REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante
Trimestres 2 y 3

$$A_T = 2\pi\,(rh + r^2)$$

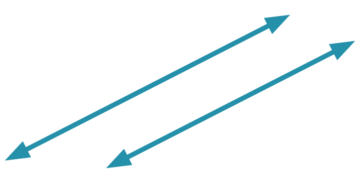
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

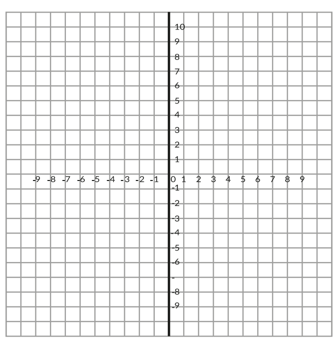
Signo +

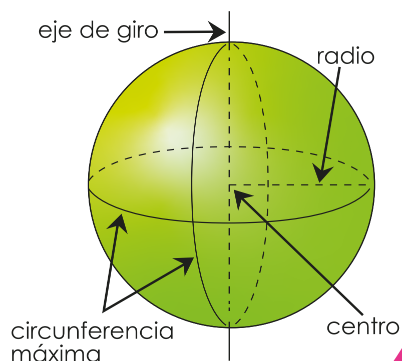
Factor literal a,x,y,b

$$\frac{3ax^9y^5}{25b}$$

Coeficiente numérico







$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Material para validación - 2022

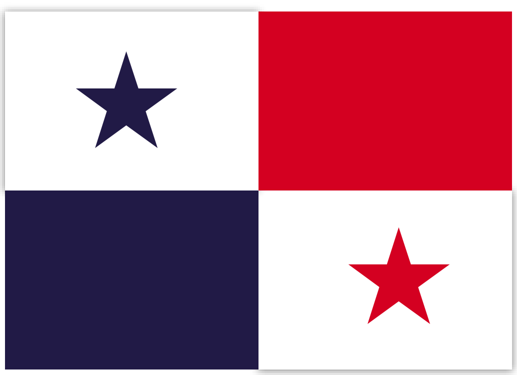
REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mediante la Ley 34 de 1949, reformada con la Ley 2 de 2012, se estableció que Panamá adopta como Símbolos de la Nación: la Bandera, el Himno y el Escudo. A partir de dicha Ley se sustituyó la denominación de "símbolos patrios" por "Símbolos de la Nación". Asimismo, con la Ley se creó la Comisión Nacional de los Símbolos de la Nación (Conasina), cuya función principal es promover el uso adecuado de los Símbolos de la Nación.

Himno

Bandera



Escudo

Autores

Letra: Jerónimo Ossa E.

Música: Santos Jorge A.

Confección: María Ossa de Amador

Diseño: Manuel Encarnación Amador

Concepto: Nicanor Villalaz L.

Diseño y pintura: Max Lemm B.

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante 2022

Ministra de Educación	Su Excelencia Maruja Gorday de Villalobos
Viceministra Académica de Educación	Su Excelencia Zonia Gallardo de Smith †
Viceministro Administrativo de Educación	Su Excelencia José Pío Castillero
Viceministro de Infraestructura de Educación	Su Excelencia Ricardo Sánchez
Secretario General	Ricardo Alonso Vaz Wilky
Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa	Carmen Heredia Reyes Recuero **Directora Nacional** Yovany Guerra G. **Coordinador Nacional de Matemática**
Dirección Nacional de Formación y Perfeccionamiento Docente	Anabella Yepes Martínez **Directora Nacional**
Equipo de contextualizadores	Jesús Domingo Chacón Pinto Daniel Edil Herrera Muñoz Manuel Antonio Herrera Herrera Guillermo Castillo
Evaluación técnica	Yovany Guerra G.
Coordinación editorial	Esteban Ureña Salazar
Edición	Ana Gabriela Rojas Jiménez
Corrección de estilo	Matilde H. de Loo
Diagramación	Orlando Villalta Solano
Conceptualización de portada	Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa Aracelly Agudo
Coordinación del Proyecto	Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)

BID Banco Interamericano de Desarrollo | OEI

La serie Panamática ha sido producido gracias a la colaboración del Ministerio de Educación del Gobierno de El Salvador, a través del proyecto ESMATE, material diseñado para Matemática con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Este material didáctico fue posible con el respaldo de los recursos aportados por el Programa Mejorando la Eficiencia y Calidad del Sector Educativo (PN-L1143), Contrato de Préstamo n.° 4357/OC-PN con el Banco Interamericano de Desarrollo, a través del componente Apoyo Pedagógico Integral y Continuo.

ISBN: 978-9962-19-069-1

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Estimados jóvenes:

Estamos contentos y complacidos de volver a verles junto a sus compañeros y profesores. Las clases interactivas, dinámicas, de manera cooperativa y colaborativa permitirán que todos podamos avanzar juntos y hacer del aprendizaje un espacio entretenido y enriquecedor.

La educación tiene el potencial de transformar sus vidas y permitirles más oportunidades para participar en la nueva sociedad del conocimiento y de las tecnologías de la información.

La comprensión lectora, junto con el desarrollo del pensamiento matemático y las habilidades de pensamiento abstracto, son factores clave para progresar en el desarrollo de todas las asignaturas y elegir el tipo de bachillerato que les gustaría estudiar cuando culminen sus estudios de Premedia.

Además, una educación de calidad es también más humana, más inclusiva y altruista; contribuye en la formación de ciudadanos íntegros, solidarios y comprometidos con el futuro de su familia, de su comunidad y de la sociedad. Les ofrece oportunidades, a todos, para mejorar sus competencias a su ritmo, con sus habilidades, sin dejar a nadie atrás; es permanente, equitativa e inclusiva.

Queridos jóvenes, el futuro los espera para que puedan concretar sus metas y alcanzar sus sueños de ser grandes hombres y mujeres, productivos y constructores de una mejor sociedad. Que este retorno a clases fortalezca todas sus competencias y les garantice una formación integral con calidad.

Éxitos en el año escolar 2022.

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Estructura del libro

Secciones de la lección y las clases

Título de la lección

Título de la clase

Problema

En este primer momento de cada clase, se solicita al estudiante que piense una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido por desarrollar.

Solución

En el segundo momento de la clase, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión

En el tercer momento didáctico, se presenta el contenido de manera formal. Se relacionan los dos primeros momentos para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Observa cómo se hace

Esta sección propone ejemplos de ejercicios resueltos para contribuir a la comprensión del procedimiento relativo a los contenidos de la **Conclusión**.

Práctica

En el último momento didáctico se incluyen ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Clases especiales

Repasa tus conocimientos

Este programa aparece siempre como la primera clase de una lección. Propone ejercicios para activar conocimientos previos sobre los temas de la lección.

Practica lo aprendido

Presenta ejercicios al final de cada lección, que integran los contenidos desarrollados en las clases.

Distribución de las clases

Este segundo tomo se propone para el segundo y tercer trimestres del curso, y está compuesto por 7 unidades didácticas. Cada unidad está formada por lecciones, y cada lección, por clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección, y el segundo, la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 correspondiente a la lección 2 se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 Título de la clase

Indica el número de clase

Secciones especiales

Recuerda

Activa contenidos de clases, unidades o grados anteriores que son necesarios para comprender el tema desarrollado.

¿Qué pasaría?

Aborda casos particulares relacionados con el contenido de las secciones **Conclusión** y **Observa cómo se hace**.

Trabajo colaborativo

Asigna tares de investigación o ampliación de conocimientos con el fin de fomentar el trabajo en equipo.

¡Atención!

Presenta pistas, recomendaciones o información adicional para resolver los ejercicios propuestos o comprender los ejemplos desarrollados.

Datos interesantes

Proporciona datos complementarios de diverso tipo (histórico, cultural, técnico), relacionados con los contenidos desarrollados durante la clase.

Desarrollo sostenible

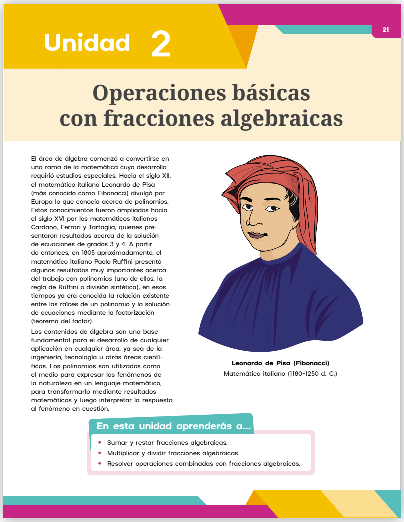
Propone textos informativos y acciones posibles en relación con el desarrollo sostenible, específicamente en cuanto al clima, la producción y el consumo responsables, el trabajo decente, el crecimiento económico, la igualdad de género, la salud y el bienestar.

Inicios de unidad

Se indica el número de unidad así como el tema central que se desarrollará durante las siguientes lecciones.

Se presenta una introducción general al tema por estudiar, para contextualizarlo en la historia de la cultura y de la matemática.

Finalmente se incluyen las habilidades por desarrollar durante la unidad.



Unidad 2

21

Operaciones básicas con fracciones algebraicas

El área de álgebra comenzó a convertirse en una rama de la matemática cuyo desarrollo requirió estudios especiales. Hacia el siglo XII, el matemático italiano Leonardo de Pisa (más conocido como Fibonacci) divulgó por Europa lo que conocía acerca de polinomios. Estos conocimientos fueron ampliados hacia el siglo XVI por los matemáticos italianos Cardano, Ferrari y Tartaglia, quienes presentaron resultados acerca de la solución de ecuaciones de grados 3 y 4. A partir de entonces, en 1805 aproximadamente, el matemático italiano Paolo Ruffini presentó algunos resultados muy importantes acerca del trabajo con polinomios (uno de ellos, la regla de Ruffini o división sintética); en esos tiempos ya era conocida la relación existente entre las raíces de un polinomio y la solución de ecuaciones mediante la factorización (teorema del factor).

Los contenidos de álgebra son una base fundamental para el desarrollo de cualquier aplicación en cualquier área, ya sea de la ingeniería, tecnología u otras áreas científicas. Los polinomios son utilizados como el medio para expresar los fenómenos de la naturaleza en un lenguaje matemático, para transformarlo mediante resultados matemáticos y luego interpretar la respuesta al fenómeno en cuestión.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
Matemático italiano (1180-1250 d. C.)

En esta unidad aprenderás a...

- Sumar y restar fracciones algebraicas.
- Multiplicar y dividir fracciones algebraicas.
- Resolver operaciones combinadas con fracciones algebraicas.

Anexos

Se incluyen páginas con diferente tipo de información al final del libro:

- Fórmulas y simbología.
- Material adicional para complementar el trabajo en clases específicas.
- Fichas con actividades de refuerzo para ampliar o profundizar algunos temas.

Trabaja en tu cuaderno

Este ícono aparece en todas las clases de **Repasa tus conocimientos** y **Practica lo aprendido**, además de las secciones **Practica** de todas las clases. Su propósito es recordarle al estudiante que debe resolver todos los ejercicios en su cuaderno.

Trabaja en tu cuaderno

Índice

Unidad 1

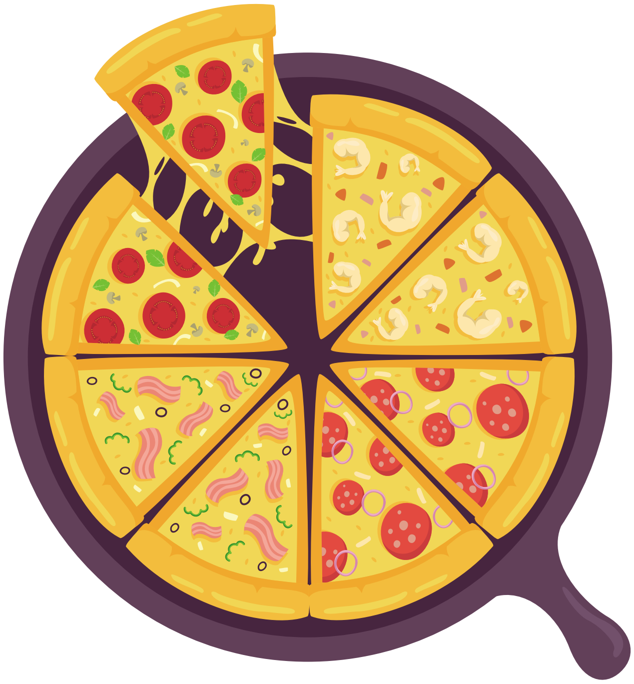
Fracciones algebraicas

La palabra **fracción** se deriva del latín fractio que es el sustantivo del verbo "frangere", que significa 'partir' o 'quebrar'.

Las fracciones se aplican en diferentes actividades de la cotidianidad, por ejemplo, en la política y la sociología cuando se organizan grupos de un partido político o una organización que discrepa del resto y se hace independiente. En el cristianismo, se denomina de esta manera al acto de dividir el pan y repartir el vino. En geografía, una fracción geográfica es una subdivisión realizada a nivel provincial o municipal.

En química, física o biología, fracción es una de las partes en que se divide una sustancia.

En matemática, es el número que resulta de la división de un todo en cierto número de partes. Mientras que en álgebra, una fracción es la división de dos polinomios. Las fracciones algebraicas pueden ser propias, impropias, equivalentes, homogéneas y heterogéneas. Estos conceptos ya se han trabajado con números y ahora se trabajarán con expresiones algebraicas.



En esta unidad aprenderás a...

- Reconocer fracciones algebraicas.
- Clasificar fracciones algebraicas como racionales e irracionales.
- Identificar fracciones equivalentes.
- Simplificar fracciones algebraicas.
- Clasificar fracciones algebraicas como homogéneas y heterogéneas.

Tipos de fracciones algebraicas

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Anota la expresión algebraica que corresponde a cada frase.
   a. Un número **x** disminuido en tres.
   b. El doble de un número **y**.
   c. La sexta parte de la suma de dos números **x** y **h**.
   d. Un número **z** aumentado en dos.
   e. El quíntuple de un número **h** disminuido en siete.

2. Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de monomios.
   a. $x + x$
   b. $3a - 2a$
   c. $16a^2b^2 - 9a^2b^2$
   d. $-7x^4y + 8x^4y$
   e. $-5x + y + 15x - 9y - 8x$
   f. $3x + 6x + 14y - x$
   g. $-10x - 16y - 4y - 7x$
   h. $7x - y + 7x - 3y - 5x$

3. Clasifica cada expresión en monomio, binomio, trinomio o polinomio de 4 o más términos.
   - Toma en cuenta que en algunos casos debes reducir los términos semejantes.

   a. $-4x^2y + 6x^4y - 8y + 2$
   b. $6a^2 + 5b + 6a - a^2$
   c. $6xy^5 + 3y^5x + 4$
   d. $-x^6 + x^4 + 17x + 8$
   e. $-7 + 5x^2y + 6xy^2 + x$
   f. $4x^2 + 2x + xy + 3yx$
   g. $3a^3b - 9ba^2$
   h. $3m - 7m$

4. Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomios.
   a. $2x \cdot 5x^9y^6$
   b. $7a^6b^2 \cdot (-8a^9b^3c)$
   c. $-8xy^2 \cdot (-9yx^3) \cdot 3x^5$
   d. $m^5n^3 \cdot (-8n^4) \cdot (-6nz^7)$
   e. $\frac{-7}{2}w^9x \cdot \frac{4}{7}w^7x^3y^5z^8$
   f. $\frac{9}{7}m^5n^9 \cdot (-5m^9n^7)$
   g. $\frac{5}{2}a^3 \cdot (-9)$
   h. $\frac{1}{8}x^3y \cdot (-2x^4y^3) \cdot (-8x^5)$

5. Resuelve las siguientes multiplicaciones de polinomios.
   a. $7x(x - 3)$
   b. $(2x + 9)(2x - 8)$
   c. $(x + 4)(x^2 - 7x)$
   d. $(x - 9)(x^2 + 4x)$
   e. $(x + 11)(x - 5)$
   f. $(7x + 1) \cdot x^9$
   g. $(9y - 5)(7y^2 + 1)$
   h. $(-8z + 7)(z - 2)$

6. Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones entre fracciones.
   a. $\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{8}$
   b. $\frac{9}{7} \div \frac{8}{9}$
   c. $\frac{10}{9} \cdot \frac{7}{40}$
   d. $\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}$
   e. $\frac{3}{6} \div \frac{1}{5}$
   f. $\frac{-12}{2} \cdot \frac{5}{7}$
   g. $\frac{1}{14} \cdot \frac{-10}{7}$
   h. $\frac{-16}{7} \div \frac{-7}{20}$
   i. $\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3}$
   j. $\frac{-18}{6} \cdot \frac{-15}{8}$

1.2 Fracciones algebraicas racionales e irracionales

Problema

Escribe una fracción que cumpla las siguientes características:

1. El numerador corresponde al triple de un número aumentado en cuatro.
2. El denominador corresponde al cuadrado del mismo número más el doble de ese número disminuido en ocho.

Solución

Se determina una letra que represente el número descrito en lenguaje algebraico: **x**.

1. El numerador se convierte en expresión algebraica de acuerdo a lo siguiente:
   - El triple de un número se escribe: **3x**.
   - Se le suma cuatro a la expresión anterior: **3x + 4**.
2. De igual forma que en el **punto 1**, el denominador del **punto 2** se forma así:
   - El cuadrado del número desconocido: $\mathbf{x^2}$.
   - El cuadrado del número desconocido más el doble del número: $\mathbf{x^2 + 2x}$.
   - El cuadrado del número desconocido más el doble del número disminuido en ocho: $\mathbf{x^2 + 2x - 8}$.

Por lo tanto, la fracción es:

$$\frac{3x + 4}{x^2 + 2x - 8}$$

Conclusión

Una **fracción algebraica** corresponde a una fracción formada por dos polinomios P(x) y Q(x), de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $Q(x) \neq 0$.

Ejemplos:

a. $\frac{8x}{x^3 - 6}$ **b.** $\frac{7x + 4x^8}{1 + x}$ **c.** $\frac{x^2 - 5x + 6}{8 + x}$

Fracciones racionales e irracionales

Una fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es **racional** si P(x) y Q(x) son polinomios con $Q(x) \neq 0$. Por Por ejemplo, $\frac{5x - 4}{6x^2 + 5x + 9}$.

Una fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es **irracional** sí P(x) o Q(x) son polinomios con $Q(x) \neq 0$, si el numerador o el denominador o los dos **NO** son polinomios. Por ejemplo, $\frac{5\sqrt{x} + 9x + 6}{x^2 + 8x - 7}$.

Recuerda

Las partes de una fracción son:

$\frac{a}{b}$ a → numerador; b → denominador

Recuerda

En lenguaje algebraico se entiende:

- **Triple de un número**: multiplicar por 3.
- **Aumentar**: sumar.
- **Cuadrado de un número**: elevar a exponente 2 el número.
- **Doble de un número**: multiplicar por 2.
- **Disminuir**: restar.

Recuerda

No toda expresión algebraica es un polinomio. Si los exponentes en las variables son números enteros negativos o fracciones o la expresión contiene alguna raíz **NO** corresponde a un polinomio.

Datos interesantes

Para describir cantidades desconocidas en expresiones algebraicas se puede utilizar cualquier letra del abecedario.
La **x**, la **y** y la **z**, son las de mayor uso; existe una teoría que dice que se popularizaron porque los primeros impresores del libro de Descartes *La Géométrie*. empezaron a utilizar las menos comunes en el idioma original, el francés.

Observa cómo se hace

Clasifica las siguientes fracciones algebraicas en racionales e irracionales.

a. $\frac{1}{2x^{-3}+6x^2+4}$ **b.** $\frac{3x^4-3x^3+9}{10x^7+7x-7}$ **c.** $\frac{3+4x}{8x^{-\frac{3}{2}}-6x+9}$

Observa cada fracción algebraica y determina cuáles poseen polinomios y cuáles no.

a. En la fracción algebraica $\frac{1}{2x^{-3}+6x^2+4}$, observa un exponente negativo en el denominador (x^{-3}), lo que indica que la expresión algebraica **NO** es un polinomio, por lo tanto la fracción algebraica es irracional.

b. En la fracción algebraica $\frac{3x^4-3x^3+9}{10x^7+7x-7}$, observa que el numerador y el denominador son polinomios, por lo tanto la fracción algebraica es racional.

c. En la fracción algebraica $\frac{3+4x}{8x^{-\frac{3}{2}}-6x+9}$, observa un exponente fraccionario en el denominador ($x^{-\frac{3}{2}}$), lo que indica que la expresión algebraica **NO** es un polinomio, por lo tanto la fracción algebraica es irracional.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe con tus propias palabras qué es una fracción algebraica.

2. Indica en qué se diferencian las fracciones algebraicas racionales de las irracionales.

3. Anota en tu cuaderno cuáles de las expresiones indicadas son fracciones algebraicas.

a. $\frac{10x+5}{6x^2-10}$

b. $2x^2 - 7x + 8$

c. $\frac{5x+x^{-2}}{2+x}$

d. $\frac{x^2+9x-9}{3+x}$

e. $\frac{1}{(5-y)^{-1}}$

f. $\frac{x}{y}$

4. Clasifica las siguientes fracciones algebraicas en racionales e irracionales.

a. $\frac{7x^2+9x^3y^2}{y^3+9}$

b. $\frac{4x^2-6x+4}{x^4+7x+9}$

c. $\frac{1}{\sqrt{2x^6}+6x+6}$

d. $\frac{3x}{8x^{-3}+8x^2+2}$

e. $\frac{9+6x^2}{4x^{\frac{5}{7}}+2x+6}$

f. $\frac{x-9}{8x^2-9x-2}$

g. $\frac{x^2+2}{5x-3}$

h. $\frac{\sqrt{x^3y-10}}{x^2+4}$

5. Crea 3 fracciones algebraicas racionales y 3 fracciones algebraicas irracionales.

1.3 Fracciones algebraicas equivalentes

Problema

Si se multiplica el numerador y el denominador de la fracción algebraica $\frac{2x}{6x+5}$ por el polinomio **x - 8**, ¿qué fracción algebraica se obtiene?

