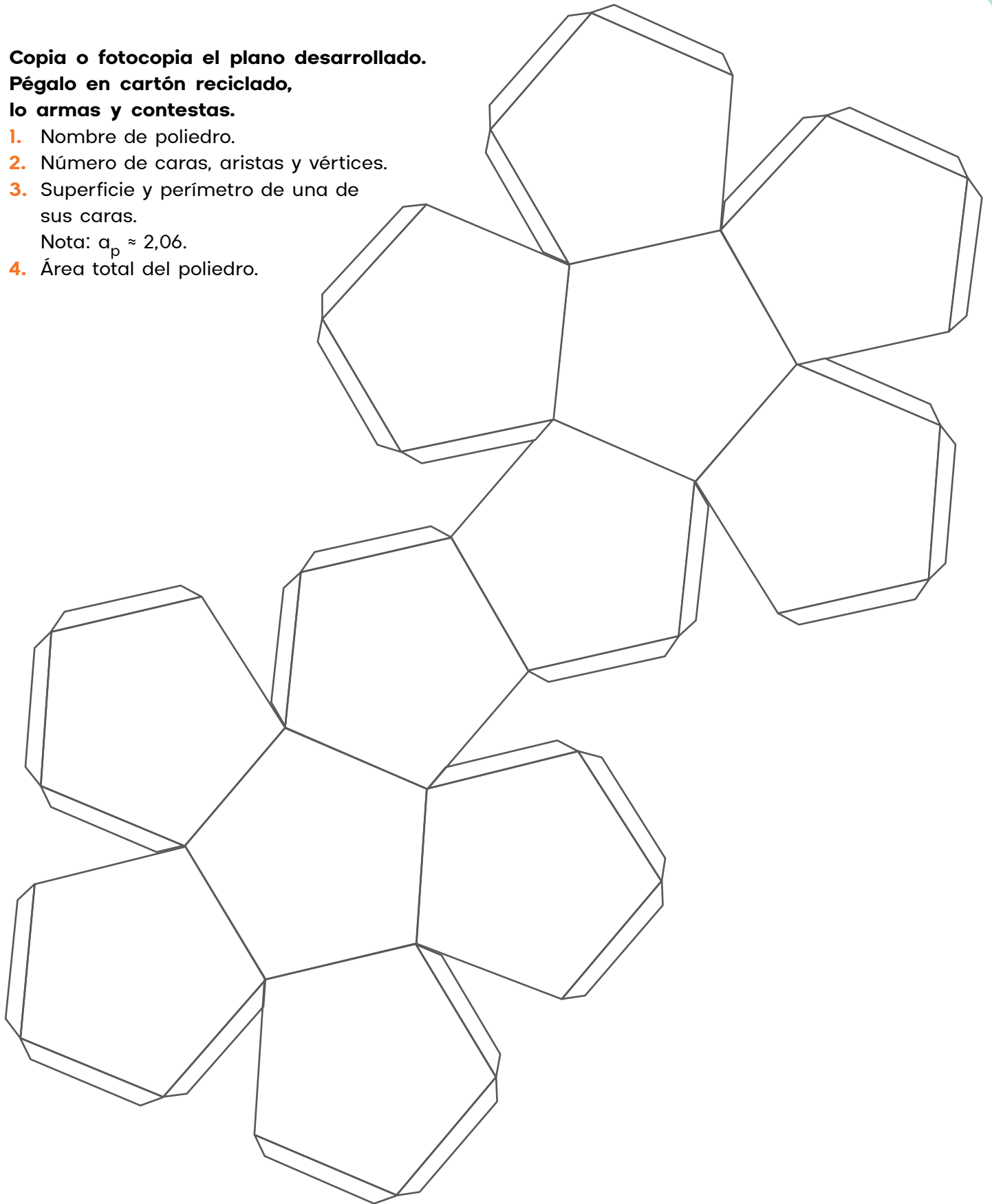
Copia o fotocopia el plano desarrollado.

**Pégalo en cartón reciclado,
lo armas y contestas.**

1. Nombre de poliedro.
2. Número de caras, aristas y vértices.
3. Superficie y perímetro de una de sus caras.

Nota: $a_p \approx 2,06$.

4. Área total del poliedro.





REPÚBLICA DE PANAMÁ
— GOBIERNO NACIONAL —

MINISTERIO DE
EDUCACIÓN

Panamática 8

Guía del estudiante
Trimestres 2 y 3



2022

De la mano con los Objetivos
de Desarrollo Sostenible (ODS)