Solución

1. Multiplica el numerador **2x** por cada término de **x - 8**:

$$\begin{aligned} 2x \bullet (x - 8) &= 2x \bullet \mathbf{x} - 2x \bullet \mathbf{8} \\ &= 2x^2 - 16x \end{aligned}$$

2. Multiplica cada término del denominador **6x + 5** por cada término de **x - 8**:

$$\begin{aligned} (6x + 5) \bullet (x - 8) &= \mathbf{6x \bullet x - 6x \bullet 8 + 5 \bullet x - 5 \bullet 8} \\ &= 6x^2 - \mathbf{48x + 5x} - 40 \longrightarrow \text{Se suman los términos semejantes} \\ &= 6x^2 - \mathbf{43x} - 40 \end{aligned}$$

3. Colocamos los resultados de las multiplicaciones en forma fraccionaria, así:

$$\frac{2x}{6x+5} \bullet \frac{x-8}{x-8} = \frac{2x^2 - 16x}{6x^2 - 43x - 40}$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{2x}{6x+5}$ es equivalente a $\frac{2x^2 - 16x}{6x^2 - 43x - 40}$.

Conclusión

Una **fracción algebraica equivalente** corresponde al resultado de multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ por un mismo polinomio distinto de 0. Así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \bullet \frac{R(x)}{R(x)} = \frac{S(x)}{T(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{R(x)} = \frac{U(x)}{V(x)}$$

Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a la fracción algebraica $\frac{S(x)}{T(x)}$ se cumple que:

$$P(x) \bullet T(x) = Q(x) \bullet S(x)$$

Recuerda

Si en una fracción el numerador y el denominador son iguales, la fracción equivale a 1.

Ejemplos:

a. $\frac{9}{9} = 1$

b. $\frac{2}{2} = 1$

c. $\frac{7}{7} = 1$

¡Atención!

Todo número o expresión algebraica multiplicada por 1 resulta en el mismo número o expresión algebraica.

Datos interesantes

Las **fracciones algebraicas** tienen diversas aplicaciones; por ejemplo, en el cálculo de la dosis de los medicamentos de los niños. Por ejemplo, un doctor en pediatría debe utilizar la fórmula de Young $N = \frac{xy}{y + 12}$, para deducir la dosis de medicamento que debe tomar un menor entre 2 y 12 años. Se toma como referencia una dosis de adulto.

Observa cómo se hace

Verifica si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes:

1. $\frac{x + 3}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x}$. **2.** $\frac{x + 1}{x}$ y $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

Aplica la relación P(x) • T(x) = Q(x) • S(x) indicada en la sección **Conclusión** para comprobar fracciones algebraicas equivalentes:

1. Para $\frac{x + 3}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x}$ se realizan las multiplicaciones:

$$(x + 3) \bullet (x^2 - 2x) = (x - 2) \bullet (x^2 + 3x)$$
$$x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 6x = x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x$$
$$x^3 + x^2 - 6x = x^3 + x^2 - 6x$$

Como los productos son iguales se comprueba que las fracciones $\frac{x + 3}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x}$ son equivalentes.

2. Para $\frac{x + 1}{x}$ y $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$ se realizan las multiplicaciones:

$$(x + 1) \bullet (x - 1) = x(x^2 + 1)$$
$$x^2 - 1 = x^3 + x$$

Como los productos son diferentes se determina que las fracciones $\frac{x + 3}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x}$ **NO** son equivalentes.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Obtén una fracción algebraica equivalente a cada fracción algebraica dada, resolviendo las multiplicaciones propuestas.

- Comprueba cada equivalencia obtenida.

a. $\frac{x}{2x + 7} \bullet \frac{6x^3}{6x^3}$

b. $\frac{5y - 1}{3y} \bullet \frac{y^2 + 6}{y^2 + 6}$

c. $\frac{-2z + 3}{-9z^4} \bullet \frac{z - 3}{z - 3}$

d. $\frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 + 4} \bullet \frac{x + 3}{x + 3}$

e. $\frac{7xy^2}{5x + 9y} \bullet \frac{2x^3y}{2x^3y}$

f. $\frac{6x - 4y}{5xy} \bullet \frac{9y^2 + 4}{9y^2 + 4}$

2. Identifica cuáles fracciones son equivalentes. Anota E si son equivalentes o NE si no lo son.

a. $\frac{x - 4}{3x - 12}$ y $\frac{1}{2}$

b. $\frac{x^2 + x}{3x}$ y $\frac{x + 1}{3}$

c. $\frac{x}{x^2 - x}$ y $\frac{5}{5x - 5}$

d. $\frac{x^2y^3}{6x^2 - 7xy}$ y $\frac{x^3y^3 + x^2y^4}{6x^3 - x^2y - 7xy^2}$

e. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 8}$ y $\frac{x - 1}{x - 4}$

f. $\frac{4x + 3}{3x - 8}$ y $\frac{6x}{3x + 7}$

g. $\frac{8}{w}$ y $\frac{8w - 56}{w^2 - 7w}$

h. $\frac{3x^3 - 5}{x - 5}$ y $\frac{6x^4 - 10x}{2x^2 - 10x}$

1.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica cuáles de las expresiones indicadas son fracciones algebraicas. Justifica tu respuesta.

a. $\frac{-11}{9}$

b. $\frac{2x}{x^2 - 25}$

c. $x^2 - 9x - 14$

d. $\frac{x^{-2} - 5x + 25}{x^2 - \sqrt{x}}$

e. $\frac{\sqrt{x-9}}{x^3 - \frac{x}{9}}$

f. $\frac{33y^8}{17x}$

g. $\frac{7-x}{x+3}$

h. $\frac{5x+4}{6}$

2. Clasifica las siguientes fracciones algebraicas en racionales e irracionales.

a. $\frac{6x^2 + 3}{\sqrt{5x}}$

b. $\frac{10 + \sqrt{y^4}}{\sqrt{y^3}}$

c. $\frac{8m^7 - 6}{9m + 7}$

d. $\frac{z^9 + z^{-3}}{-z^7}$

e. $\frac{44ab^2}{a + b^6}$

f. $\frac{4 - 7x^7}{\sqrt[3]{x}}$

g. $\frac{4x^7}{x^2 + 3x - 3}$

h. $\frac{x^2 + x - 32}{4}$

3. Determina cuáles de los siguientes pares de fracciones algebraicas son equivalentes.

a. $\frac{4x+3}{x}$ y $\frac{4x+9}{8x}$

b. $\frac{7z^2}{8z^2 + 5z}$ y $\frac{14z^3}{16z^3 + 10z^2}$

c. $\frac{9y^2}{6y-3}$ y $\frac{3y^2}{2y-1}$

d. $\frac{-9y^2}{-y^3 + 9y^2}$ y $\frac{9y}{7y+6}$

e. $\frac{m^2 - 3n + 5}{m^2 + 1}$ y $\frac{m^2 + 7m + 1}{9m^2 - 10}$

f. $\frac{4x-4}{x+5}$ y $\frac{4x^2 + 12x - 16}{x^2 + 9x + 20}$

g. $\frac{x+3}{2xy}$ y $\frac{7x+3}{x}$

h. $\frac{6x^4y}{8x^2y + 9y^3}$ y $\frac{7x+9}{3x^2 + 5x}$

i. $\frac{7x - 2y}{8xy}$ y $\frac{7x^3 - 2x^2y}{8x^3y}$

j. $\frac{9x^2y}{4x^2 + 9y^2}$ y $\frac{3xy}{5 + 5x}$

k. $\frac{7x^2y + 7xy^2}{9x^2y + 5xy^2}$ y $\frac{14x^4y + 14x^3y^2}{18x^4y + 10x^2y^2}$

l. $\frac{4x + y}{2x - 4y}$ y $\frac{16xy + 4y^2}{4xy - 16y^2}$

4. Determina una fracción algebraica equivalente para cada caso.

a. $\frac{8x^5}{7y}$

b. $\frac{3x - 9y}{x^2 - 9}$

c. $\frac{4x - 7y}{x^2 - 25}$

d. $\frac{8x^2 - 9x + 3y}{x^2 - y^2}$

e. $\frac{3m}{9m^3 - 9}$

f. $\frac{x + x^4}{8x + 9}$

g. $\frac{4x^3 + 4x^2 - 6x}{x^2 - 64}$

h. $\frac{6}{7x}$

i. $\frac{8x}{9x - 10}$

j. $\frac{3x - 7}{x^3 - 27}$

Otros tipos de fracciones algebraicas y simplificación

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Extrae el factor común de cada polinomio y anota la factorización completa.
   a. $9x - 9x^4y^4$
   b. $7x^5 + 7x^9y^2$
   c. $5x^2n^8 - 10x^5$
   d. $2x^5y^4 + 18x^6y^4$
   e. $7a^4b^4 - 21ab^3 + 7b$
   f. $6x + 24w - 18x^3w^8$

2. Factoriza los siguientes trinomios.
   a. $x^2 - 3x - 40$
   b. $x^2 + 6x - 7$
   c. $y^2 - 3y - 4$
   d. $y^2 - 10y + 9$
   e. $x^2 + 12x + 20$
   f. $y^2 + 2y - 48$
   g. $42x^2 + 85x + 42$
   h. $9x^2 - 27x + 14$
   i. $12x^2 - 28x - 5$
   j. $27y^2 - 12y + 1$
   k. $14y^2 - 15y + 4$
   l. $54y^2 + 6y - 28$

3. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.
   a. $x^2 - 6x + 9$
   b. $m^2 + 12m + 36$
   c. $y^2 - 16y + 64$
   d. $k^2 - 8k + 16$
   e. $x^2 - 2x + 1$
   f. $x^2 + 18x + 81$

4. Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.
   a. $x^2 - 64$
   b. $x^2 - y^2$
   c. $x^2 - 36$
   d. $25y^2 - 4$
   e. $x^2 - 100y^6$
   f. $81 - m^4$

5. Identifica cuáles pares de fracciones son homogéneas y cuáles heterogéneas.
   a. $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{4}$
   b. $\frac{3}{2}$ y $\frac{8}{3}$
   c. $\frac{7}{6}$ y $\frac{5}{6}$
   d. $\frac{-9}{7}$ y $\frac{-3}{7}$
   e. $\frac{3}{8}$ y $\frac{-7}{5}$
   f. $\frac{-5}{3}$ y $\frac{7}{3}$

6. Determina el m. c. m. de los denominadores de cada grupo de fracciones.
   a. $\frac{1}{7}$ y $\frac{13}{3}$
   b. $\frac{7}{6}$ y $\frac{2}{5}$
   c. $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{15}$
   d. $\frac{9}{6}$ y $\frac{3}{8}$
   e. $\frac{8}{5}$ y $\frac{-1}{7}$
   f. $\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{9}$
   g. $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{9}$ y $\frac{1}{8}$
   h. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{2}$
   i. $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{2}{6}$
   j. $\frac{2}{4}$, $\frac{9}{8}$ y $\frac{3}{6}$
   k. $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{4}$ y $\frac{1}{9}$
   l. $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{3}{8}$

2.2 Simplificación de fracciones algebraicas

Problema

Observa la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}$$

1. Factoriza el numerador y el denominador de la fracción algebraica.
2. Elimina los factores iguales que observes en el numerador y el denominador de la fracción algebraica obtenida.

Solución

1. Primero, se factoriza el binomio que corresponde al numerador de la fracción algebraica mediante el método de la diferencia de cuadrados de la siguiente forma:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a-3)}{a^2+6a+9}$$

Luego, se factoriza el polinomio que corresponde al denominador de la fracción algebraica mediante el método del trinomio cuadrado perfecto, así:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}$$

2. Observa que en el denominador la expresión $(a + 3)^2$ es equivalente a **(a + 3)(a + 3)**. Por lo tanto, se sustituye en la fracción algebraica esa equivalencia:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)(a+3)}$$

En el numerador y en el denominador se repite la expresión (a + 3), por lo tanto, se cancelan entre sí:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}=\frac{\cancel{(a+3)}(a-3)}{\cancel{(a+3)}(a+3)}=\frac{a-3}{a+3}$$

Otra forma de cancelar el numerador y el denominador de la fracción algebraica es a través de la propiedad de la potenciación que dice, que en una división si las bases son iguales se mantienen y se restan los exponentes:

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}=\frac{(a+3)^1(a-3)}{(a+3)^2}=\frac{(a-3)}{(a+3)^{2-1}}=\frac{(a-3)}{(a+3)}$$

Por lo tanto, se determina la siguiente equivalencia: $\dfrac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\dfrac{a-3}{a+3}$.

Recuerda

Al polinomio de la forma $\mathbf{x^2 - a^2}$ se le llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza con el producto notable **(x + a)(x - a)**, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Recuerda

El trinomio de la forma $\mathbf{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo con el signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

¿Qué pasaría?

Al igual que en las fracciones numéricas hay fracciones algebraicas que no se pueden simplificar. Este tipo de fracciones, por estar a su mínima expresión se conocen como **fracciones algebraicas irreducibles**.

Conclusión

Simplificar al máximo una fracción algebraica es expresarla en otra fracción algebraica equivalente que sea mucho más sencilla.

Para simplificar una fracción algebraica se siguen los pasos:

1. Se factorizan el polinomio del numerador y el del denominador.
2. Se cancelan los factores del numerador con los del denominador que sean iguales.

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica son monomios, para simplificar esa fracción se divide el monomio del numerador por el del denominador.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. El docente asigna 5 fracciones algebraicas a cada grupo.
   b. De forma colaborativa las simplifican y las transcriben en una lámina para luego comentar con la clase.

Observa cómo se hace

Observa la simplificación de las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{15xy^9z}{9x^3y^8z^2}$

Como el numerador y el denominador corresponden a monomios, para simplificar la fracción algebraica se dividen entre sí:

$$\div 3 \quad \frac{15xy^9z}{9x^3y^8z^2} = \frac{5y^{9-8}}{3x^{3-1}z^{2-1}} = \frac{5y}{3x^2z}$$

Por lo tanto, la fracción algebraica simplificada de $\dfrac{15xy^9z}{9x^3y^8z^2}$ corresponde a $\dfrac{5y}{3x^2z}$.

b. $\dfrac{y^2-3y}{y^2+3y}$

Se determina el factor común de cada polinomio de la fracción algebraica y se cancelan los factores iguales:

$$\frac{y^2-3y}{y^2+3y} = \frac{\cancel{y}(y-3)}{\cancel{y}(y+3)} = \frac{y-3}{y+3}$$

Por lo tanto, la fracción algebraica simplificada de $\dfrac{y^2-3y}{y^2+3y}$ corresponde a $\dfrac{y-3}{y+3}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Simplifica las fracciones algebraicas formadas por monomios.
   a. $\dfrac{3x^5}{12xy^3}$
   b. $\dfrac{6w^2z^2}{5wz^8}$
   c. $\dfrac{9xy^8z^3}{18x^3y^6z^6}$
   d. $\dfrac{36abc^4}{6a^9bc^2}$

2. Simplifica las fracciones algebraicas.
   a. $\dfrac{2ax+4bx}{3ay+6by}$
   b. $\dfrac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$
   c. $\dfrac{3x^2y+15xy}{x^2-25}$
   d. $\dfrac{9x^2y-y}{3x^3+8x^2-3x}$
   e. $\dfrac{27a^2-51a-28}{63a^2-8a-16}$
   f. $\dfrac{9w^2-58w-35}{w^2-49}$

2.3 Fracciones algebraicas homogéneas y heterogéneas

Problema

Observa las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x-1}{3x+1} \quad \frac{5}{8x+5} \quad \frac{7}{3x+1} \quad \frac{3}{6x-7} \quad \frac{2x}{8x-5} \quad \frac{7x+9}{3x+1}$$

1. Anota las que tienen alguna característica común.
2. ¿Qué característica común observaste?

Solución

1. Las fracciones que tienen una característica común son:

$$\frac{x-1}{3x+1} \quad \frac{7}{3x+1} \quad \frac{7x+9}{3x+1}$$

2. Las fracciones anteriores tienen igual denominador.

Conclusión

Dos o más fracciones algebraicas se llaman **fracciones algebraicas homogéneas** sí tienen igual denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x-1}{3x+1} \quad \frac{7}{3x+1} \quad \frac{7x+9}{3x+1}$$

Dos o más fracciones algebraicas se llaman **fracciones algebraicas heterogéneas** si tienen distinto denominador.

Ejemplo:

$$\frac{5}{8x+5} \quad \frac{3}{6x-7} \quad \frac{2x}{8x-5}$$

Las fracciones algebraicas heterogéneas se pueden convertir en homogéneas mediante un procedimiento llamado **homogeneización**. Para homogeneizar fracciones algebraicas heterógeneas se dan los siguientes pasos:

1. Se simplifican las fracciones algebraicas cuando sea posible.
2. Se calcula el m. c. m. de los denominadores para determinar el denominador común de las fracciones homogeneizadas.
3. Se divide el m. c. m. de los denominadores entre cada denominador de las fracciones heterogéneas y el resultado que se obtenga se multiplica por el numerador de la fracción.
4. Se forman las fracciones homogenéas con numerador igual al obtenido en el paso 3 y denominador igual al m. c. m. que determinó.

Recuerda

Si dos o más fracciones numéricas tienen denominadores iguales se llaman **fracciones homogéneas**. Por ejemplo: $\frac{6}{5}$, $\frac{-7}{5}$ y $\frac{4}{5}$.
Si dos o más fracciones numéricas tienen denominadores diferentes se llaman **fracciones heterogéneas**. Por ejemplo: $\frac{1}{3}$, $\frac{-2}{5}$ y $\frac{1}{7}$.

Desarrollo sostenible

Cada persona es única y distinta, con un grupo de habilidades y de características que la distinguen, pero todas las personas deben tener los mismos derechos y las mismas oportunidades. En otras palabras, cada persona debería tener derecho a los mismos sueños, sin tener que enfrentar más obstáculos que las otras. Todos tenemos diferentes capacidades, debemos buscar equidad para acceder a las mismas oportunidades.

Recuerda

Para calcular el m. c. m. de dos o más monomios se determina el m. c. m. de los coeficientes numéricos y los factores literales de mayor exponente (comunes y no comunes en todos los términos; o sea, de cualquier letra que se repita o no).

Para calcular el m. c. m. de dos o más polinomios se factoriza cada uno por separado y se determinan factores comunes y no comunes de mayor exponente.

El m. c. m. debe ser divisible entre las expresiones algebraicas que lo determinan.

Observa cómo se hace

Determina cuáles de las siguientes fracciones algebraicas son heterogéneas y cuáles homogéneas. Homogeneice las heterogéneas entre sí.

$$\frac{7x}{14x+14} \quad \frac{5}{7x-6} \quad \frac{6x-7}{7x-6} \quad \frac{x^2-1}{(x+1)^3} \quad \frac{4x+9}{7x-6}$$

- Las fracciones algebraicas heterogéneas son: $\frac{7x}{14x+14}$ y $\frac{x^2-1}{(x+1)^3}$.
- Las fracciones algebraicas homogéneas son: $\frac{5}{7x-6}$, $\frac{6x-7}{7x-6}$ y $\frac{4x+9}{7x-6}$.

Se homogeneizan las fracciones algebraicas heterogéneas, así:

1. Se simplifican las fracciones algebraicas:

a. $\frac{7x}{14x+14} = \frac{\overset{\div 7}{7x}}{\underset{\div 7}{14(x+1)}} = \frac{x}{2(x+1)}$

b. $\frac{x^2-1}{(x+1)^3} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}^3} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

2. Se determina el m. c. m. de los denominadores: $2(x+1)^2$.

3. Se determinan los numeradores, dividiendo el m. c. m. entre cada denominador de las fracciones heterogéneas simplificadas y el resultado que se obtenga se multiplica por el numerador.

a. $\frac{2(x+1)^2}{2(x+1)} = (x+1)$ y $(x+1) \cdot x = x^2 + x$

b. $\frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2} = 2$ y $2 \cdot (x-1) = 2x - 2$

Por lo tanto, las fracciones heterogéneas son: $\frac{x^2+x}{2(x+1)^2}$ y $\frac{2x-2}{2(x+1)^2}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina si cada par de fracciones algebraicas corresponde a fracciones homogéneas o heterogéneas, anota al lado la respuesta.

a. $\frac{3x-2}{x^2+5y}$ y $\frac{x^4-7}{x^2-5y}$

b. $\frac{n+6}{n^2+n+2}$ y $\frac{n^4-8}{n^2+n+2}$

c. $\frac{38m+3}{m-n}$ y $\frac{5n-7}{m-n}$

d. $\frac{32}{r+s^3}$ y $\frac{r^4-64}{2r+s^3}$

e. $\frac{5xy-3z}{y^4+z}$ y $\frac{x^4-7y}{y^4+z}$

f. $\frac{3x-2}{x^2-y^6}$ y $\frac{x^4-7}{x^2-5y^6}$

2. Homogeneiza cada pareja de fracciones algebraicas.

a. $\frac{1}{7x^2+7x}$ y $\frac{9}{5x^2-5x}$

b. $\frac{y}{y^2+2y+1}$ y $\frac{6}{6y^2-6y}$

c. $\frac{5}{m^3-9m}$ y $\frac{5m}{m^2+4m-5}$

d. $\frac{4y+8}{(y-8)^2}$ y $\frac{8y^3}{y^2-y-56}$

2.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Simplifica cada fracción algebraica formada por monomios.

a. $\dfrac{3a^8b^7}{6a^7b^6}$

b. $\dfrac{-2a^5b^2}{14ab^3}$

c. $\dfrac{a^2b^6c^5}{9a^8b^7c^5}$

d. $\dfrac{4a^3b^6c^2}{12a^3b^3}$

e. $\dfrac{-6b^7}{a^3b^3c^8}$

f. $\dfrac{m^2n^7p^6}{3m^5n^7}$

g. $\dfrac{-2ab^5}{18a^4b^5}$

h. $\dfrac{28xy^6}{21x^4y^6}$

2. Simplifica las fracciones algebraicas formadas por polinomios.

a. $\dfrac{a^2b-9b}{12a^2b-4ab-96b}$

b. $\dfrac{40x^2-8x}{25x^2-1}$

c. $\dfrac{m^2-64}{4nm+32n}$

d. $\dfrac{4x-4y+4z}{7x-7y+7z}$

e. $\dfrac{z^3-4z}{z^3-4z^2+4z}$

f. $\dfrac{7m+6n}{7m^2+6mn}$

g. $\dfrac{x^2-25}{25x-x^3}$

h. $\dfrac{a^4-81}{a^3+9a}$

i. $\dfrac{-24x^2+26x-5}{48x^2-70x+25}$

j. $\dfrac{4m+9}{4m^2+21m+27}$

k. $\dfrac{8-m}{m^2-64}$

l. $\dfrac{21x^4y^2}{21x^4y^2+14x^4y}$

3. Determina si cada par de fracciones algebraicas corresponde a fracciones homogéneas o heterogéneas, anota al lado la respuesta.

a. $\dfrac{m-4}{m-6}$ y $\dfrac{m+1}{m-6}$

b. $\dfrac{x}{x+3}$ y $\dfrac{x^2}{x-3}$

c. $\dfrac{m^2+3}{m+3}$ y $\dfrac{m^2+3m}{m+3}$

d. $\dfrac{z}{z-5}$ y $\dfrac{z+5}{z-5}$

e. $\dfrac{1}{x+7}$ y $\dfrac{1}{y+7}$

f. $\dfrac{9}{x^2+8}$ y $\dfrac{2}{x^2+8x}$

g. $\dfrac{w-9}{w+7}$ y $\dfrac{9-w}{w-7}$

h. $\dfrac{5x+x^2}{x-5}$ y $\dfrac{5-x}{x-5}$

i. $\dfrac{3a-7b}{5b+3a}$ y $\dfrac{3a-7b}{5b-3a}$

j. $\dfrac{6-m}{m+6}$ y $\dfrac{6+16m-m^2}{m+6}$

4. Homogeneiza cada pareja de fracciones algebraicas.

a. $\dfrac{1}{8x-x^2}$ y $\dfrac{8+6x}{64-x^2}$

b. $\dfrac{7}{y^2-81}$ y $\dfrac{y+3}{6y^2-55y+9}$

c. $\dfrac{m-8}{m^2+m}$ y $\dfrac{m+8}{m^4+m^3}$

d. $\dfrac{x-y}{8xy^8}$ y $\dfrac{x}{8xy+8y^2}$

e. $\dfrac{4}{w^3-16w}$ y $\dfrac{9w}{w^2-10w+24}$

f. $\dfrac{x}{x^2+16x+64}$ y $\dfrac{4x}{x^2-64}$

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico fracciones algebraicas.			
2. Clasifico fracciones algebraicas en racionales e irracionales.			
3. Identifico fracciones algebraicas equivalentes.			
4. Obtengo fracciones algebraicas equivalentes.			
5. Compruebo la equivalencia de dos o más fracciones algebraicas.			
6. Simplifico fracciones algebraicas.			
7. Reconozco fracciones algebraicas homogéneas.			
8. Reconozco fracciones algebraicas heterogéneas.			
9. Homogeneizo fracciones algebraicas heterogéneas.			
10. Clasifico con seguridad fracciones algebraicas como homogéneas y heterogéneas.			

Unidad 2

Operaciones básicas con fracciones algebraicas

El área de álgebra comenzó a convertirse en una rama de la matemática cuyo desarrollo requirió estudios especiales. Hacia el siglo XII, el matemático italiano Leonardo de Pisa (más conocido como Fibonacci) divulgó por Europa lo que conocía acerca de polinomios. Estos conocimientos fueron ampliados hacia el siglo XVI por los matemáticos italianos Cardano, Ferrari y Tartaglia, quienes presentaron resultados acerca de la solución de ecuaciones de grados 3 y 4. A partir de entonces, en 1805 aproximadamente, el matemático italiano Paolo Ruffini presentó algunos resultados muy importantes acerca del trabajo con polinomios (uno de ellos, la regla de Ruffini o división sintética); en esos tiempos ya era conocida la relación existente entre las raíces de un polinomio y la solución de ecuaciones mediante la factorización (teorema del factor).

Los contenidos de álgebra son una base fundamental para el desarrollo de cualquier aplicación en cualquier área, ya sea de la ingeniería, tecnología u otras áreas científicas. Los polinomios son utilizados como el medio para expresar los fenómenos de la naturaleza en un lenguaje matemático, para transformarlo mediante resultados matemáticos y luego interpretar la respuesta al fenómeno en cuestión.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
Matemático italiano (1180-1250 d. C.)

En esta unidad aprenderás a...

- Sumar y restar fracciones algebraicas.
- Multiplicar y dividir fracciones algebraicas.
- Resolver operaciones combinadas con fracciones algebraicas.

Adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones algebraicas

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones con fracciones aritméticas.
   - Simplifica cuando sea posible.

a. $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}$
b. $\frac{7}{6}-\frac{3}{6}$
c. $\frac{6}{3}+\frac{7}{6}$
d. $\frac{3}{4}-\frac{7}{9}$
e. $\frac{-8}{6}+\frac{9}{6}$
f. $\frac{1}{6}-\left(\frac{-1}{2}\right)$
g. $\frac{8}{9}+\left(\frac{-5}{9}\right)$
h. $\frac{-1}{6}-\frac{8}{5}$
i. $\frac{-5}{3}-\frac{6}{3}$
j. $\frac{3}{4}+\left(\frac{-9}{3}\right)$
k. $\frac{9}{6}-\left(\frac{-10}{6}\right)$
l. $\frac{-8}{4}+\frac{4}{2}$
m. $\frac{1}{7}-\left(\frac{-1}{2}\right)$
n. $\frac{-8}{7}-\left(\frac{-1}{4}\right)$
o. $\frac{-8}{4}+\frac{9}{10}$
p. $\frac{2}{7}+\frac{9}{4}$
q. $\frac{-2}{5}-\frac{8}{9}$
r. $\frac{-2}{8}+\left(\frac{-2}{5}\right)$

2. Resuelve las siguientes multiplicaciones aritméticas.
   - Simplifica cuando sea posible.

a. $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}$
b. $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}$
c. $\frac{-2}{8}\cdot\frac{3}{5}$
d. $\frac{-8}{2}\cdot\left(\frac{-1}{8}\right)$
e. $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{-1}{9}\right)$
f. $\frac{-1}{7}\cdot\frac{1}{7}$
g. $\frac{-4}{7}\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)$
h. $\frac{-10}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{2}$
i. $\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\left(\frac{-5}{9}\right)$
j. $\frac{-9}{10}\cdot(-5)\cdot\frac{1}{6}$
k. $\frac{-2}{3}\cdot\left(\frac{-5}{4}\right)\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot(-9)$
l. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{7}{10}$

3. Resuelve las siguientes divisiones aritméticas.
   - Simplifica cuando sea posible.

a. $\frac{6}{5}\div\frac{5}{3}$
b. $\frac{3}{2}\div\frac{9}{2}$
c. $\frac{-2}{5}\div\frac{7}{5}$
d. $\frac{-9}{2}\div\left(\frac{-3}{2}\right)$
e. $\frac{4}{7}\div\left(\frac{-4}{3}\right)$
f. $\frac{-1}{6}\div\frac{3}{2}$
g. $\frac{-5}{4}\div\left(\frac{-7}{6}\right)$
h. $\frac{-9}{5}\div\frac{8}{7}\div\frac{12}{9}$
i. $\frac{7}{6}\div\frac{7}{6}\div\left(\frac{-4}{5}\right)$
j. $\frac{-1}{7}\div\frac{7}{8}\div\frac{1}{6}$
k. $\frac{-1}{7}\div\left(\frac{-2}{5}\right)\div\left(\frac{-4}{9}\right)$
l. $\frac{1}{8}\div\left(\frac{-5}{7}\right)\div\frac{1}{2}$

4. Factoriza los siguientes polinomios.

a. $5x^9 - 45x^4y^4$
b. $7a^3x^4 + 7a^4x^2$
c. $9a^4b^4 - 9a^7b^6$
d. $8a^6b^6 + 9a^3b$
e. $x^2 + 6x - 27$
f. $10x^2 - 11x + 1$
g. $x^2 + 4x + 4$
h. $x^2 - 12x + 36$
i. $x^2 - 144$
j. $81 - x^4$

1.2 Adición y sustracción con fracciones algebraicas

Problema

Realiza las siguientes adiciones y sustracciones con fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{6}{x-5}$ **2.** $\dfrac{8}{x+9}-\dfrac{7}{x+9}$ **3.** $\dfrac{6x^4y^7}{8x^9y^4z^5}+\dfrac{7yz^3}{xz}$ **4.** $\dfrac{9}{x-2}-\dfrac{x+5}{x^2-4}$

Solución

1. Al igual que en las fracciones aritméticas, para resolver adiciones de fracciones homogéneas se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador: $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{6}{x-5}=\dfrac{2+6}{x-5}=\dfrac{8}{x-5}$.

2. De igual manera, para efectuar sustracciones entre fracciones homogéneas se restan los numeradores y se mantiene el mismo denominador:

$$\frac{8}{x+9}-\frac{7}{x+9}=\frac{8-7}{x+9}=\frac{1}{x+9}$$

3. Cuando se suman fracciones algebraicas heterogéneas, se homogeneizan para sumarlas:

$\dfrac{6x^4y^7}{8x^9y^4z^5}+\dfrac{7yz^3}{xz}$ → El m. c. m. de los denominadores es $8x^9y^4z^5$.

$\dfrac{6x^4y^7}{8x^9y^4z^5}+\dfrac{56x^8y^5z^7}{8x^9y^4z^5}$ → El m. c. m. se divide entre cada denominador, luego ese resultado se multiplica por el numerador respectivo, después esos resultados parciales se suman o se restan para obtener el nuevo numerador de la fracción algebraica.

$\dfrac{6x^4y^7+56x^8y^5z^7}{8x^9y^4z^5}$ → Como las expresiones algebraicas que se obtienen no son monomios semejantes no se pueden sumar.

$\dfrac{2x^4y^5(3y^2+28x^4z^7)}{8x^9y^4z^5}=\dfrac{y(3y^2+28x^4z^7)}{4x^5z^5}$ → Se factoriza aplicando factor común monomio y se simplifica la fracción algebraica.

4. Se homogeneizan las fracciones algebraicas para restarlas como en el apartado anterior:

$\dfrac{9}{x-2}-\dfrac{x+5}{x^2-4}$ → Si los denominadores son polinomios, primero se factoriza los denominadores en lo posible. En este caso el primer denominador queda como $(x-2)$ y el segundo se factoriza así: $x^2-4=(x+2)(x-2)$.

$\dfrac{9(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{x+5}{(x+2)(x-2)}$ → El m. c. m. son los factores comunes y no comunes con mayor exponente. En este caso es $(x+2)(x-2)$. Para homogeneizar la primera fracción se divide el m. c. m. entre el denominador y luego se multiplica por 9; de manera similar se procede con la segunda fracción dividiendo el m. c. m. entre el segundo denominador y después se multiplica por $(x+5)$.

$\dfrac{9x+18-(x+5)}{x^2-4}=\dfrac{9x+18-x-5}{x^2-4}$ → Se restan los numeradores obtenidos. Toma en cuenta que $9(x+2)=9x+18$.

$$=\frac{8x+13}{x^2-4}$$

Recuerda

En aritmética, para resolver adiciones y sustracciones de **fracciones homogéneas**, se suman o restan los numeradores y se mantienen los denominadores:

1. $\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{4+1}{6}=\dfrac{5}{6}$

2. $\dfrac{8}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{8-2}{5}=\dfrac{6}{5}$

Recuerda

En aritmética, para resolver adiciones y sustracciones de **fracciones heterogéneas**, se convierten las fracciones en fracciones equivalentes de igual denominador mediante el cálculo del m. c. m. y se resuelve la operación:

1. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{9}=\dfrac{9\div3\cdot1}{9}+\dfrac{7}{9}$

$\dfrac{3}{9}+\dfrac{7}{9}=\dfrac{10}{9}$

2. $\dfrac{7}{6}-\dfrac{2}{5}=$

$\dfrac{30\div6\cdot7}{30}-\dfrac{30\div5\cdot2}{30}=$

$\dfrac{35}{30}-\dfrac{12}{30}=\dfrac{23}{30}$

Recuerda

Al restar expresiones algebraicas, el signo de "-" que se antepone al sustraendo cambia el signo de cada término. Por ejemplo:

$(3x + 2) - (x + 2) =$

$3x + 2 - x - 2 =$

$2x$

¡Atención!

En muchas ocasiones cuando los denominadores de las fracciones algebraicas son polinomios es conveniente factorizar esas expresiones para que sea más fácil determinar el m. c. m.

¡Atención!

Al factorizar $\mathbf{x^2 + 2x}$ por factor común se obtiene:

$x(x + 2)$

Recuerda

Para **homogeneizar**, se divide el m. c. m. de los denominadores entre cada denominador de las fracciones heterogéneas, luego cada cociente obtenido se multiplica por el numerador respectivo de su fracción, para finalmente sumar o restar estos resultados parciales, formando el numerador de las fracción resultante, con denominador igual al m. c. m. que se determinó.

Conclusión

Para efectuar una **adición o una sustracción de fracciones algebraicas homogéneas**, se suman o restan las expresiones algebraicas de los numeradores y se mantiene el mismo denominador. De ser posible, se simplifica la fracción algebraica resultante.

Ejemplo:

$\frac{8}{x} - \frac{5x - 9}{x} =$ → Como las fracciones algebraicas son homogéneas se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$\frac{8 - (5x - 9)}{x} =$ → Al restar las expresiones algebraicas de los numeradores tome en cuenta que los términos de la expresión del sustraendo cambian de signo.

$\frac{8 - 5x + 9}{x} =$ → Se restan las expresiones algebraicas semejantes.

$\frac{17 - 5x}{x}$ → La fracción algebraica resultante no se pude simplificar.

Para efectuar una **adición o una sustracción de fracciones algebraicas heterogéneas**, se homogeneizan las fracciones algebraicas y se procede a obtener el resultado de la siguiente manera:

Ejemplo:

$\frac{7x + 7}{x + 2} + \frac{3}{x^2 + 2x} =$ → Se agrupan los términos del primer denominador y se factorizan los del segundo.

$\frac{7x + 7}{(x + 2)} + \frac{3}{x(x + 2)} =$ → Se determina el m. c. m. de los denominadores, luego se divide entre cada denominador y lo que se obtiene se multiplica por cada numerador, determinando los términos del numerador de la fracción resultante.

$\frac{7x^2 + 7x + 3}{x(x + 2)}$ → Se reducen los términos en el numerador, pero en este caso no se puede porque no son semejantes, obteniendo finalmente la fracción algebraica resultante.

Observa cómo se hace

Calcula la siguiente suma de fracciones algebraicas.

$$\frac{1}{m + 1} + \frac{1}{m^2 - 1} + \frac{1}{m - 1}$$

El m. c. m. de los denominadores es $(m + 1)(m - 1)$ porque $m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$

$\frac{m - 1 + 1 + m + 1}{(m + 1)(m - 1)} =$ → Se coloca el m. c. m. del denominador y se suman los numeradores.

$\frac{(m + m) + (-1 + 1 + 1)}{m^2 - 1} =$ → Se suman los monomios semejantes.

$\frac{2m + 1}{m^2 - 1}$ → La fracción resultante es irreductible, así que no se puede simplificar.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{m + 1} + \frac{1}{m^2 - 1} + \frac{1}{m - 1} = \frac{2m + 1}{m^2 - 1}$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve las siguientes adiciones con fracciones algebraicas homogéneas.

a. $\frac{8a+3}{3a^2}+\frac{3a+7}{3a^2}$

b. $\frac{7x+1}{x^3}+\frac{5x-1}{x^3}$

c. $\frac{2n}{9m}+\frac{n}{9m}+\frac{18n}{9m}$

d. $\frac{8z}{z+4}+\frac{4z}{z+4}+\frac{16z}{z+4}$

e. $\frac{-7a^2-22a-3}{a^2-9}+\frac{8a^2+18a-18}{a^2-9}$

f. $\frac{4}{x^2-81}+\frac{x+5}{x^2-81}$

g. $\frac{x+y}{7x}+\frac{x-y}{7x}$

h. $\frac{8n}{6n^7m^6}+\frac{4n-9}{6n^7m^6}+\frac{9}{6n^7m^6}$

i. $\frac{6}{y+9}+\frac{4}{y+9}$

j. $\frac{3}{6w}+\frac{8w-3}{6w}$

2. Resuelve las siguientes sustracciones con fracciones algebraicas homogéneas.

a. $\frac{2}{x^6}-\frac{5}{x^6}$

b. $\frac{9x^8y^3}{y^5}-\frac{7x^8y^3}{y^5}-\frac{2x^8y^3}{y^5}$

c. $\frac{4a-6b}{9a^8b^4}-\frac{5a-4b}{9a^8b^4}$

d. $\frac{6x}{x+2}-\frac{16x}{x+2}-\frac{8x}{x+2}$

e. $\frac{-z+3+7z^2}{(z+4)^2}-\frac{31+6z^2+2z}{(z+4)^2}$

f. $\frac{x}{x-7}-\frac{7}{x-7}$

g. $\frac{20y+55}{y^2+10y+25}-\frac{5-2y^2}{y^2+10y+25}$

h. $\frac{2x}{4x+9}-\frac{7-4x}{4x+9}$

i. $\frac{9}{y^2+7y}-\frac{2}{y^2+7y}$

j. $\frac{3z}{z^2-9}-\frac{5z}{z^2-9}$

3. Resuelve las siguientes adiciones con fracciones algebraicas heterogéneas.

a. $\frac{5}{4z}+\frac{6}{z+5}$

b. $\frac{x}{9y}+\frac{x}{4y^2}$

c. $\frac{w+4}{3w}+\frac{w^2+4}{3w^2}$

d. $\frac{9m+1}{9m+9}+\frac{7}{3m+3}$

e. $\frac{3w-10}{w^2-2w+1}+\frac{7}{w-1}$

f. $\frac{x+3}{3x}+\frac{x^2-3}{6x^2}$

g. $\frac{y-8}{y+8}+\frac{2y}{y^2-64}$

h. $\frac{x-7}{4x-1}+\frac{3x+6}{16x^2-8x+1}$

i. $\frac{z}{z-3}+\frac{z}{z-4}$

j. $\frac{-9w+5}{-9w+6}+\frac{3w+2}{3w-2}$

4. Resuelve las siguientes sustracciones con fracciones algebraicas heterogéneas.

a. $\frac{8a+2b^8c^2}{8a^8}-\frac{6b^7}{16a^7c^9}$

b. $\frac{9x}{9-x}-\frac{1}{81-x^2}$

c. $\frac{w-3}{w^2+w}-\frac{8}{w^2+2w+1}$

d. $\frac{7m-6}{m^2-36}-\frac{4}{m+6}$

e. $\frac{1-x}{x^2-2x+1}-\frac{x}{5x-5}$

f. $\frac{x-2}{x+2}-\frac{8x}{x^2-4}$

g. $\frac{5y+9}{3y}-\frac{6y-8x}{6x^3y^3}$

h. $\frac{6n}{3m^2-6mn}-\frac{m-mn}{3mn-6n^2}$

i. $\frac{1}{y^2-25}+\frac{y}{y^2-10y+25}$

j. $\frac{9}{x+5}-\frac{2x+3}{x^2-4x-45}-\frac{4}{x-9}$

1.3 Multiplicación y división con fracciones algebraicas

Recuerda

Para resolver una **multiplicación de fracciones aritméticas** se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Si es posible, se simplifica la fracción.

Ejemplo:

$$\frac{9}{7}\cdot\frac{6}{4}=\frac{9\cdot 6}{7\cdot 4}=\frac{54}{28}=\frac{27}{14}$$

¡Atención!

Observa que:

(x - 2)(x + 2) corresponde a la diferencia de cuadrados: x^2 - 4.

Recuerda

Para resolver una **división de fracciones aritméticas** se multiplica el dividendo por la fracción inversa del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{9}{7}\div\frac{6}{4}=\frac{9}{7}\cdot\frac{4}{6}$$

$$\frac{9}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{9\cdot 4}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}=\frac{6}{7}$$

Problema

Resuelve la multiplicación y la división entre las fracciones algebraicas que se indican.

- Utiliza el mismo procedimiento de fracciones aritméticas.

1. $\dfrac{x-2}{x-4}\cdot\dfrac{x+2}{x-7}$
2. $\dfrac{x+1}{x-1}\div\dfrac{x-3}{x-2}$

Solución

1. Multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, en la operación indicada.

$$\frac{x-2}{x-4}\cdot\frac{x+2}{x-7}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x-7)}$$

$$=\frac{x^2+2x-2x-4}{x^2-7x-4x+28}$$

$$=\frac{x^2-2}{x^2-11x+28}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x-2}{x-4}\cdot\frac{x+2}{x-7}=\frac{x^2-2}{x^2-11x+28}$$

2. Para dividir $\dfrac{x+1}{x-1}\div\dfrac{x-3}{x-2}$ se transforma en la multiplicación:

$$\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-2}{x-3}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-2x+x-2}{x^2-3x-x+3}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x+1}{x-1}\div\frac{x-3}{x-2}=\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$$

Conclusión

Para **multiplicar fracciones algebraicas** se realizan los siguientes pasos:

1. Se factorizan los polinomios que forman cada fracción algebraica y se simplifican los factores comunes que se observen.
2. Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Al final se reducen los términos semejantes.

Ejemplo: Resuelve la multiplicación $\frac{x^2-16}{x^2+5x-24}\cdot\frac{x-3}{x^2-x-12}$.

$\frac{(x+4)(x-4)}{(x-3)(x+8)}\cdot\frac{x-3}{(x-4)(x+3)}$ → Se factoriza cada polinomio representado en las fracciones algebraicas.

$\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-3)}(x+8)}\cdot\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-4)}(x+3)}$ → Se simplifican los factores comunes.

$\frac{x+4}{x+8}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{(x+4)\cdot 1}{(x+8)(x+3)}$ → Se multiplican los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

$\frac{x+4}{x^2+3x+8x+24}=\frac{x+4}{x^2+11x+24}$ → Se suman los términos semejantes obtenidos en el denominador.

Por lo tanto:

$$\frac{x^2-16}{x^2+5x-24}\cdot\frac{x-3}{x^2-x-12}=\frac{x+4}{x^2+11x+24}$$

Para **dividir fracciones algebraicas** se realizan los siguientes pasos:

1. Se plantea la multiplicación entre el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.
2. Se factorizan los polinomios que forman cada fracción algebraica y se simplifican los factores comunes que se observen.
3. Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Al final se reducen los términos semejantes.

Ejemplo: Efectúa la división $\frac{x^2-x}{2x^2+28x+98}\div\frac{x^2-1}{x^2-49}$.

$\frac{x^2-x}{2x^2+28x+98}\cdot\frac{x^2-49}{x^2-1}$ → Se transforma la división en una multiplicación entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

$\frac{x(x-1)}{2(x+7)^2}\cdot\frac{(x+7)(x-7)}{(x+1)(x-1)}$ → Se factoriza cada polinomio representado en las fracciones algebraicas.

$\frac{x\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x+7)}^2}\cdot\frac{\cancel{(x+7)}(x-7)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$ → Se simplifican los factores comunes.

$\frac{x}{2(x+7)}\cdot\frac{x-7}{x+1}=\frac{x(x-7)}{2(x+7)(x+1)}$ → Se multiplican los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

$\frac{x^2-7x}{2(x^2+x+7x+7)}$ → Se resuelven las multiplicaciones indicadas en el numerador y el denominador

$\frac{x^2-7x}{2x^2+16x+14}$ → Se suman los términos semejantes obtenidos en el denominador y ese resultado se multiplica por 2.

Por lo tanto:

$$\frac{x^2-x}{2x^2+28x+98}\div\frac{x^2-1}{x^2-49}=\frac{x^2-7x}{2x^2+16x+14}$$

¡Atención!

No siempre habrá factores comunes para simplificar, las multiplicaciones y divisiones se pueden resolver con numeradores y denominadores de diferentes fracciones.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Los estudiantes exponen en láminas ejercicios de multiplicación y división de fracciones algebraicas resueltos y los explican ante la clase.

¿Qué pasaría?

Si se dividen más de 2 fracciones algebraicas, se mantiene la primera fracción, se cambian las demás fracciones por sus inversos multiplicativos y se cambia el signo de división por multiplicación. Por ejemplo:

$$\frac{x^7}{y}\div\frac{x^3}{y^5}\div\frac{x^5}{y^7}=$$

$$\frac{x^7}{y}\cdot\frac{y^5}{x^3}\cdot\frac{y^7}{x^5}=$$

$$\frac{y^{11}}{x}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{x-3}{5} \cdot \frac{10}{7x-21}$

b. $\frac{x+6}{x-7} \cdot \frac{x^2-4x-21}{x^2-36}$

c. $\frac{x^2-1}{3x^2-4x} \cdot \frac{9x^2-16}{3x-3}$

d. $\frac{x^2-5x}{x^2-18x+81} \cdot \frac{x^2-81}{x^2-25}$

e. $\frac{z^3-z}{6z-9} \cdot \frac{16z-24}{9z-9}$

f. $\frac{a^2+4a-12}{a^2-25} \cdot \frac{a^2-14a+45}{7a^2-28}$

g. $\frac{x^2-16}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x-4}$

h. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-21} \cdot \frac{x^2+11x+10}{3x^2-x-2}$

i. $\frac{n^2+6n+9}{n^2+n} \cdot \frac{n}{n^2-9}$

j. $\frac{6y-36}{64-y^2} \cdot \frac{y^2-y-72}{y^2-36}$

k. $\frac{x^2+4}{5-5x} \cdot \frac{x^3-1}{5x^2+5x+5}$

l. $\frac{x^2+6x+9}{x-3} \cdot \frac{3x-9}{5x+15}$

m. $\frac{y-10}{y-3} \cdot \frac{y^2-6y+9}{y^2-7y-30}$

n. $\frac{a^2+a^3b}{1-4b^2} \cdot \frac{1-16b^4}{b^2+ab^3}$

o. $\frac{9w^2-9}{8w^2-16w+8} \cdot \frac{4}{3w+3}$

p. $\frac{mn-7}{m^4n^4-10m^2n^2+25} \cdot \frac{m^2n^2-5}{m^2n^2-49}$

2. Resuelve las siguientes divisiones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{x-y}{x+y} \div \frac{y-x}{y^2}$

b. $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x^2-4x-21}{x+2}$

c. $\frac{n-1}{2n^2+4n+2} \div \frac{n^2-2n+1}{n+1}$

d. $\frac{z^2-1}{5z+5} \div \frac{z^2-z}{6z^2+2z+8}$

e. $\frac{a^2-49}{3a-6} \div \frac{a^2-7a}{a^2-11a+18}$

f. $\frac{x^2+5x-36}{x^2-25} \div \frac{x^2-16}{x^2-2x-15}$

g. $\frac{x^2-16x+64}{2x^3-x^2} \div \frac{5x^2-38x-16}{4x^2-1}$

h. $\frac{2n-8}{n^2-81} \div \frac{n^2-8n+16}{n^2+18n+81}$

i. $\frac{y+8}{y-1} \div \frac{2y^2+16y+9xy+72x}{y^2-1}$

j. $\frac{w^2+3w}{w^2+6w-27} \div \frac{w}{w+9}$

k. $\frac{x+4}{3x^2-3x} \div \frac{3x}{x^2-1}$

l. $\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x+1} \div \frac{x-3}{x^3+1}$

m. $\frac{x-x^3}{x+8} \div \frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+17x+72}$

n. $\frac{y^3-4y}{y^2-36} \div \frac{y^2+2y}{y-6}$

o. $\frac{3x^2+7x+4}{x^2+9x} \div \frac{3x^2+4x}{x+9}$

p. $\frac{5m^2-10mn}{n^2} \div \frac{m^2-4n^2}{mn+2n^2}$

1.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes adiciones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{3x-3}{x-6}+\frac{2}{x-6}$

b. $\frac{x+25}{x^2-16}+\frac{x^2-6x-21}{x^2-16}$

c. $\frac{2+29x-4x^2}{3x^2-5x}+\frac{7x^2-7x-47}{3x^2-5x}$

d. $\frac{2x^2-14x}{x^2-49}+\frac{49-x^2}{x^2-49}$

e. $\frac{z-9}{z-3}+\frac{12z+36}{z^2-9}$

f. $\frac{8a-2}{a^2-4}+\frac{a^2-25a+4}{3a^2-12}$

g. $\frac{n^2-n-7}{n^2+n}+\frac{7n}{4n+4}$

h. $\frac{y-6}{(8-y)^2}+\frac{y-7}{y^2-64}$

2. Resuelve las siguientes sustracciones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{2x-3y}{x+y}-\frac{7y-4x}{x+y}$

b. $\frac{3x^2-8}{x+2}-\frac{x^2-7x-14}{x+2}$

c. $\frac{n+6}{n+1}-\frac{n^2-4n+6}{n+1}$

d. $\frac{z^2-2}{8z+8}-\frac{z^2+2z}{8z+8}$

e. $\frac{a-4}{3a-3}-\frac{a-5}{a+1}$

f. $\frac{x-8}{x^2-49}-\frac{x-3}{x^2-11x+28}$

g. $\frac{8x+2}{2x-1}-\frac{5x}{4x^2-1}$

h. $\frac{7n-2}{n^2-25}-\frac{3n+2}{n^2+10n+25}$

3. Resuelve las siguientes multiplicaciones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{z^2+10z+25}{4z}\cdot\frac{6}{z+5}$

b. $\frac{5y^3}{3x}\cdot\frac{3x^9}{10y}$

c. $\frac{w+4}{3w}\cdot\frac{3w^2}{w^2-16}$

d. $\frac{m+1}{9m}\cdot\frac{7m}{3m+3}$

e. $\frac{3w-3}{21w^2}\cdot\frac{7}{w-1}$

f. $\frac{x+3}{3x}\cdot\frac{6x^2}{x^2-9}$

g. $\frac{y-8}{8y}\cdot\frac{2y}{y^2-64}$

h. $\frac{x-7}{4x-1}\cdot\frac{16x^2-8x+1}{x^2-49}$

4. Resuelve las siguientes multiplicaciones con fracciones algebraicas.

a. $\frac{2b^8c^2}{8a^8}\div\frac{6c^9}{16a^7b}$

b. $\frac{9x}{9-x}\div\frac{1}{81-x^2}$

c. $\frac{24w}{w+1}\div\frac{8}{(w+1)^2}$

d. $\frac{28m-24}{m^2-36}\div\frac{4}{m+6}$

e. $\frac{1-x}{x^2-2x+1}\div\frac{x}{5x-5}$

f. $\frac{x-2}{x+2}\div\frac{8x}{x^2-4}$

Operaciones combinadas

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Observa cada operación combinada e indica cuál operación se desarrolla primero.

a. $\left(\frac{6}{3}+\frac{50}{20}\right)\div 1-\frac{6}{7}$

b. $\frac{7}{9}-\frac{30}{5}\div\left(\frac{1}{20}+4\right)$

c. $\left[\frac{4}{8}\div 3-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right]+\frac{8}{5}$

d. $\frac{-1}{9}\left[9-\frac{8}{3}-\left(\frac{5}{8}-4\right)\right]$

e. $\left[\frac{4}{3}\div\frac{3}{9}-\left(6-\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{2}{6}$

f. $\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{9}$

2. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

a. $\frac{2}{9}\left(\frac{9}{6}\div\frac{9}{2}\right)$

b. $\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)\div\frac{5}{2}-\frac{2}{5}$

c. $\frac{5}{6}-\frac{7}{5}\cdot 2$

d. $\frac{8}{5}-\frac{4}{6}\div\frac{1}{3}$

e. $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}$

f. $\frac{1}{9}\div\frac{1}{8}-\frac{1}{3}$

g. $\frac{1}{4}-\frac{7}{2}\div\frac{6}{2}$

h. $\frac{3}{9}-\frac{9}{6}\div\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$

i. $\left(\frac{1}{7}+\frac{8}{7}\right)\div\frac{1}{21}$

j. $\frac{1}{3}\div\left(2-\frac{1}{8}\right)$

3. Simplifica cada fracción algebraica formada por monomios.

a. $\frac{12a^4b^8}{4a^3b^3}$

b. $\frac{-8a^9b^4}{6a^9b^6}$

c. $\frac{35a^6b^5c^9}{7a^8b^7c^6}$

d. $\frac{4a^3b^3c}{36a^8b^6}$

e. $\frac{-2a^5b^2c^7}{6a^5b^4c^7}$

f. $\frac{2m^7n^6p^9}{4m^7n^3}$

g. $\frac{-3a^8b^2}{15a^8b^7}$

h. $\frac{60x^4y^5}{18x^3y^4}$

4. Simplifica cada fracción algebraica formada por polinomios.

a. $\frac{a^2b-16b}{a^2b-8ab+16b}$

b. $\frac{45x^3-9x^2}{25x^2-1}$

c. $\frac{m^2-4}{2nm+4n}$

d. $\frac{6a-6b+6c}{5a-5b+5c}$

e. $\frac{z^3-z}{z^3-2z^2+z}$

f. $\frac{2x+8y}{2x^2+8xy}$

g. $\frac{x^2-16}{16x-x^3}$

h. $\frac{w^4-64}{w^3+8w}$

i. $\frac{4x^2-22x+10}{4x^2-12x-40}$

j. $\frac{4m+3}{4m^2+15m+9}$

2.2 Adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones algebraicas

Problema

Observa la siguiente operación combinada:

$$\left(\frac{8x^2+13x}{x-3}+\frac{5}{x-3}\right)\div\frac{3x+3}{x^2-9}$$

1. De acuerdo con la prioridad de operaciones estudiada en años anteriores para números racionales, ¿cuál operación se desarrolla primero?
2. Resuelve la operación utilizando los procedimientos aprendidos para operaciones con fracciones algebraicas.

Solución

1. Al igual que con fracciones numéricas, en una operación combinada se desarrollan primero las operaciones que se encuentren dentro de un paréntesis según la jerarquía de las operaciones:

$$\left(\frac{8x^2+13x}{x-3}+\frac{5}{x-3}\right)\div\frac{3x+3}{x^2-9}=$$

$$\left(\frac{8x^2+13x+5}{x-3}\right)\div\frac{3x+3}{x^2-9}$$

2. Para resolver en su totalidad, se continua desarrollando la división:

$$\frac{8x^2+13x+5}{x-3}\bullet\frac{x^2-9}{3x+3}=$$ → Se cambia el signo de división (÷) por el de multiplicación (•) y el divisor por su inverso multiplicativo.

$$\frac{(x+1)(8x+5)}{x-3}\bullet\frac{(x+3)(x-3)}{3(x+1)}=$$ → Se factorizan los polinomios en donde sea posible extraer factores comunes para simplificar las fracciones algebraicas.

$$\frac{\cancel{(x+1)}(8x+5)}{\cancel{x-3}}\bullet\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{3\cancel{(x+1)}}=$$ → Se eliminan los factores comunes en numeradores y denominadores.

$$\frac{(8x+5)(x+3)}{3}=$$ → Se realiza la multiplicación resultante.

$$\frac{8x^2+24x+5x+15}{3}=$$ → Se suman los términos semejantes.

$$\frac{8x^2+29x+15}{3}$$

3. Como resultado se obtiene que:

$$\left(\frac{8x^2+13x}{x-3}+\frac{5}{x-3}\right)\div\frac{3x+3}{x^2-9}=\frac{8x^2+29x+15}{3}$$

Recuerda

En aritmética, para resolver una operación combinada se toman en cuenta las siguientes condiciones:

1. Si no hay paréntesis, se desarrollan primero potenciaciones y radicaciones, luego multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha) y por último adiciones y sustracciones (de izquierda a derecha).
2. Si hay paréntesis, se resuelven las operaciones dentro de ellos, respetando la prioridad de operaciones del punto anterior.

Conclusión

Para resolver operaciones combinadas entre fracciones algebraicas se desarrollan según sea uno de los siguientes casos:

1. Si no hay paréntesis, se desarrollan las operaciones en el siguiente orden:
   a. Multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan (de izquierda a derecha).
   b. Adiciones y sustracciones en el orden en que aparezcan (de izquierda a derecha).
2. Si hay paréntesis, se efectúan primero las operaciones que se indican, respetando la prioridad de operaciones mencionadas anteriormente.

Desarrollo sostenible

El orden es un valor que permite una mejor organización y estructuración de las labores diarias en la vida de las personas, generando un ambiente más tranquilo y agradable al cumplir cada meta propuesta. Divide tus tareas en metas más pequeñas y anótalas en una lista. A medida que termines y marques cada pequeña meta de tu lista, sentirás satisfacción y tu cerebro liberarará dopamina, una sustancia que ayuda a motivarte para cumplir la siguiente meta.

Observa cómo se hace

Resuelve la siguiente operación combinada: $\frac{10x+2}{x} - \frac{x-8}{x^3} \div \frac{2x-16}{x}$.

Como no hay paréntesis se aplica la prioridad de operaciones:

$\frac{10x+2}{x} - \frac{x-8}{x^3} \cdot \frac{x}{2x-16}$ → Se convierte la división en multiplicación cambiando el divisor por su inverso multiplicativo.

$\frac{10x+2}{x} - \frac{x-8}{x^3} \cdot \frac{x}{2(x-8)}$ → Se factorizan los polinomios en donde sea posible.

$\frac{10x+2}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2}$ → Se simplifican las fracciones algebraicas antes de multiplicar.

$\frac{10x+2}{x} - \frac{1}{2x^2}$ → Se resuelve la multiplicación.

$\frac{10x+2}{x} - \frac{1}{2x^2}$ → Se homogeneizan las fracciones algebraicas.

$\frac{20x^2+4x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}$ → Se efectúa la sustracción.

$\frac{20x^2+4x-1}{2x^2}$

Por lo tanto: $\frac{10x+2}{x} - \frac{x-8}{x^3} \div \frac{2x-16}{x} = \frac{20x^2+4x-1}{2x^2}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas sin paréntesis.

   a. $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x^2-25} \div \frac{1}{x-5}$
   b. $\frac{x-8}{x^2} \cdot \frac{3x}{x^2-64} - \frac{3x}{x+8}$
   c. $\frac{4+x}{3x} - \frac{9x}{2+x} \div \frac{6x}{2x+4}$

2. Resuelve las siguientes operaciones combinadas sin paréntesis.

   a. $\frac{x-10}{x} \cdot \left(\frac{x}{x^2-100} - \frac{x}{x+10}\right)$
   b. $\frac{x-y}{x^2+xy} + \left(\frac{x+y}{xy} - \frac{x}{xy+y^2}\right)$
   c. $\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}\right) \div \frac{1}{a^3-a}$

2.3 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Observa cada operación combinada e indica cuál operación se desarrolla primero.

a. $\left(x+\frac{x}{y}\right)\div y-\frac{1}{y}$

b. $\left(1+\frac{w}{w+z}\div\frac{2w}{5}\right)+6$

c. $3+\frac{a}{a+b}\div\frac{a^2}{a^2-b^2}+5$

d. $x+\frac{x}{y}\cdot x-\frac{x}{x+1}$

e. $\frac{-w+25}{w^2+6w}\cdot\frac{w+6}{w-5}-\frac{w}{w^2+w-30}$

f. $\frac{(z-1)^2}{z}\div\left(\frac{4}{z}-\frac{1}{z^3}\right)$

2. Resuelve las siguientes operaciones combinadas sin paréntesis.

a. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{4}$

b. $\frac{4x}{x-8}\div\frac{4x}{x^2-64}\cdot\frac{7x+2}{3x}$

c. $\frac{9x-9}{x^2+x}-\frac{9}{x}\cdot\frac{x^2}{6x+6}$

d. $\frac{5}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-x}{10}+\frac{2}{x-3}$

e. $\frac{3x}{x-1}\div\frac{6x^2}{x^2-1}-\frac{2}{x}$

f. $\frac{8}{x}\cdot\frac{7}{x+6}\div\frac{63}{x+6}$

g. $\frac{x-8}{x+8}\cdot\frac{8x+64}{2x-2}\div\frac{x^2+8x}{x^2-2x+1}$

h. $\frac{y}{x^2-xy}-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{8x}{x-y}$

i. $\frac{x-5}{x^2+5x}\div\frac{-3}{x+5}+\frac{6}{x-1}$

j. $\frac{2}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}\cdot\frac{5x-5}{9}$

k. $\frac{8x+8}{x^2-81}\cdot\frac{x^2+9x}{x^2+2x+1}\div\frac{6x}{x^2-5x-6}$

l. $\frac{3}{7x}-\frac{x-9}{x^2}\div\frac{2x-24}{x}$

3. Resuelve las siguientes operaciones combinadas con paréntesis.

a. $\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^2-16}\right)\div\frac{x}{x-4}$

b. $\left(\frac{5}{x+5}+\frac{4x^2}{x^2-25}\right)\cdot\frac{x-5}{x+8}$

c. $\left(\frac{2}{x+7}-\frac{x^2}{x+7}\div\frac{x^2}{4}\right)\div\frac{6x}{x^2+14x+49}$

d. $\frac{x^2+8x}{64-x^2}\div\left(\frac{8-x}{x+8}+\frac{x}{x-8}\right)$

e. $\left(\frac{x-7}{x+10}-\frac{x-10}{x+7}\right)\div\frac{9x}{x^2+17x+70}$

f. $\left(\frac{-4}{5x}+2x\right)\cdot\frac{x^2+5}{5x^2-2}$

g. $\left(\frac{4}{x}-\frac{x+4}{x+7}\right)\div\frac{1}{x^2+7x}$

h. $\frac{5x-5}{x}\cdot\left(\frac{6}{5x}+\frac{5x}{x-1}\right)$

i. $\left(\frac{7}{5xy}-\frac{7}{x^2}\right)\div\frac{4}{5y^2}$

j. $\frac{8x-8}{x+5}\cdot\left(\frac{x-3}{x-1}+\frac{2x}{x-1}\right)$

k. $\left(\frac{4}{x-6}\cdot\frac{x^2-36}{7x}\div\frac{6}{49x}\right)-\frac{3}{x-6}$

l. $\left(\frac{5}{x+5}+\frac{8}{x-5}\right)\cdot\frac{x^2-25}{8}$

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Explico con claridad la regla de la adición con fracciones algebraicas.			
2. Explico con claridad la regla de la sustracción con fracciones algebraicas.			
3. Resuelvo ejercicios de adición con fracciones algebraicas.			
4. Resuelvo ejercicios de sustracción con fracciones algebraicas.			
5. Explico el procedimiento para multiplicar fracciones algebraicas.			
6. Explico el procedimiento para dividir fracciones algebraicas.			
7. Resuelvo ejercicios de multiplicación de fracciones algebraicas aplicando la factorización y la simplificación.			
8. Aplico la regla para dividir fracciones algebraicas.			
9. Resuelvo ejercicios de división de fracciones algebraicas aplicando la factorización y la simplificación.			
10. Comprendo el orden a seguir en el desarrollo de operaciones combinadas con fracciones algebraicas.			
11. Resuelvo ejercicios de operaciones combinadas con fracciones algebraicas.			
12. Resuelvo colaborativamente operaciones básicas con fracciones algebraicas.			

Unidad 3

Sistemas de ecuaciones de primer grado

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud y anchura, sin que tuvieran relación con problemas de medida. La matemática comienza a interesarse por las operaciones que pueden realizarse con cualquier número, y esta idea permite dar el salto desde la Aritmética al Álgebra. En este contexto, Diofanto introdujo símbolos y dio soluciones algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como $x + y = 100$, $x - y = 40$.

Los sistemas de ecuaciones se utilizan para modelar situaciones de diferentes contextos, por ejemplo analizar el flujo de tráfico en una red de calles que se cruzan unas con otras, calcular el presupuesto de un proyecto, analizar la oferta y demanda mediante el equilibrio parcial, determinar la proporción de elementos para una mezcla, optimizar procesos de producción, etc.

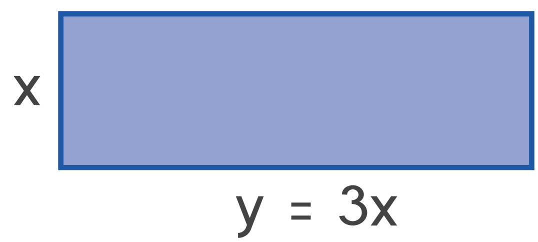
Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría

Perímetro del rectángulo: 40 cm

$2x + 2y = 40$

El largo mide el triple del ancho:

$y = 3x$



Sistema de ecuaciones que permite determinar la medida de los lados del rectángulo:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ y = 3x \end{cases}$$

En esta unidad aprenderás a...

- Determinar la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Aplicar ecuaciones de primer grado con una incógnita en la resolución de problemas.
- Resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Aplicar sistemas de ecuaciones en distintas áreas.

Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Calcula el valor numérico de cada expresión algebraica.
   a. $x + 6$, con $x = -3$
   b. $x + 3x$, con $x = 3$
   c. $x + 8y$, con $x = 4$ y $y = \frac{1}{3}$
   d. $x + y - xy$, con $x = \frac{4}{3}$ y $y = \frac{1}{3}$
   e. $x - 2y + xy$, con $x = \frac{1}{7}$ y $y = \frac{1}{2}$
   f. $5x^2y$, con $x = -9$ y $y = -6$
   g. $\frac{6x}{7} + y$, con $x = -8$ y $y = 2$
   h. $9x + 5y - 9z$, con $x = 0$, $y = -2$ y $z = 9$
   i. $-5x^2y^2z$, con $x = 7$, $y = 0$ y $z = 5$
   j. $4x - 8y - 3z$, con $x = -8$, $y = 3$ y $z = -3$
   k. $(x - y)^2 + z^3$, con $x = -9$, $y = 9$ y $z = 7$
   l. $0{,}9xy^4 - 8z$, con $x = 1$, $y = -1$ y $z = -1$
   m. $\frac{1}{9}x - 5z + \frac{1}{4}y$, con $x = -1$, $y = 3$ y $z = -4$
   n. $\frac{-x + 3y}{4} - \frac{1}{9}z$, con $x = 1$, $y = 0$ y $z = -1$

2. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.
   a. $8x + 2x$
   b. $-x + 8y + 17x - 3y - 7x$
   c. $3x + 7x + 10y - 6x$
   d. $14x - 13x$
   e. $-8x - 8y - 6y - 2y - 8x$
   f. $7x - 5y + x - 3y - 9x$
   g. $4x - 3x + 4x - x$
   h. $3x + 2y - 8x + 6y + 7x$

3. Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones entre polinomios.
   a. $(7x + 2y) - (3x + 3y)$
   b. $(x + 8y + 3) - (3x + 6y - 6)$
   c. $(-4x + 4y + 7) + (8x - 9y + 4)$
   d. $(12x + 10y + 3) + (8x + y - 2)$
   e. $(6x - 3y) - (13x + y - 5)$
   f. $(15x - 7y + 3) - (-13x - y - 10)$
   g. $(9x - 8y - 1) - (9x - 10y - 1)$
   h. $(11x - 4y + 5) - (-7x + 9 - y)$

4. Representa en un mismo plano cartesiano cada pareja de puntos y traza una recta que los contenga.
   a. (4, 3) y (1, 3)
   b. (-1, 2) y (5, 3)
   c. (0, 1) y (3, 0)
   d. (-2, 4) y (-1, 3)

5. Representa en una gráfica cada ecuación lineal.
   a. $y = x + 8$
   b. $y = 4x - 5$
   c. $y = \frac{1}{2}x + 4$
   d. $y = -x + 6$
   e. $y = x + 3$
   f. $y = -2x + 2$

1.2 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Problema

Resuelve la siguiente ecuación $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$.

Solución

$3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$ → Primero, se eliminan los paréntesis multiplicando cada número por la expresión algebraica correspondiente.

$3 + 4x - 8 = -3 - 5x + 25$ → Se reducen los términos semejantes.

$4x - 5 = -5x + 22$ → Se trasponen términos, de forma que se dejen los semejantes del mismo lado del "=".

$4x + 5x = 22 + 5$ → Se reducen los términos semejantes.

$9x = 27$ → Se despeja la variable "x".

$$x = \frac{27}{9} = 3$$

¡Atención!

Para eliminar los paréntesis se resuelven las siguientes multiplicaciones:

- $4(x - 2) =$
  $4 \cdot x - 4 \cdot 2 =$
  $4x - 8$
- $-5(x - 5) =$
  $-5 \cdot x + 5 \cdot 5 =$
  $-5x + 25$

Conclusión

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es una igualdad que tiene una única variable de grado 1. La **solución** o **raíz** de la ecuación, es el valor que hace verdadera a la igualdad.

Para determinar la solución se siguen estos pasos:

1. Se eliminan los paréntesis, cuando sea necesario, aplicando las operaciones entre las expresiones algebraicas.
2. Se reducen y se transponen los términos semejantes.
3. Se despeja la incógnita.

Recuerda

Si el paréntesis está precedido del signo más (+) los términos que están dentro de paréntesis, permanecen con el signo, pero si el paréntesis está precedido del signo menos (−) los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $3x - 8 = 4$

b. $-4x - 2 = -18$

c. $11x - 15 = 12 + 2x$

d. $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$

e. $2x - 3 = -x - 9$

f. $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$

g. $0,2x - 0,03 = 0,17x + 0,21$

h. $0,5x - 1,2 = 0,4x + 3,3$

i. $0,2x - 0,04 = 0,16x + 0,28$

j. $3 + 0,8x = 2,4 + 0,9x$

k. $1,31x + 0,04 = 1,35x - 0,04$

l. $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

m. $-\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = \frac{-4}{3}$

n. $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$

o. $-\frac{x+5}{2} = \frac{3}{4}$

1.3 Aplicación de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Desarrollo sostenible

Si visitas lugares donde haya naturaleza, debes cuidarlos, no dejar basura ni llevarte plantas y mucho menos animales. No debemos alterar los ecosistemas por el bien de nuestro planeta.

Problema

Resuelve la siguiente situación.

Alrededor de una laguna hay una calle con 1200 m de perímetro, Ana corre a una velocidad de 140 m/min en dirección horaria (en el sentido de las manecillas del reloj), mientras que José corre a una velocidad de 160 m/min en sentido antihorario. Si ambos salen del mismo punto al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se vuelven a encontrar?

Recuerda

Al plantear una ecuación, se utilizan letras para representar la incógnita que se desea determinar. La letra de mayor uso es "x".

Solución

Observa que la suma de las distancias recorridas por Ana y José es equivalente a 1200 m.

En la tabla de la derecha se visualiza la distancia recorrida individualmente por Ana y José.

	Ana	José
Velocidad (metros/minutos)	140m/min	160m/min
Tiempo (minutos)	x	x
Distancia (metros)	140x	160x

Se suman las distancias recorridas por cada uno y se igualan al total del perímetro, porque al encontrarse lo completan:

$$140x + 160x = 1200$$

¡Atención!

Observa que al encontrarse Ana y José, completan el total del recorrido, por eso se suman las distancias que corrió cada uno.

Se resuelve la ecuación que se forma:

$$140x + 160x = 1200$$
$$300x = 1200$$
$$x = \frac{1200}{300}$$
$$x = 4$$

Como **x** representa los minutos que transcurren, Ana y José se encuentran a los 4 minutos de haber salido.

Conclusión

La resolución de problemas es una de las aplicaciones más comunes de las ecuaciones. Puesto que, permiten resolver situaciones cotidianas y algunas otras más complejas.

Observa cómo se hace

Resuelve el siguiente problema:

Un tanque está lleno de agua. Al utilizar la cuarta parte por la mañana y la octava parte por la tarde, quedan en el tanque 100 galones; ¿cuál es la capacidad del tanque?

- Se plantean los datos de la ecuación:
  x: capacidad de agua del tanque.
  $\frac{x}{4}$: cantidad de agua utilizada por la mañana.
  $\frac{x}{8}$: cantidad de agua utilizada por la tarde.
  100 galones: cantidad de agua que queda al final del día.
- Se forma la ecuación restando a la capacidad del tanque las cantidades utilizadas e igualando a la cantidad que queda:
  $$x - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} = 100$$
- Se resuelve la ecuación:
  $$x - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} = 100$$
  $$\frac{5x}{8} = 100$$
  $$x = \frac{100 \cdot 8}{5}$$
  $$x = \frac{800}{5} = 160$$

R: La capacidad del tanque es de 160 galones.

Datos interesantes

Desde la Antigüedad, el ser humano ha buscado formas de resolver problemas cotidianos, como lo atestigua el Papiro de Ahmes o el Papiro Rhind, el cual proviene del antiguo Egipto y contiene diversos problemas matemáticos. El papiro está redactado en escritura hierática (una simplificación de los jeroglíficos) por el escriba Ahmes. Data del siglo XVI a. C., del reinado de Apofis I, y se basa en documentos unos tres siglos más antiguos.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a. Julia tiene una librería, ella adquiere B/. 5 de ganancias por cada libro que vende y sus gastos mensuales de funcionamiento son de B/. 150, ¿cuál es la mínima cantidad de libros que necesita vender para cubrir los gastos de funcionamiento?
   b. Se contrata un bus para hacer una excursión. Si se hubieran completado los asientos, el costo del pasaje por persona sería de B/. 10, pero faltaron 10 personas, así que el costo del pasaje por persona es de B/. 15. ¿Cuántos asientos tiene el bus?
   c. Marta alquila un equipo multimedia a B/. 20 por día, más una cuota única de B/. 10 al retirar el equipo del local. José tiene un negocio del mismo tipo en el que cobra B/. 18 por día, más una cuota única de B/. 26 al retirar el equipo. Carlos desea alquilar el equipo por 5 días, ¿a los cuántos días el costo del alquiler es el mismo en los dos negocios?, ¿en cuál negocio debe alquilar el equipo Carlos?

1.4 Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas

Desarrollo sostenible

Practicar algún deporte beneficia la salud de quien lo practica, ya que además del ejercicio físico, también aumenta la energía y mejora el estado de ánimo.

Problema

Carlos es un jugador de baloncesto, y en la final de 2022 acertó 7 tiros y obtuvo 10 puntos en total, ¿cuántos tiros libres y cuántos tiros de 2 puntos encestó?

- Toma en cuenta que un tiro libre vale 1 punto y que Carlos no encestó ningún tiro de 3 puntos.

1. Considerando que acertó **x** tiros libres y **y** tiros de 2 puntos, escribe una ecuación que represente la condición "encestó 7 tiros".
2. Escribe una ecuación que represente la condición "obtuvo 10 puntos".
3. Ordena en una tabla los valores para **x** y **y** según las ecuaciones determinadas.

¡Atención!

Observa que en la tercera fila de la tabla siempre debe sumar 7, ya que en el problema se indica que esa es la cantidad de tiros acertados, mientras que en la cuarta fila los valores cambian al sustituir la cantidad de tiros en la ecuación **x + 2y**.

Solución

1. Como son **x** tiros libres y **y** tiros de 2 puntos, entonces al formar la ecuación con la condición "encestó 7 tiros", se obtiene **x + y = 7**.
2. Como ha acertado **x** tiros libres y **y** tiros de 2 puntos, entonces al formar una expresión con la condición "obtuvo 10 puntos", se obtiene **x + 2y = 10**.
3.

x (posible cantidad de tiros libres encestados)	0	1	2	3	4	5	6	7
y (posible cantidad de tiros de 2 puntos encestados)	7	6	5	4	3	2	1	0
Total de tiros encestados: x + y	7	7	7	7	7	7	7	7
Total de puntos obtenidos: x + 2y	14	13	12	11	10	9	8	7

Las ecuaciones de la forma **x + y = 7** y **x + 2y** se llaman ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, y tal como se desarrolló en la tabla, para estas ecuaciones existe un único par de valores que las satisfacen x = 4; y = 3.

¡Atención!

Observa en la tabla que los dos únicos valores que satisfacen las dos ecuaciones son **x = 4** y **y = 3**.

Conclusión

Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una ecuación con dos valores desconocidos de grado uno: **x** y **y**.

Para satisfacer las dos condiciones del problema inicial y encontrar los valores de **x** y **y** que satisfagan las dos condiciones, se plantean las dos ecuaciones de forma simultánea: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$.

A la combinación de dos ecuaciones se le llama **sistema de dos ecuaciones** y la solución del sistema será el par de valores que satisfacen las dos ecuaciones. En el problema, la solución del sistema es **x = 4** y **y = 3**.

Observa cómo se hace

Resuelve el siguiente problema.

Dos números suman 9 y el doble de uno de ellos es 6. ¿Qué números son?

Elaboramos una tabla para visualizar las condiciones.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x + y = 9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2y = 6	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Por lo tanto, la solución del sistema es **x = 6** y **y = 3**, ya que son los valores numéricos que satisfacen las dos ecuaciones iniciales del problema.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Completa cada tabla y determina los valores de **x** y **y** que satisfacen el sistema de ecuaciones.

a.

x							
y							
x + y = 6							
y - x = 4							

b.

x													
y													
x + y = 12													
3x = 27													

2. Las edades de Luis y Jimena suman 13 años. Si Luis es 3 años mayor que Jimena, ¿cuántos años tiene cada uno?

a. Escribe una ecuación que represente la condición "las edades de Luis y Jimena suman 13 años".

b. Escribe una ecuación que represente la condición "Luis es 3 años mayor que Jimena".

c. Elabora la tabla y determina cuál es la edad de cada uno.

3. Ana tiene en su cartera 8 billetes, haciendo un total de $55, unos billetes son de $5 y otros de $10. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene, considerando que Ana tiene **x** billetes de $5 y **y** de $10?

a. Escribe una ecuación que represente la condición "Ana tiene 8 billetes".

b. Escribe una ecuación que represente la condición "un total de $55 ".

c. Elabora la tabla y determina cuántos billetes de cada tipo tiene.

1.5 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Problema

En la tienda Vida Sana, una libra de uvas y una de manzanas cuesta B/. 5 y una libra de uvas y tres de manzanas cuesta B/. 11. ¿Cuál es el precio de una libra de uvas y una libra de manzanas?

1. Representa cada condición con una ecuación.
2. Construye una tabla para determinar los pares de valores que cumplen cada ecuación.

Solución

1. Considera a **x** el precio de la libra de uvas y a **y** el precio de la libra de manzanas.
   - Costo de 1 libra de uvas más costo de 1 libra de manzanas. → $x + y = 5$
   - Costo de 1 libra de uvas más costo de 3 libras de manzanas. → $x + 3y = 11$
2. Para elaborar la tabla, se consideran las dos condiciones: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

x	0	1	**2**	3	4	5
y	5	4	**3**	2	1	0
x + y	5	5	**5**	5	5	5
x + 3y	15	13	**11**	9	7	5

→ Los valores para **x** y **y** que cumplen las dos condiciones son $x = 2$, $y = 3$; entonces, el precio de una libra de uvas es de B/. 2 y el de manzanas B/. 3.

¡Atención!

Observa en la tabla que los dos únicos valores que satisfacen las dos ecuaciones son $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{y = 3}$.

Conclusión

Los valores que cumplen las dos condiciones del problema se les llama **solución del sistema**, entonces resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores que satisfacen las dos ecuaciones.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

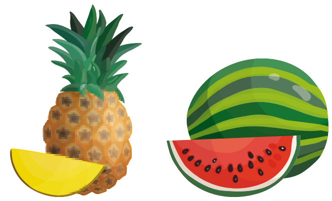
1. ¿A cuál sistema de ecuaciones corresponde la solución $x = 3$, $y = 1$?

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

1.6 Sentido del método de reducción por sustracción

Problema

En el supermercado el precio de 2 piñas y 5 sandías es de B/. 12 y el de 2 piñas y 3 sandías es de B/. 8, ¿cuál es el precio de 1 piña y de 1 sandía?

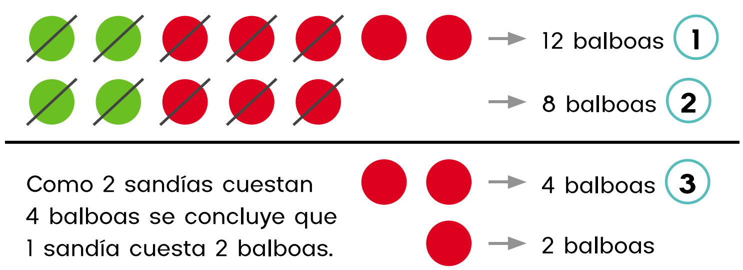


Solución

1. Se representa la situación de forma gráfica donde:

Seguidamente se representan las dos situaciones:

Se representan todas las piñas y todas las sandías y se restan las cantidades iguales de cada representación:



El precio de 1 piña es de B/. 1 y el de la sandía de B/. 2.

2. Se representa la situación con un sistema de ecuaciones.

- Se llama **x** balboas al precio de la piña y **y** balboas al de la sandía, partiendo de la representación gráfica se tiene: $\begin{cases} 2x + 5y = 12 & (1) \\ 2x + 3y = 8 & (2) \end{cases}$

Restando de la ecuación (1) la ecuación (2): $2y = 4$ (3)

Se obtiene $y = 2$ y se sustituye ese valor en alguna de las dos ecuaciones:

a. En la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 12 \\ 2x + 5 \cdot 2 &= 12 \\ 2x + 10 &= 12 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

b. En la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3 \cdot 2 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ 2x + 6 &= 8 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio de 1 piña es de B/. 1 y el de la sandía de B/. 2.

Desarrollo sostenible

El consumo frecuente de frutas ayuda a fortalecer el sistema inmunológico del ser humano, debido a las vitaminas, minerales y antioxidantes que poseen.

Recuerda

El **valor absoluto** de un número, es la distancia de este con respecto al cero en la recta numérica, al ser una distancia, siempre es positivo. Se simboliza con $|\ \ |$.

Recuerda

Al restar polinomios se cambia el signo de cada término del sustraendo. Por ejemplo:

$(2x + 5y) - (2x + 3y) =$

$2x + 5y - 2x - 3y = 2y$

Conclusión

Para **resolver un sistema de ecuaciones** en el que los coeficientes de una de las incógnitas tienen igual signo e igual valor absoluto:

1. Se encuentra la diferencia restando los miembros semejantes izquierdos y derechos de las dos ecuaciones, respectivamente.
2. Se obtiene una nueva ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

Al proceso descrito se le llama **reducción por sustracción**.

Por ejemplo, para el sistema resuelto en el problema inicial, **x** tiene coeficientes de igual valor absoluto e igual signo.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 2x + 5y = 12 \\ (-)\ 2x + 3y = 8 \\ \hline 2y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

→ Se restan los miembros semejantes de las dos ecuaciones.

→ Se obtiene una ecuación con una incógnita y se resuelve.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3 \cdot 2 &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

→ Se sustituye el valor obtenido en **y** en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 1$ y $y = 2$.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción por sustracción.

   a. $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} -x + 34y = 0 \\ 2x + 34y = 9 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x + y = 193 \\ x - y = 67 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x + y = 55 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ 8x - 5y = -1 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes problemas con sistemas de ecuaciones aplicando reducción por sustracción.

   a. Dos números suman 99 y su diferencia es 3. ¿Cuáles son esos números?

   b. Dos ángulos son suplementarios y la medida de uno de ellos es el quintuple del otro. ¿Cuál es es la medida de cada ángulo?

   c. Una madre tiene el triple de la edad de su hija y la suma de sus edades es igual a 52. ¿Cuántos años tiene cada una?

1.7 Método de reducción por adición

Problema

Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 5y = 25 & (1) \\ 5x + 5y = 25 & (2) \end{cases}$

- Considera los signos y el valor absoluto de los coeficientes de la letra **y** e indica qué operación realizar para aplicar el método de reducción.

Solución

1. Se suman los términos semejantes de las dos ecuaciones y se obtiene:

$$\begin{array}{rl} 3x - 5y = 25 & \rightarrow (1) \\ (+)\ 5x + 5y = 15 & \rightarrow (2) \\ \hline 8x \quad\quad = 40 & \\ x = \mathbf{5} & \end{array}$$

2. Se sustituye x = 5 en (2) y encuentra el valor de **y**:

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= 15 \\ 5 \cdot \mathbf{5} + 5y &= 15 \\ 25 + 5y &= 15 \\ 5y &= 15 - 25 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 5; y = -2.

¡Atención!

Tal como se muestra, cuando se resuelve un sistema de ecuaciones aplicando reducción, se obtiene una tercera ecuación con una incógnita:

- Si la ecuación obtenida **no** contiene a **y**, se dice reducir **y**.
- Si la ecuación obtenida **no** contiene a **x**, se dice reducir **x**.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, aplicando **reducción por adición**, es necesario considerar siempre el valor absoluto y el signo de los coeficientes de las incógnitas. Si los coeficientes de una de ellas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, se suman y se cancelan.

Por ejemplo, en el sistema resuelto anteriormente, los coeficientes de **y** tienen igual valor absoluto, pero distinto signo: $\begin{cases} 3x - 5y = 25 \\ 5x + 5y = 25 \end{cases}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición.

a. $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$

1.8 Método de reducción por adición o sustracción

Problema

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 3y = -4 & (1) \\ 4x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

- ¿Cómo puedes reducir un sistema cuando los valores absolutos de los coeficientes de la incógnita a reducir no son iguales?

¡Atención!

Recuerda que cuando multiplicas una ecuación por un número, se multiplican todos los términos de ambos miembros.

Por ejemplo, si multiplicas la ecuación $x + 3y = 4$ por **4** se obtiene:

$$4(x + 3y) = 4 \cdot 4$$
$$4x + 12y = 16$$

Solución

Cuando los valores absolutos de los coeficientes de la incógnita a reducir no son iguales, se multiplica alguna de las ecuaciones por un número que determine el valor absoluto que se necesita para aplicar el método por reducción:

- $4\begin{cases} x + 3y = -4 & (1) \\ 4x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$ → Se multiplica por 4 la ecuación (1).

$$\begin{array}{rl} & 4x + 12y = -16 \\ (-) & 4x + 2y = 4 \\ \hline & 10y = -20 \\ & y = -2 \end{array}$$

→ Se aplica el método de reducción por sustracción.

$$\begin{aligned} x + 3y &= -4 \\ x + 3 \cdot (-2) &= -4 \\ x - 6 &= -4 \\ x &= -4 + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

→ Se sustituye el valor de **y** en la ecuación (1).

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -2$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones por el **método de reducción por adición o sustracción**, cuando las incógnitas no tienen coeficientes de igual valor absoluto, se siguen estos pasos:

1. Se identifica la incógnita que conviene reducir.
2. Se busca un número que al multiplicar por las ecuaciones del sistema permita que el valor absoluto del coeficiente sea igual al coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación.

3. Se multiplica cada una de las ecuaciones por el número hallado.
4. Se determina la operación a realizar para reducir: suma o resta.
5. Se resuelve la ecuación reducida.
6. Se sustituye el valor encontrado en el **punto 5** en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Observa cómo se hace

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

- ¿Qué debes hacer para que los coeficientes de una de las incógnitas tengan igual valor absoluto para poder aplicar el método de reducción?

Se multiplica la **ecuación 1** por **2** y la **ecuación 2** por **3** para obtener **6** como coeficiente de **x** en ambas ecuaciones y que el valor absoluto sea el mismo. Luego, se restan los términos semejantes de las ecuaciones:

$$\begin{matrix} \bullet\ 2 \\ \bullet\ 3 \end{matrix}\begin{cases} 3x - 4y = 3 & 1 \\ 2x - 3y = 1 & 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 8y = 6 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases} \\ (-) \quad \overline{\qquad y = 3} \end{array}$$

Se sustituye **y = 3** en la ecuación 2:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x - 3 \bullet \mathbf{3} &= 1 \\ 2x - 9 &= 1 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 5 , y = 3.

¡Atención!

Verifica que las incógnitas que se van a reducir tengan coeficientes de igual valor absoluto.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición o sustracción.

a. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ 9x + 5y = 64 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x - 2y = 18 \\ 7x - 5y = 41 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + 3y = 37 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 0 \end{cases}$

1.9 Sentido del método de sustitución

Datos interesantes

El periodo entre 1700 a. C. y 1700 d. C., se caracterizó por la invención de símbolos y la resolución de ecuaciones. En esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

Problema

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 7y = 440 & (1) \\ x = 2y - 10 & (2) \end{cases}$

- Sustituye en la **ecuación** 1 el valor de **x** representado en la **ecuación** 2.

Solución

En la **ecuación** 2 se observa que **x = 2y - 10**, por lo tanto, se sustituye esa expresión en la **ecuación** 1 y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita.

$$\begin{aligned} x + 7y &= 440 \\ 2y - 10 + 7y &= 440 \\ 2y + 7y &= 440 + 10 \\ 9y &= 450 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

Ahora se sustituye el valor obtenido de **y** en la ecuación 2 para obtener el valor de **x** que satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 10 \\ x &= 2 \cdot 50 - 10 \\ x &= 100 - 10 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 90$, $y = 50$.

Conclusión

De las dos ecuaciones del sistema se obtuvo una nueva ecuación con una incógnita, sustituyendo la incógnita **x** despejada de la segunda ecuación en la primera ecuación **x + 7y = 440**, y al resolverla, se determinó una de las soluciones del sistema con la cual se buscó la otra.

Tal como se muestra en el problema, el método que reduce en una incógnita al sustituir una de las incógnitas por su expresión equivalente, se llama **sustitución**.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el sentido del método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x = 9y - 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 9x - 3y = 12 \\ y = 11 - 2x \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 10 \\ \frac{1}{2}y = 9 - 2x \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y = 7 - x \end{cases}$

1.10 Método de sustitución

Problema

Aplica el método de sustitución para resolver el siguiente sistema y describe el proceso realizado: $\begin{cases} 5x + y = 14 & (1) \\ 2x + 3y = 16 & (2) \end{cases}$

Solución

Se despeja la incógnita con coeficiente 1 en la ecuación (1). $\rightarrow$ $5x + y = 14$
$y = 14 - 5x$

Se sustituye **y** por **14 - 5x** en la **ecuación 2**:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ 2x - 15x &= 16 - 42 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Se sustituye **x = 2** en **y = 14 - 5x** para encontrar el valor de **y**:

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5x \\ y &= 14 - 5 \cdot 2 \\ x &= 14 - 10 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 2, y = 4.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas mediante el **método de sustitución**, debes seguir estos pasos:

1. Se identifica la incógnita más fácil de despejar.
2. Se realiza el despeje.
3. Se sustituye la incógnita despejada en el **paso 2** en la otra ecuación.
4. Se resuelve la ecuación obtenida para determinar el valor de una de las incógnitas.
5. El valor de la incógnita encontrado en el paso anterior se sustituye en la ecuación despejada para determinar la otra incógnita de la solución del sistema.

Trabajo colaborativo

1. Forma un grupo, máximo de cuatro personas.
   a. Construyan 3 sistemas de ecuaciones.
   b. Intercámbienlos con otro grupo para que los resuelvan en la clase.
   c. Expongan sus resultados ante el grupo.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

a. $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = y + 9 \\ 7x - 2y = 57 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$

1.11 Método de igualación

Datos interesantes

La introducción de la notación simbólica en álgebra se asocia a François Viète (1540-1603). Descartes (1596-1650) contribuyó al desarrollo de dicha notación. A partir de ese momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases".

Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación **ax + b = c** ya han pasado más de 3000 años.

Problema

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones dadas las indicaciones:

$$\begin{cases} 10x - 7y = 4 & (1) \\ 9x - 9y = 4 & (2) \end{cases}$$

1. Despeja la incógnita **x** en ambas ecuaciones.
2. Iguala las expresiones obtenidas en el **paso 1** y despeja la incógnita **y**.
3. Sustituye el valor obtenido en el **paso 2** en alguna de las ecuaciones del sistema para obtener el valor de la incógnita **x**.

Solución

1. Se despeja la incógnita **x** en ambas ecuaciones así:

(1)
$$10x - 7y = 4$$
$$10x = 4 + 7y$$
$$x = \frac{4+7y}{10}$$

(2)
$$9x - 9y = 4$$
$$9x = 4 + 9y$$
$$x = \frac{4+9y}{9}$$

2. Como **x = x**, se igualan las expresiones obtenidas así:

$$\frac{4+7y}{10} = \frac{4+9y}{9}$$
$$9(4 + 7y) = 10(4 + 9y)$$
$$36 + 63y = 40 + 90y$$
$$63y - 90y = 40 - 36$$
$$-27y = 4$$
$$y = \frac{-4}{27}$$

3. Sustituye $y = \frac{-4}{27}$ en la **ecuación** 1: $10x - 7y = 4$

$$10x - 7\cdot\left(\frac{-4}{27}\right) = 4$$
$$10x + \frac{28}{27} = 4$$
$$10x = \frac{80}{27}$$
$$x = \frac{8}{27}$$

Por lo tanto, las soluciones del problema son $x = \frac{8}{27}$, $y = \frac{-4}{27}$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando el **método de igualación**, sigue estos pasos:

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones algebraicas obtenidas en el **paso 1**.
3. Se resuelve la ecuación de una incógnita y grado 1 obtenida en el **paso 2**.
4. Se sustituye el valor obtenido en el paso 3 en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se despeja la otra incógnita.

Observa cómo se hace

Resuelve el siguiente problema aplicando el método de igualación.

1. Un avión dispone de 32 asientos en primera clase y de 50 asientos en clase turista cuya venta supone un total de B/. 14 600. Sin embargo, solo se han vendido 10 asientos en primera clase y 40 en clase turista, obteniendo un total de B/. 7000. ¿Cuál es el valor de cada asiento?

Primero, se determinan las incógnitas en el sistema de ecuaciones:

- x: valor de cada asiento en primera clase.
- y: valor de cada asiento en clase turista.

El sistema de ecuaciones que se forma es: $\begin{cases} 32x + 50y = 14\,600 & (1) \\ 10x + 40y = 7000 & (2) \end{cases}$

Para resolver el sistema, se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones, en este caso, vamos a despejar **y**:

(1)
$$32x + 50y = 14\,600$$
$$50y = 14\,600 - 32x$$
$$y = \frac{14\,600 - 32x}{50}$$

(2)
$$10x + 40y = 7000$$
$$40y = 7000 - 10x$$
$$y = \frac{7000 - 10x}{40}$$

Se igualan las expresiones algebraicas obtenidas y se resuelve la ecuación que se forma:

$$\frac{14\,600 - 32x}{50} = \frac{7000 - 10x}{40}$$
$$40(14\,600 - 32x) = 50(7000 - 10x)$$
$$584\,000 - 1280x = 350\,000 - 500x$$
$$584\,000 - 350\,000 = -500x + 1280x$$
$$234\,000 = 780x$$
$$300 = x$$

Se sustituye el valor de **x** obtenido en la segunda ecuación:

$$10x + 40y = 7000$$
$$10 \cdot 300 + 40y = 7000$$
$$3000 + 40y = 7000$$
$$40y = 7000 - 3000$$
$$40y = 4000$$
$$y = 100$$

R: Los asientos en primera clase tienen un valor de B/. 300 y los de clase turista, B/. 100.

¿Qué pasaría?

Si en lugar de **y** se hubiera despejado **x**, se obtiene el mismo resultado. La elección de la variable a despejar se hace a manera de estrategia, la que se facilite más.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de igualación.

a. $\begin{cases} x + y = 193 \\ x - y = 67 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 8x - 7y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y = 11 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$

2. Resuelve el siguiente problema.
   a. Seis camisetas y cinco gorras cuestan B/. 125. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan B/. 103. ¿Cuánto vale cada artículo? Realiza el planteamiento y resuelve según el método de igualación.

1.12 Método gráfico

Recuerda

Una **ecuación lineal** o **ecuación de primer grado** es una igualdad algebraica con una, dos o más variables de grado uno, tiene la forma **ax + b = c**, con **a**, **b**, **c** números reales y a ≠ 0.

¡Atención!

Para determinar pares ordenados en las ecuaciones, se despeja la incógnita según convenga. Por ejemplo:

1. En la **ecuación 1** se despeja la **x**: x = -2y y se sustituyen los valores propuestos.
   - x = -2 • 0 = 0
   - x = -2 • 1 = -2
2. En la **ecuación 2** se despeja la **y**: y = 5x − 11 y se sustituyen los valores propuestos.
   - y = 5 • 2 − 11
     y = -1
   - y = 5 • 3 − 11
     y = 4

Problema

Observa el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ 5x - y = 11 & (2) \end{cases}$

1. Represéntalo gráficamente.
2. ¿Cuál es el punto de intersección de las dos rectas?
3. ¿Qué determina ese par ordenado?

Solución

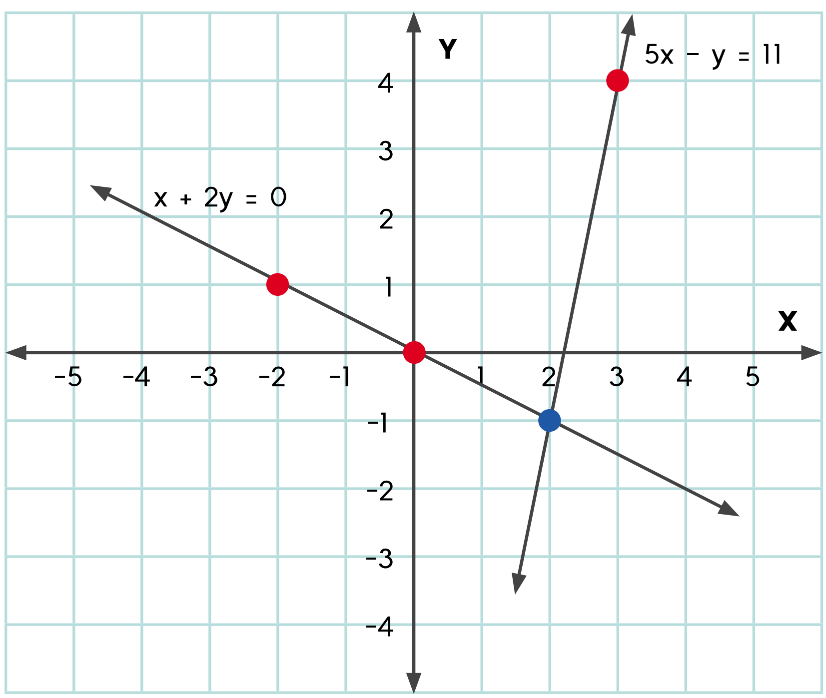
1. Como el sistema de ecuaciones está formado por dos ecuaciones lineales, se buscan por lo menos dos puntos por donde pasen las rectas en el plano cartesiano, así:

(1)

x + 2y = 0		
x	0	-2
y	0	1

(2)

5x - y = 11		
x	2	3
y	-1	4



2. El punto o par ordenado donde se cortan las rectas **x + 2y = 0** y **5x − y = 11** corresponde a (2, -1).
3. La intersección de las rectas **x + 2y = 0** y **5x − y = 11** corresponde a la solución que satisface el sistema de ecuaciones. En este caso x = 2; y = -1.

Conclusión

Un **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones de las que se busca una solución común.

La **solución de un sistema de ecuaciones** es un par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones.

Resolver el sistema graficamente significa encontrar el **punto de intersección** en el plano cartesiano de las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación.

¡Atención!

Este método es práctico siempre y cuando las soluciones del sistema no sean valores muy grandes.

Observa cómo se hace

Determina graficamente la solución del sistema $\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$

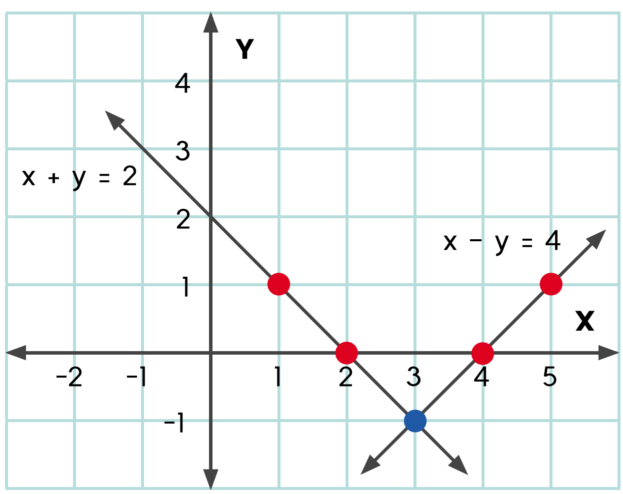
- Determina un par de puntos por cada ecuación para trazar las rectas en el plano cartesiano y grafica.

1

x + y = 2		
y = 2 - x		
x	1	2
y	1	0

2

x - y = 4		
y = x - 4		
x	4	5
y	0	1



La solución del sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ es el par ordenado (3, -1).

¿Qué pasaría?

Los valores que se colocan en la tabla se utilizan según convenga obtener valores dentro del rango de la tabla dibujada. Pero existen otros métodos, como buscar las intersecciones con los ejes **X** y **Y**, sustituyendo por 0 a cada incógnita en un despeje de la otra incógnita.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el sentido del método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 4y = 8 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y + 2x = -1 \\ y - x = -3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y + 1 = 3x \end{cases}$

f. $\begin{cases} y - 2x = -1 \\ y = 7x - 6 \end{cases}$

1.13 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

¿Qué pasaría?

Si se resuelve el sistema de ecuaciones del problema aplicando el método de igualación y el método gráfico, la solución será la misma.

Problema

Dado el sistema $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$

1. Indica el método que consideras más adecuado para resolverlo. Justifica tu respuesta.
2. Determina la solución.

Solución

1. Soluciona aplicando reducción por adición:

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases} \rightarrow (+)\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sustituye x = 1 en la ecuación (2) para obtene el valor de **y**:

$$3y = 4x + 2 \rightarrow \begin{aligned} 3y &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 1, y = 2.

2. Soluciona aplicando reducción por sustitución:

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$$

Sustituye 3y en la ecuación (1):

$$10x - \mathbf{3y} = 4 \rightarrow \begin{aligned} 10x - (\mathbf{4x + 2}) &= 4 \\ 10x - 4x - 2 &= 4 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sustituye x = 1 en la ecuación (2) para obtener el valor de **y**:

$$3y = 4x + 2 \rightarrow \begin{aligned} 3y &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 1, y = 2.

Como se puede observar, mediante dos métodos diferentes se llega a la misma solución.

¡Atención!

Observa que para sustituir no se despejó **y** en la segunda ecuación, sino que se utilizó la igualdad **3y**. Se hace de esta manera, porque en la primera ecuación se tiene una expresión igual y se facilitan los cálculos sustituyendo de esta forma.

Conclusión

Para **resolver un sistema de ecuaciones**, se puede seleccionar el método según las características de las ecuaciones.

- Cuando las incógnitas tienen coeficientes del mismo valor absoluto o uno de sus coeficientes es múltiplo del otro, es más fácil aplicar el **método de reducción por adición o sustracción**.
- Cuando una ecuación tiene despejada una incógnita o la incógnita tiene coeficiente 1, es más fácil aplicar el **método de sustitución**.
- Cuando en cada ecuación del sistema una misma incógnita es fácil de despejar se aplica el **método de igualación**.
- Cuando las pendientes de las ecuaciones de las rectas tienen signo contrario, es posible visualizar gráficamente el punto de intersección de ambas y se facilita su resolución con el **método gráfico**.

Recuerda

La pendiente en una ecuación lineal de la forma **y = mx + b**, corresponde al coeficiente de la letra **x**.

Observa cómo se hace

Resuelve el sistema $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$ mediante el método de igualación.

Se despeja la expresión **3y** en la **ecuación 1** y se iguala a la equivalencia de la ecuación 2:

$$10x - 4 = 3y \rightarrow \begin{aligned} 10x - 4 &= 4x + 2 \\ 10x - 4x &= 2 + 4 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor obtenido **x** la **ecuación 2**:

$$x = 1 \rightarrow \begin{aligned} 3y &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

¡Atención!

Advierte que en el **Observa cómo se hace** se verifica que con un tercer método se obtiene la misma solución.

Comprueba resolviendo con el método gráfico.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el sentido del método de sustitución.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2y = 5x - 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 2x + 11 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 9x - 8y = -18 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 9x - 5y = 1 \\ 8x + 10y = 7 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 4y - 8x = 25 \\ 10x + 2y = 5 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 10x + 4y = -40 \\ 4y - 2x = 9 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 3y + 7 = 24x \\ 9y = 12x + 3 \end{cases}$

1.14 Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales

Recuerda

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o 1000, es equivalente a mover la coma decimal a la derecha tantos lugares / tantas cifras como ceros acompañan a la unidad.

¡Atención!

Recuerda multiplicar todos los términos de ambos miembros de la ecuación.

¿Qué pasaría?

Si no se convierten en enteros los coeficientes, se puede resolver el sistema, pero el cálculo será más complejo.

Problema

Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 0,4x + 1,7y = 5,8 & (1) \\ 0,1x + 0,3y = 1,2 & (2) \end{cases}$

- Multiplica por 10 todos los valores numéricos del sistema de ecuaciones y aplica alguno de los métodos estudiados.

Solución

1. Multiplica por 10 cada ecuación del sistema y conviértelas en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$(1)\ 10 \bullet \rightarrow 0,4x + 1,7y = 5,8 \rightarrow 4x + 17y = 58$$
$$(2)\ 10 \bullet \rightarrow 0,1x + 0,3y = 1,2 \rightarrow x + 3y = 12$$

2. Se despeja **x** en la **ecuación 2**: $x + 3y = 12 \rightarrow x = 12 - 3y$ (3)

3. Se sustituye **x** en la **ecuación 1**:

$$\begin{aligned} 4x + 17y &= 58 \\ 4(12 - 3y) + 17y &= 58 \\ 48 - 12y + 17y &= 58 \\ 5y &= 58 - 48 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

4. Se sustituye **y = 2** en la **ecuación 3**:

$$\begin{aligned} x &= 12 - 3y \\ x &= 12 - 3 \bullet 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

Conclusión

Para resolver un **sistema de ecuaciones con coeficientes decimales**, se multiplica cada ecuación por un número, tal que los coeficientes se conviertan en números enteros; luego se aplica el método más adecuado.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

a. $\begin{cases} 0,2x + 0,4y = 3 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 0,15x + 0,08y = 1 \\ 0,5x + 0,3y = 3,5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0,1 \\ x + 0,5y = 3,5 \end{cases}$

1.15 Sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios

Problema

Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & (1) \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & (2) \end{cases}$

¡Atención!

Se convierten los coeficientes en números enteros y luego se aplica alguno de los métodos estudiados.

Solución

1. Convierte las ecuaciones en coeficientes enteros, multiplicando cada ecuación por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de sus denominadores y de esta manera se obtienen ecuaciones con números enteros.

$$\begin{array}{lll} (1)\ 12 \bullet \rightarrow & \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & \rightarrow 8x + 9y = 144 \\ (2)\ 9 \bullet \rightarrow & \frac{7}{9}x + y = 15 & \rightarrow 7x + 9y = 135 \end{array}$$

2. Se reduce en **y**, restando la **ecuación 2** de la **ecuación 1**:

$$\begin{array}{rr} (1) \rightarrow & 8x + 9y = 144 \\ (2) \rightarrow & (-)\ 7x + 9y = 135 \\ \hline & x = 9 \end{array}$$

3. Se sustituye **x = 9** en la **ecuación 1**:

$$\begin{aligned} 8\mathbf{x} + 9y &= 144 \\ 8 \bullet \mathbf{9} + 9y &= 144 \\ 9y &= 144 - 72 \\ 9y &= 72 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 9$, $y = 8$.

Recuerda

El m. c. m. de lo denominadores de una fracción y un número entero es el mismo denominador de la fracción.

Conclusión

Para resolver el **sistema de ecuaciones cuyo coeficiente es un número fraccionario**, se multiplica cada ecuación por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de sus denominadores y de esta manera se obtienen ecuaciones con números enteros, luego se aplica el método de solución que se considere más adecuado.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

a. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ 3x + 5y = 63 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -4 \\ x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$

1.16 Sistemas de ecuaciones que contienen signos de agrupación

Problema

Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & (1) \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & (2) \end{cases}$

- Elimina los paréntesis reduciendo los términos semejantes de cada ecuación.

Solución

¡Atención!

Para realizar las operaciones indicadas en cada ecuación se debe recordar que un negativo fuera de los paréntesis cambia el signo de los términos dentro del paréntesis.

1. Realiza las operaciones indicadas en cada ecuación:

$$1 \rightarrow 8x - 3x + 3y = 50 \rightarrow 5x + 3y = 50$$
$$2 \rightarrow 3x + 3y - 6y + 5x = 41 \rightarrow 8x - 3y = 41$$

2. Reduce los sumandos semejantes:

$$\begin{array}{lrl} 1 \rightarrow & 5x + 3y &= 50 \\ 2 \rightarrow & (+)\ 8x - 3y &= 41 \\ \hline & 13x &= 91 \\ & x &= 7 \end{array}$$

3. Sustituye **x** en la **ecuación 1**:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 50 \\ 5 \cdot 7 + 3y &= 50 \\ 35 + 3y &= 50 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 7$, $y = 5$.

Conclusión

Para resolver un **sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas con signos de agrupación**, es necesario:

- Suprimir los signos de agrupación y efectuar las operaciones indicadas.
- Resolver el sistema aplicando el método más adecuado.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

a. $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 4(y - x) + y = -27 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2(x - y) + 34 = 0 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 5(2x + y) = 19 \\ 5(6x + y) - 10 = 45 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{1}{2}(4x - 4) + \frac{3}{2}y = 2 \\ 3(2x + 34) - 5y = -4 \end{cases}$

1.17 Sistemas de ecuaciones de la forma ax + by + c = 0

Problema

Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 0,8x + 1,3y - 14,5 = 0 & (1) \\ 0,4x - 0,3y - 2,5 = 0 & (2) \end{cases}$

Solución

1. Se transpone el término independiente c para llevar a la forma **ax + by = - c**: $\begin{cases} 0,8x + 1,3y = 14,5 \\ 0,4x - 0,3y = 2,5 \end{cases}$
2. Se multiplica por 10 para convertir los coeficientes a números enteros.

$$(1)\quad 10 \cdot \rightarrow 0,8x + 1,3y = 14,5 \rightarrow 8x + 13y = 145$$
$$(2)\quad 10 \cdot \rightarrow 0,4x - 0,3y = 2,5 \rightarrow 4x - 3y = 25$$

3. Reduce **x**, multiplicando por 2 y restando la **ecuación 2** de la 1:

$$\begin{array}{rlr} (1) \rightarrow & & 8x + 13y = 145 \\ (2) \rightarrow & 2 \cdot & (-)\ 4x - 3y = 25 \\ \hline & & 19y = 95 \\ & & y = 5 \end{array}$$

4. Sustituye **y = 5** en la **ecuación 2**:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 25 \\ 4x - 3 \cdot 5 &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

La solución del sistema es x = 10, y = 5.

¡Atención!

Transforma cada una de las ecuaciones del sistema a la forma ax + by = − c, dejando los dos términos con incógnitas a un solo lado de la igualdad.

Conclusión

Para resolver un **sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de la forma ax + by + c = 0**, se debe:

- Llevar las ecuaciones a la forma **ax + by = -c**, y efectuar la transposición de términos.
- Resolver el sistema mediante el método que se considere más adecuado.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

a. $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 15y = 4x + 3 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 3x + 5y - 9 = 0 \\ 4x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$

1.18 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

a. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 5x - 3y = 32 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0,8x - 0,5y = -2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 0,8x - 0,2y = 7 \\ 0,4x + 2y = 14 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

h. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{x-5}{4} = x + 2y \end{cases}$

j. $\begin{cases} x - 2(x + y) = 3y - 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

k. $\begin{cases} 6x - 5y - 7 = 0 \\ -13x + 30y - 4 = 0 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 0,2x + 0,3y + 0,2 = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes problemas aplicando el método más adecuado.

a. La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número mayor es cuatro unidades menos que el cuádruplo del número menor. ¿Cuáles son los números?

b. La diferencia de dos números enteros es 8. El doble del mayor más el triple del menor es 61. ¿Cuáles son esos números?

c. La tercera parte de la diferencia de dos números racionales es 4, y la sexta parte de su suma es 5. ¿Cuáles son esos números?

d. Un salón de eventos tiene una capacidad de 160 personas. Si se realiza un evento a beneficio de los comedores escolares, con entradas regulares a B/. 5 y con asiento preferencial B/. 30, ¿cuántas entradas de cada tipo se deben vender para recaudar B/. 2300?

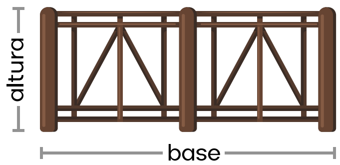
e. Un problema tomado de una de las tablillas babilónicas plantea el siguiente enunciado: un cuarto de la anchura más la longitud es igual a 7 manos. La longitud más anchura es igual a 10 manos. ¿cuál es la altura y la anchura?

Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

2.1 Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría

Problema

¿Cuáles son las dimensiones de un portón (base y altura), si el perímetro mide 16 metros y la base mide 2 metros más que la altura?



Solución

1. Se definen las incógnitas; sea **x** la base y **y** la altura.

El perímetro mide 16 m. → $2x + 2y = 16$

La base excede en 2 m a la altura. → $x = y + 2$

2. Se escriben las ecuaciones del sistema: $\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ x = y + 2 \end{cases}$

3. Se aplica el método de sustitución para resolver el sistema:

$2x + 2y = 16 \rightarrow 2y + 4 + 2y = 16$

$2(y + 2) + 2y = 16 \qquad 4y = 12$

$y = 3$

4. Se sustituye el valor de **y** en la segunda ecuación:

$x = y + 2$

$x = 3 + 2$

$x = 5$

R: La base es 5 m y la altura 3 m.

Recuerda

El perímetro de un rectángulo es 2 veces la altura más 2 veces el ancho, por eso en el problema es $2x + 2y = 16$.

¡Atención!

Observa que, como en la segunda ecuación **x** está despejado e igualado a **y + 2** se sustituye directamente en la primera ecuación.

Conclusión

Para resolver **problemas en geometría** mediante sistemas de ecuaciones, se definen las cantidades que se representan con incógnitas, se escriben las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema y se resuelve.

¡Atención!

Se verifica la pertinencia de las soluciones en el problema.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Don Carlos heredó una parcela de forma rectangular, en la que el largo más el ancho mide 30 m y la diferencia entre el largo y el ancho es de 6 m. ¿Cuánto mide de largo y de ancho la parcela?

2. La base de un rectángulo mide 20 cm más que su altura. Si el perímetro mide 172 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2.2 Aplicación de sistemas de ecuaciones en ciencias naturales

Problema

Antonio viaja en bicicleta a 20 km por hora de su casa hasta el mercado y de ahí hasta la escuela sigue a 4 km por hora. Si la escuela dista 12 km de su casa, pasando por el mercado y tarda 1 hora en realizar el recorrido, ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y el mercado y del mercado a la escuela?

Solución

1. Se definen las incógnitas; sea **x** distancia desde la casa al mercado y **y** la distancia desde el mercado a la escuela.

Las distancias que recorre suman 12 km. → $x + y = 12$

El tiempo que tarda en cada recorrido suma 1 hora. → $\frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1$

2. Se escriben las ecuaciones del sistema: $\begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 & (2) \end{cases}$

3. Se aplica el método de reducción para resolver el sistema:

$$\cdot 20 \rightarrow \begin{cases} x + y = 12 & (1) \rightarrow \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 & (2) \rightarrow \end{cases} \quad \begin{array}{r} x + y = 12 \\ (-) \quad x + 5y = 20 \\ \hline -4y = -8 \\ y = 2 \end{array}$$

4. Se sustituye el valor de **y** en la primera ecuación:

$$x + y = 12$$
$$x + 2 = 12$$
$$x = 10$$

R: Desde la casa al mercado hay 10 km y del mercado a la escuela hay 2 km.

Conclusión

Para resolver situaciones de las **ciencias naturales**, se deben identificar e indicar las magnitudes que serán representadas por las incógnitas **x** y **y**; luego plantear el sistema y resolverlo.

Recuerda

La fórmula para calcular la velocidad dados la distancia y el tiempo es:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

La fórmula para calcular el tiempo dadas la distancia y la velocidad es:

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Carlos viajó en su auto hacia la playa, que está a 50 km de su casa, y de camino se detuvo en una gasolinera. De su casa a la gasolinera viajó a una velocidad de 30 km por hora, y de ahí hasta la playa condujo a 15 km por hora. El recorrido tarda en total 2 horas. ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y la gasolinera y de la gasolinera a la playa?

2.3 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética

Problema

Ana compró un televisor Smart TV con un descuento del 15 %, su hermana Beatriz compró otro televisor 25 balboas más caro que el de Ana, pero consiguió un descuento del 20 %, y al final solamente pagó 8 balboas más que Ana. ¿Cuál era el precio de cada televisor sin el descuento?

a. Elabora una tabla que represente la relación entre los precios.

b. Escribe el sistema de ecuaciones que represente las condiciones del problema y resuélvelo.

Solución

1.

	Televisor de Ana	Televisor de Beatriz	Comparación de precios
Precio original	x balboas	y balboas	y = x + 25
Descuento	15 % de x	20 % de y	
Precio con descuento	0,85x balboas	0,8y balboas	0,8y = 0,85x + 8 balboas

2. Se plantea el sistema con las condiciones del problema:

$$\begin{cases} y = x + 25 & (1) \\ 0{,}8y = 0{,}85x + 8 & (2) \end{cases}$$

Se convierten en enteros los coeficientes de la **ecuación 2**

$$100 \cdot \rightarrow 0{,}8y = 0{,}85x + 8 \rightarrow 80y = 85x + 800$$

- Se aplica el método de sustitución para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 80\mathbf{y} &= 85x + 800 \\ 80(\mathbf{x + 25}) &= 85x + 800 \\ 80x + 2000 &= 85x + 800 \\ -5x &= -1200 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

- Se sustituye el valor de **x** en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{x} + 25 \\ y &= 240 + 25 \\ y &= 265 \end{aligned}$$

Por tanto, Ana pagó B/. 204 por el televisor y Beatriz B/. 212.

¡Atención!

Observa que como no se conoce el precio de cada vestido, se resta a 1 (que representa el precio sin el descuento) el porcentaje de descuento para multiplicarlo por cada incógnita, así:

- 15 % = 15 ÷ 100
  = 0,15
  1 – 0,15 = **0,85**
- 20 % = 20 ÷ 100
  = 0,2
  1 – 0,2 = **0,8**

Conclusión

Para resolver **situaciones sobre tanto por ciento** mediante el uso de sistemas de ecuaciones, es importante indicar los datos que serán representados por las magnitudes **x** y **y**; luego plantear el sistema y resolverlo.

Recuerda

Las partes de una razón:

a : b

Antecedente

Consecuente

La propiedad fundamental de las proporciones:

Si a : b = c : d, entonces a • d = b • c.

¡Atención!

Toma en cuenta que la ecuación 2 se forma según la cantidad de patas que tiene cada animal.

Observa cómo se hace

En el zoológico tienen avestruces y cebras a razón de 7 a 8, si entre todas se cuentan 92 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas cebras hay?

1. Se define como **x** el número de avestruces y **y** al número de cebras. Se representan las condiciones de la siguiente manera:

"a razón de 7 a 8" → $x : y = 7 : 8$ entonces $8x = 7y$

"se cuentan 92 patas" → $2x + 4y = 92$

2. Se plantea el sistema: $\begin{cases} 8x = 7y & (1) \\ 2x + 4y = 92 & (2) \end{cases}$

3. Se resuelve el sistema:
- Despeja **x** de la **ecuación** 1:

$$x = \frac{7}{8}y$$

- Sustituye **x** en la **ecuación** 2:

$$2x + 4y = 92 \rightarrow 2 \cdot \frac{7}{8}y + 4y = 92$$

$$\frac{7}{4}y + 4y = 92$$

$$\frac{23}{4}y = 92$$

$$y = 16$$

4. Se sustituye el valor de **y** en la primera ecuación:

$$x = \frac{7}{8}y \rightarrow x = \frac{7}{8} \cdot 16$$

$$x = 14$$

Por lo tanto, hay 14 avestruces y 16 cebras.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

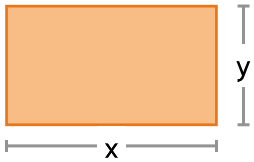
1. Resuelva los siguientes problemas.
   a. María compró un pantalón y una blusa. Los precios de las prendas suman B./ 70, pero recibió un descuento del 10 % en el pantalón y del 20 % en la blusa, y pagó en total B./ 59. ¿Cuál es el precio sin descuento de cada prenda?
   b. Un comerciante compra dos objetos por B./ 200 y los vende por un total de B./ 233. Si en la venta de uno de los objetos gana el 25 % y en el otro pierde el 20 %, ¿cuánto pagó por cada uno de los objetos?
   c. Las edades de dos hermanos son entre sí como 2 : 5 y ambas edades suman 28 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

2.4 Practico lo aprendido

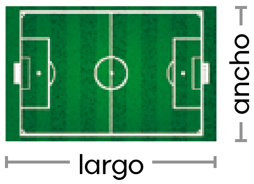
Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.
   a. Carlos pagó una cuenta de $300 con billetes de $5 y de $10. En total empleó 45 billetes para hacer el pago, ¿cuántos billetes de cada valor utilizó?
   b. Un número de dos cifras es tal, que la cifra que ocupa el lugar de las decenas es el doble de la que ocupa el lugar de las unidades, y la diferencia de las dos cifras es igual a 3. ¿Cuál es ese número?
   c. Juan dispone de un capital de $8000, del cual una parte la deposita en una cuenta al 5 % de interés anual y otra al 6 % anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año será de $8450.
   d. Miguel pagó B/. 84 por 3 cajas de clavos y 5 cajas de tornillos. José compró 5 cajas de clavos y 7 de tornillos, y tuvo que pagar B/. 124, ¿cuál es el precio de cada caja de clavos y de cada caja de tornillos?
   e. En la granja El Corral se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada tipo se han utilizado?

   f. Si al antecedente de una razón le sumamos 3 y al consecuente le restamos 2, la razón se convierte en 6 : 7; pero si al antecedente le restamos 5 y al consecuente le sumamos 2, la razón resultante es 2 : 5, ¿cuál es el valor del antecedente y del consecuente de la razón?
   g. Si un rectángulo tiene una altura que mide 5 cm menos que su base y su perímetro es igual a 30 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?



   h. Un productor de jugos artesanales se dispone a preparar una mezcla entre dos variedades. Para responder a un pedido de compra, el volumen total de la mezcla a obtener debe ser de 1420 litros. Si el volumen de coco que interviene en la mezcla es igual a dos tercios del volumen de piña más 120 litros, ¿cuántos litros de cada variedad deben mezclarse para obtener la variedad de jugo deseada?
   i. El perímetro de una cancha de fútbol mide 432 metros. Si la razón entre el ancho y el largo es 5 : 7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?



Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Determino la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita.			
2. Utilizo ecuaciones de primer grado con una incógnita en la resolución de problemas.			
3. Identifico ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
4. Reconozco sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
5. Aplico el método de reducción por sustracción para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
6. Empleo el método de reducción por adición para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
7. Utilizo el método de sustitución para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
8. Aplico el método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
9. Empleo el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.			
10. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas con coeficientes decimales.			
11. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas con coeficientes fraccionarios.			
12. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que contienen signos de agrupación.			
13. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$.			
14. Aplico sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en la resolución de problemas.			

Unidad 4

Unidades de medida de capacidad

Algunas de las primeras herramientas inventadas por los seres humanos tenían como objetivo medir, eran una necesidad para las diferentes tareas cotidianas, como llevar el conteo de sus posesiones, comida, vestimenta, etc.; determinar cantidades de alimento tanto en la caza como en la preparación de estos, tomar medidas en la construcción de sus viviendas, confección de prendas de vestir, entre muchas otras. Inicialmente eran herramientas rudimentarias y se fueron perfeccionando con el tiempo hasta llegar a las más avanzadas que hoy utilizamos.

Algunas medidas utilizadas en la actualidad están basadas en distintas partes del cuerpo humano, en el caso de las medidas de longitud algunos ejemplos son la **pulgada**, palabra que proviene de "pulgar", ya que representa el largo aproximado de ese dedo, y el pie, que se basa en una medida estándar del pie humano. En el caso de las medidas de peso, la palabra **libra** proviene del latín *libra*, que significa "balanza". En cuanto a las medidas de tiempo, se basan en los movimientos del Sol y de la Luna, que definen el día y la noche; por ejemplo los babilonios divideron el tiempo en 12 partes, lo que en la actualidad conocemos como horas, y estas divisiones se basaron en el lapso entre la salida y la puesta del sol.

En cuánto a las medidas de capacidad, en la Antigüedad se utilizaban las calabazas vacías para medir líquidos, la cual no era una medida precisa por la variabilidad de su tamaño. Algunas civilizaciones optaron por fabricar recipientes de cerámida de medidas estándar para medir el volumen.

1 palmo o cuarta de la mano

Calabaza o totuma

1 codo

En esta unidad aprenderás a...

- Comparar los múltiplos y submúltiplos de las medidas de capacidad en el Sistema Internacional de Unidades (SI).
- Realizar conversiones entre las medidas de capacidad en el SI.
- Realizar conversiones entre las medidas de capacidad en el Sistema Inglés.
- Aplicar la conversión entre las unidades de medidas de capacidad del Sistema Inglés y las del SI.

Unidades de medida de capacidad

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica cuál es la unidad principal para medir la capacidad de un envase.

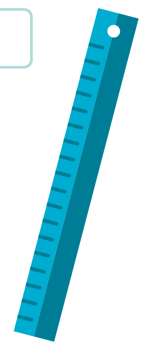
metro | kilogramo | litro

2. Relaciona cada magnitud con el objeto que la mide.

a. Capacidad

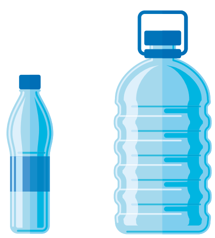
b. Longitud

c. Masa

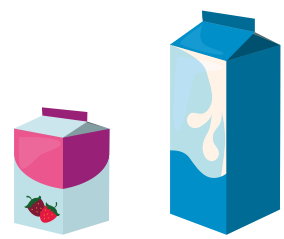


3. Indica cuál envase tiene mayor capacidad. Cada pareja de objetos está representada con la misma escala.

a.



c.



b.

d.

4. Compara cada par de medidas y anota el símbolo **>** (mayor que) o **<** (menor que) según sea el caso.

a. 1 L .... 1 ml

b. 1 hl .... 1 dl

c. 1 ml .... 1 hl

d. 1 kl .... 1 cl

e. 1 L .... 1 kl

f. 1 cl .... 1 kl

g. 1 dal .... 1 ml

h. 1 ml .... 1 hl

1.2 La capacidad en el Sistema Internacional

Problema

Luis necesita comprar una olla con una capacidad mínima de 5 litros. Él observa dos ollas, una tiene una capacidad de 1 litro menos de la que busca, y la otra es de 1 litro más. ¿Cuál es la capacidad de cada olla? ¿Cuál olla le conviene comprar a Luis?

Solución

1. Primero se calcula cuántos litros hay en la primera olla. Toma en cuenta que tiene una capacidad de 1 L menos de lo que busca Luis.

$$5\ L - 1\ L = (5 - 1)\ L = 4\ L$$

2. Luego, se calcula la capacidad de la segunda olla, que en este caso tiene una capacidad de 1 L más.

$$5\ L + 1\ L = (5 + 1)\ L = 6\ L$$

Por lo tanto, la primera olla tiene una capacidad de 4 L y la segunda olla tiene una capacidad de 6 L.

Como $4\ L < 5\ L < 6\ L$, a Luis le conviene comprar la segunda olla.

Conclusión

La capacidad de un objeto se define como el volumen que este ocupa. En las medidas de capacidad la unidad de referencia y la más utilizada es el litro (L). Las unidades más pequeñas que el litro se llaman **submúltiplos** y las unidades más grandes que el litro se llaman **múltiplos**.

En la tabla observa las equivalencias del litro (L).

múltiplos	**kilolitro**	kl	1000 L
	hectolitro	hl	100 L
	decalitro	dal	10 L
unidad	**litro**	L	1 L
submúltiplos	**decilitro**	dl	0,1 L
	centilitro	cl	0,01 L
	mililitro	ml	0,001 L

Para comparar medidas numéricas se utilizan los signos de relación:

- $>$ → mayor que
- $<$ → menor que
- $=$ → igual a

¡Atención!

Para sumar o restar unidades de medida, se suman o restan los valores numéricos y se mantiene la unidad.

Datos interesantes

El **Sistema Internacional de Unidades** (abreviado **SI**, está conformado por 7 unidades básicas, que son: el metro, el kilogramo, el segundo, el kelvin, el amperio, el mol y la candela. El litro es una unidad de volumen del sistema métrico decimal, que aunque no se considera una unidad básica igualmente es aceptada por el SI.

Observa cómo se hace

Observa cada recipiente y la capacidad indicada.

3,780 L   2,5 dl   5 ml   2 dal   7,5 hl

1. Identifica cuáles unidades de medida corresponden a múltiplos y cuáles a submúltiplos del litro.
2. Compara sus medidas ordenándolas de menor a mayor.

Observa la tabla de la página anterior y responde:

1. **Múltiplos**: hectolitro (hl) y decalitro (dal).
   Submúltiplos: decilitro (dl) y mililitro (ml).
2. Observa que todos los valores numéricos tienen como mayor valor posicional la unidad, por lo que se ordenan según su posición en la tabla de unidades de medida:

5 ml < 2,5 dl < 3,780 L < 2 dal < 7,5 hl

Desarrollo sostenible

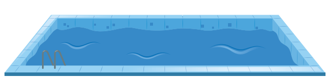
Reciclar, reutilizar y reducir el consumo de los distintos tipos de envases y recipientes, son formas de colaborar con la conservación del medioambiente.

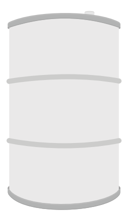
Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe la unidad de medida de capacidad del SI, con la que más fácilmente se puede medir el volumen de cada objeto.

a. 

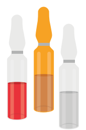
b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

g. 

h. 

2. Compara cada par de medidas y anota el símbolo > (mayor que) o < (menor que) según sea el caso.

a. 4,1 dl ________ 0,1 ml
b. 1,9 dal ________ 9,9 dl
c. 6,3 ml ________ 1,1 hl
d. 7,2 kl ________ 3,9 cl
e. 9 kl ________ 7,6 hl
f. 3,8 cl ________ 8,7 kl
g. 5,4 L ________ 0,1 ml
h. 1,3 cl ________ 9,9 kl

¡Atención!

Al comparar la posición de las unidades de cada medida toma en cuenta que:

1 ml < 1 cl < 1 dl < 1 L

A la vez:

1 L < 1 dal < 1 hl < 1 kl

1.3 Conversiones de medidas de capacidad en el SI

Problema

María quiere repartir 7 L de refresco en cantidades iguales entre sus compañeros de clase. Si a cada uno le correspondieron 25 cl, ¿cuántos vasos llenó y cuántos compañeros son?

Solución

Para resolver el problema se debe realizar una división, pero como las cantidades de refresco indicadas están dadas en unidades de medida diferente, se debe convertir una de ellas a la otra.

1. Se convierten 7 L a centilitros, para ello se multiplica 7 por 100:

$$7 \cdot 100 = 700$$

   Por lo tanto, 7 L = 700 cl.

2. Se realiza la división:

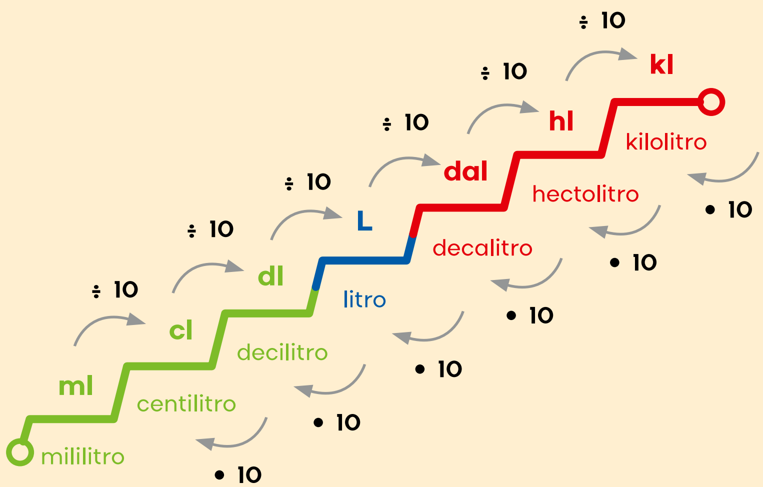
$$700 \div 25 = 28$$

Por lo tanto, María llenó 28 vasos para 28 compañeros.

Conclusión

Para realizar conversiones entre las unidades de medida se puede usar la escalera dibujada abajo.

Observa que para realizar conversiones de una unidad mayor a otra menor, se multiplica. Para pasar de una menor a otra mayor, se divide, como muestra la escalera:



¿Qué pasaría?

Si se convierten centilitros a litros, se obtiene el mismo resultado:

- Para convertir 25 cl a L, se divide entre 100, así:

  $25 \div 100 = 0{,}25$

Por lo tanto:

25 cl = 0,25 cl

- Se realiza la división:

  $7 \div 0{,}25 = 28$

De esta manera, se obtiene el mismo resultado.

Trabajo colaborativo

1. Forma tres grupos.
   a. Construyan una escalera en cartulina como la de la izquierda y colóquenla en el aula.

¡Atención!

Según la cantidad de veces que se suban o bajen gradas en la escalera de conversión, se multiplica el factor por 10; por consiguiente se puede operar una vez, tomando en cuenta que:

- Dos veces 10 es igual a 100.
- Tres veces 10 es igual a 1000.
- Cuatro veces 10 es igual a 10 000.

Observa cómo se hace

Realiza las siguientes conversiones:

a. 83 dl a cl

b. 19 ml a dl

c. 300 L a kl

d. 0,18 dal a ml

Observa cada conversión:

a. 83 dl a cl

Para realizar esta conversión se baja una grada en la escalera, se multiplica una vez por 10 así:

$$83 \bullet 10 = 830$$

Por lo tanto, 83 dl = 830 cl.

b. 19 ml a dl

Para realizar esta conversión se suben dos gradas en la escalera, se divide dos veces por 10 (que es lo mismo que dividir entre 100), así:

$$19 \div 100 = 0{,}19$$

Por lo tanto, 19 ml = 0,19 dl.

c. 300 L a kl

Para realizar esta conversión se suben tres gradas en la escalera, se divide tres veces por 10 (que es lo mismo que dividir entre 1000), así:

$$300 \div 1000 = 0{,}3$$

Por lo tanto, 300 L = 0,3 kl.

d. 0,18 dal a ml

Para realizar esta conversión se bajan cuatro gradas en la escalera, se multiplica cuatro veces por 10 (que es lo mismo que multiplicar por 10 000), así:

$$0{,}18 \bullet 10\,000 = 1800$$

Por lo tanto, 0,18 dal = 1800 ml.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Realiza las conversiones indicadas.

a. 0,0004 dal a dl

b. 100 dal a kl

c. 11 400 ml a L

d. 43,3 cl a ml

e. 10,3 dal a hl

f. 912 dl a dal

g. 109 L a kl

h. 2,06 L a ml

i. 91 ml a cl

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una piscina contiene 30 kl de agua y otra contiene 130 hl de agua. ¿Cuál tiene mayor cantidad de litros? ¿De cuántos litros es la diferencia?

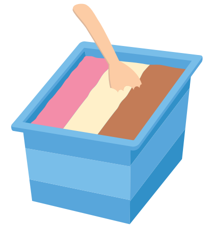
b. Andrés tiene 1200 ml de leche en la refrigeradora. Si cada día se toma 1 vaso de 2 dl, ¿en cuántos días se acabará la leche?

c. Un laboratorista químico necesita distribuir una vacuna en envases de 1,7 ml. Si la cantidad total del líquido es 0,255 dal, ¿cuántos envases logrará llenar?

1.4 La capacidad en el Sistema Inglés

Problema

David va al supermercado a comprar una taza de su helado favorito, pero solo lo venden en envases de 1 cuarto. ¿Cuántas tazas de helado contiene ese envase?



Solución

Para obtener la cantidad de tazas que hay en un cuarto, se utilizan las siguientes equivalencias:

- 1 cuarto = 2 pintas
- 1 pinta = 2 tazas

Como en 1 cuarto hay 2 pintas, observa:

$$\begin{aligned} 2 \text{ pintas} &= 1 \text{ pinta} + 1 \text{ pinta} \\ &= 2 \text{ tazas} + 2 \text{ tazas} \\ &= 4 \text{ tazas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, 1 cuarto = 4 tazas.

R: El envase de 1 cuarto de helado que compró David contiene 4 tazas.

Datos interesantes

El **Sistema Inglés de Unidades** es utilizado en la actualidad como medida principal en los Estados Unidos y hasta hace algunos años en el Reino Unido, donde se conoce como sistema Imperial. Algunos países latinoamericanos donde también se utiliza, sin ser el oficial, son Puerto Rico y Panamá.

Conclusión

Las **medidas de capacidad en el Sistema Inglés** de mayor uso son: el barril, el galón, el cuarto, la pinta, la taza, la onza fluida y la cucharada.

Algunas medidas equivalentes son:

- 1 barril = 42 galones (gal)
- 1 galón (gal) = 4 cuartos (qt)
- 1 cuarto (qt) = 2 pintas (pt)
- 1 pinta (pt) = 2 tazas (c)
- 1 taza (c) = 8 onzas fluidas (fl oz)
- 1 onza fluida (fl oz) = 2 cucharadas

Para convertir de medidas más grandes a más pequeñas, se multiplica.

Para convertir de medidas más pequeñas a más grandes, se divide.

Ejemplo: Convierte 99 pintas a cuartos.

Como la pinta es una medida más pequeña que el cuarto, se realiza una división: 99 ÷ 2 = 49,5

De manera que, 99 pt equivalen a 49,5 qt o de forma equivalente $\frac{99}{2}$ qt.

Recuerda

Toda división o número decimal puede expresarse de forma equivalente como una fracción:

- $99 \div 2 = \frac{99}{2}$
- $49{,}5 = \frac{495}{10} = \frac{99}{2}$

Observa cómo se hace

Realiza las siguientes conversiones:

a. 15 pintas a cucharadas.

Se desarrolla una conversión de una medida mayor a una menor, se realizan multiplicaciones, tomando en cuenta cada equivalencia:

- De pintas a tazas:

  $15 \bullet 2 = 30$
- De tazas a onzas fluidas:

  $30 \bullet 8 = 240$
- De onzas fluidas a cucharadas:

  $240 \bullet 2 = 480$

Por lo tanto, 15 pintas equivalen a 480 cucharadas.

b. 440 fl oz a qt.

Se desarrolla una conversión de una medida menor a una mayor, se realizan divisiones, tomando en cuenta cada equivalencia:

- De onzas fluidas a tazas:

  $440 \div 8 = 55$
- De tazas a pintas:

  $55 \div 2 = 27{,}5$
- De pintas a cuartos:

  $27{,}5 \div 2 = 13{,}75$

Por lo tanto, 440 fl oz = 13,75 qt.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Realiza las conversiones indicadas.

a. 6,5 galones a tazas

b. 88 cucharadas a onzas fluidas

c. 36 cuartos a tazas

d. 3 barriles a cuartos

e. 1498,56 tazas a barriles

f. 21 onzas fluidas a cucharadas

g. 16 cuartos a onzas fluidas

h. 369,6 pintas a barriles

i. 7460 cuartos a galones

j. 19 tazas a onzas fluidas

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Lucía tenía 6 galones con agua para regar sus plantas. Si gastó 16 pintas, ¿cuántas pintas de agua le quedaron?

b. Un restaurante gasta 20 galones de gel alcoholado por semana. Si lo distribuye en envases cuya capacidad es de una taza, ¿cuántos envases se rellenan?

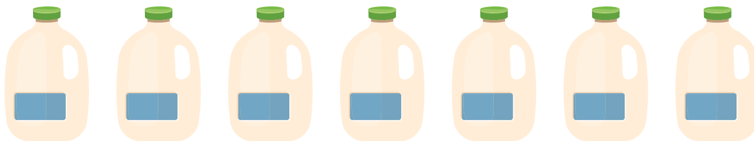
c. Un frasco de medicina para la tos contiene 25,4 onzas fluidas. ¿Cuántas cucharadas contiene?

d. Don Luis preparó 288 onzas fluidas de refresco para compartir en la reunión con su equipo de trabajo. Si los va a distribuir en jarras con capacidad de 1 cuarto, ¿cuántas jarras utilizará?

1.5 Conversión de unidades de medida de capacidad entre el SI y el Sistema Inglés

Problema

Jairo sabe que un galón de leche equivale a 3785 mililitros. Si él desea conocer cuántos litros hay en 7 galones, ¿qué procedimiento debe seguir? ¿Cuál es la equivalencia resultante?



Solución

Primero, se calcula cuántos mililitros hay en 7 galones, así:

$$7 \cdot 3785 = 26\,495$$

Luego, se convierte a litros el resultado obtenido. Para ello se divide la cifra obtenida entre 1000, porque 1000 ml hacen un litro:

$$26\,495 \div 1000 = 26{,}495$$

Por lo tanto, 7 galones equivalen a 26,495 litros.

Conclusión

Observa las equivalencias entre el SI y el Sistema Inglés.

1 barril = 158 987 ml = 158,9 L
1 gal = 3785 ml = 3,785 L
1 qt = 946 ml = 0,946 L
1 pt = 473,17 ml = 0,47317 L

1 botella = 750 ml = 0,75 L
1 c = 236 ml = 0,236 L
1 fl oz = 29 ml = 0,029 L

Para hacer una conversión usando las equivalencias, se siguen estos pasos:

1. Se multiplica la cantidad por convertir por la equivalencia, expresada como fracción. En el numerador aparece el valor con la nueva unidad, y en el denominador el valor con la unidad por convertir.
2. Se tacha la unidad por convertir, pues se repite en el numerador y en el denominador.
3. Se realiza la multiplicación y se aproxima de ser necesario.

¿Qué pasaría?

Si primero se convierte a litros la medida 3785 ml y luego se multiplica el resultado por la cantidad de galones, se obtiene el mismo resultado del **Soluciona**. Observa:

$$3785 \div 1000 = 3{,}785$$

$$3{,}785 \cdot 7 = 26{,}495$$

¡Atención!

Para realizar conversiones a medidas diferentes de mililitro o litro, se convierte primero a una de las dos medidas mencionadas y luego se realizan las conversiones con el método aprendido en el SI.

Observa cómo se hace

Realiza las siguientes conversiones:

a. 6 barriles a kl.

1. Se multiplican 6 barriles por su valor equivalente expresado como fracción $\left(\frac{158,987\,L}{1\,barril}\right)$, así:

$$6\ \cancel{barriles} \cdot \left(\frac{158,987\,L}{1\,\cancel{barril}}\right) = $$

$$953{,}922\ L$$

2. Se convierte 953,922 L a kl utilizando la escalera de equivalencias de la página 71 de esta guía. Por lo tanto, se divide 953,922 entre 1000 (3 veces 10), así:

$$953{,}922 \div 1000 = 0{,}953922$$

R: 6 barriles = 0,953922 kl

b. 11 fl oz a dl

1. Se multiplican 11 fl oz por su valor equivalente expresado como fracción $\left(\frac{0,029\,L}{1\,fl\,oz}\right)$, así:

$$11\ \cancel{fl\ oz} \cdot \left(\frac{0,029\,L}{1\,\cancel{fl\,oz}}\right) = $$

$$0{,}319\ L$$

2. Se convierten 0,319 L a dl utilizando la escalera de equivalencias de la página 71 de esta guía. Por lo tanto, se multiplica 0,319 por 10, así:

$$0{,}319 \cdot 10 = 3{,}19$$

R: 11 fl oz = 3,19 dl

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Anota la equivalencia en litros y mililitros de cada unidad de medida.

a. 1 barril
b. 1 botella
c. 1 cuarto
d. 1 galón
e. 1 onza fluida
f. 1 pinta
g. 1 taza

2. Realiza las conversiones indicadas.

a. 8 qt a dl
b. 30 fl oz a cl
c. 17 barriles a kl
d. 29 botellas a cl
e. 58 pt a hl
f. 88 c a dl
g. 7 gal a dal
h. 79 barriles a hl
i. 18 qt a cl
j. 62 pt a kl

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. El tanque de agua de la casa de Andrea tiene una capacidad de 1100 L. Si en la casa viven 5 personas, ¿a cuántas tazas por persona equivale la capacidad del tanque si se calcula de forma equitativa?

b. Luisa compra un refresco en un envase que contiene 0,3 dal. Si quiere colocarlo en una jarra con capacidad de 2 qt, ¿cabrá todo el contenido del envase? ¿cuántos mililitros le sobran o le hacen falta?

1.6 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Ordena las siguientes medidas de capacidad de menor a mayor.

3,6 dl	2,8 cl	8,3 kl	3,7 ml	7,5 dal	4,3 L	3,2 hl

2. Ordena las siguientes medidas de capacidad de mayor a menor.

2 cl	2,5 dal	6,7 hl	7,7 kl	2,4 L	9,4 ml	4,1 dl

3. Realice las conversiones indicadas entre medidas del SI.
   - **a.** 0,0007 kl a cl
   - **b.** 20,3 cl a dl
   - **c.** 389 dl a dal
   - **d.** 590 cl a L
   - **e.** 0,00295 hl a ml
   - **f.** 93 000 dl a kl
   - **g.** 710 900 ml a kl
   - **h.** 180 ml a cl
   - **i.** 0,072 hl a ml

4. Realice las conversiones indicadas entre medidas del Sistema Inglés.
   - **a.** 8,3 cuartos a pintas
   - **b.** 841 barriles a galones
   - **c.** 20 pintas a cucharadas
   - **d.** 7 cuartos a galones
   - **e.** 9 barriles a onzas fluidas
   - **f.** 17 barriles a cuartos
   - **g.** 31 onzas fluidas a cuartos
   - **h.** 6048 tazas a barriles
   - **i.** 7164 onzas fluidas a pintas
   - **j.** 252 tazas a barriles

5. Realiza las conversiones entre medidas del Sistema Inglés y el SI.
   - **a.** 3 qt a hl
   - **b.** 66 c a cl
   - **c.** 71 fl oz a cl
   - **d.** 10 barriles a kl
   - **e.** 24 gal a dal
   - **f.** 33 qt a dal
   - **g.** 7 fl oz a cl
   - **h.** 42 gal a hl
   - **i.** 39 fl oz a dl
   - **j.** 97 barriles a kl

6. Resuelve los siguientes problemas.
   - **a.** Diego tiene en un envase 1300 ml de leche. Si se toma 9 dl, ¿Cuántos mililitros de leche le quedan?
   - **b.** Sofía compra 331 galones de refresco para la fiesta de fin de curso del colegio. Si se gastan 900 cuartos, ¿cuántos galones sobran?
   - **c.** El papá de Luis va a la tienda y adquiere 7 garrafones de agua de 20 litros cada uno. ¿Cuántos galones de agua suman los garrafones que compró?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Reconozco los múltiplos y submúltiplos del litro.			
2. Identifico las unidades de medida que se pueden utilizar en distintos recipientes para determinar su volumen.			
3. Comparo los múltiplos y submúltiplos de las medidas de capacidad en el SI utilizando los signos de relación.			
4. Realizo conversiones entre las medidas de capacidad en el SI.			
5. Resuelvo problemas de aplicación con las medidas de capacidad en el SI.			
6. Realizo conversiones entre las medidas de capacidad en el Sistema Inglés.			
7. Resuelvo situaciones que involucran las medidas de capacidad del Sistema Inglés.			
8. Aplico la conversión entre las unidades de medidas de capacidad del Sistema Inglés y las del SI.			
9. Resuelvo situaciones que involucran conversiones entre las medidas de capacidad del Sistema Inglés y del SI.			

Unidad 5

Cuerpos geométricos

El origen de la geometría se remonta a la época del antiguo Egipto y Mesopotamia hace casi 5000 años. En un inicio, se desarrolló como un instrumento que facilitaba la medición de tierras y la organización del calendario.

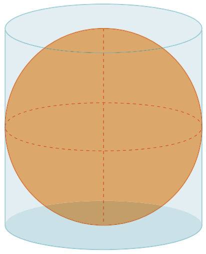
Existen registros más tardíos, en tablillas de arcilla, que demuestran que los babilonios ya resolvían problemas geométricos en el 1000 a. C.

En lo que se refiere a cuerpos geométricos es conocido que los pitagóricos estudiaron las esferas y los cilindros entre el 585 a. C. y el 400 a. C., pero no es hasta siglo y medio más adelante que Arquímedes de Siracusa demostró varios teoremas sobre áreas y volúmenes de sólidos. En su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, aplicó un método inventado por él, que le permitió encontrar los siguientes resultados:

- El área de una esfera es cuatro veces la de su circunferencia máxima.
- El volumen de una esfera es dos tercios del volumen de un cilindro circunscrito.
- El área de una esfera es dos tercios del área de un cilindro circunscrito.

Para resolver problemas sobre cuerpos geométricos es necesario conocer sus elementos y características, además de comprender las fórmulas de volumen para aplicarlas en forma correcta. Esas habilidades se desarrollarán en esta unidad.

Arquímedes de Siracusa (287 a. C - 212 a. C). El matemático más grandioso de la Antigüedad.



Cilindro circunscrito a la esfera.

En esta unidad aprenderás a...

- Caracterizar según los elementos los diferentes cuerpos geométricos.
- Construir cuerpos geométricos a partir de modelos.
- Determinar por medio de la fórmula el volumen de los cuerpos geométricos.
- Calcular el volumen de diferentes cuerpos geométricos del entorno.
- Resolver con confianza problemas de volumen de cuerpos geométricos.
- Plantear y resolver situaciones del entorno que involucren el cálculo del volumen cuerpos geométricos.

Cuerpos geométricos

1.1 Repasa tus conocimientos

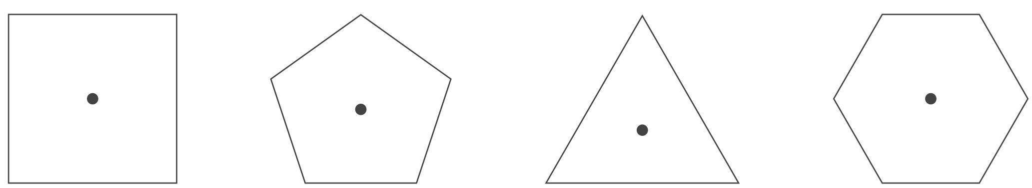
Trabaja en tu cuaderno

1. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Nombre de polígonos según número de lados			
N°. de lados	**Nombre**	**N°. de lados**	**Nombre**
	Triángulo	7	
	Cuadrilátero	8	
5		9	
6			Decágono

2. Calca los polígonos en tu cuaderno y marca los elementos indicados.

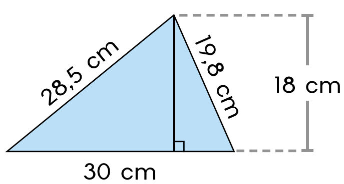
a. Un lado.
b. Un vértice.
c. Una apotema.



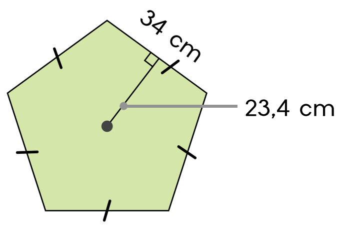
3. Dibuja, en tu cuaderno, una circunferencia con un compás y marca en ella el centro, un radio, un diámetro y una cuerda.

4. Calcula el perímetro (P) y el área (A) de las siguientes figuras geométricas.

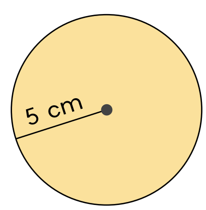
a.



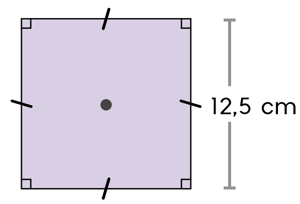
b.



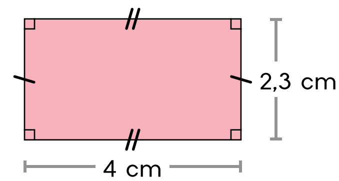
c.



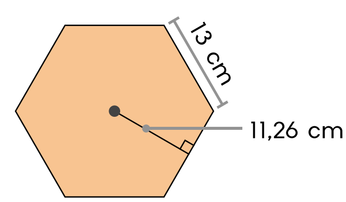
d.



e.



f.



5. Realiza las conversiones de unidades de área y unidades de volumen.

a. 1,23 cm^2 a mm^2

b. 0,0001 m^2 a cm^2

c. 70 000 cm^2 a hm^2

d. 8 dm^2 a mm^2

e. 1,0045 m^3 a dm^3

f. 0,005 cm^3 a mm^3

g. 0,000012 hm^3 a dm^3

h. 7 m^3 a cm^3

i. 0,345998 m^3 a cm^3

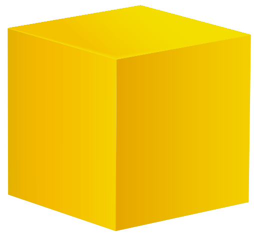
1.2 Tipos de cuerpos geométricos

Problema

Observa cada pareja de cuerpos geométricos. Menciona una semejanza y una diferencia.

1.

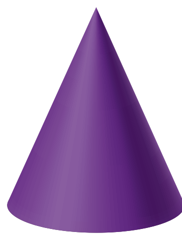
Prisma triangular



Cubo

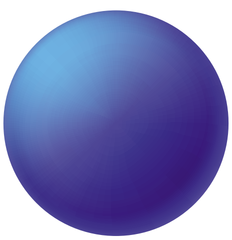
2.

Pirámide



Cono

3.



Esfera

Cilindro

Recuerda

Un cuerpo geométrico es un objeto que tiene tres dimensiones: largo, ancho y altura.

Algunos están limitados por polígonos como los prismas y las pirámides y otros por circunferencias, por ejemplo, el cono y el cilindro.

Solución

1. **Prisma triangular y cubo**: Comparten una semejanza y es que ambos tienen todas sus superficies planas; y una diferencia, es que dos caras del prisma (sus bases) son triangulares, mientras que en el cubo, todas las caras son cuadradas.
2. **Pirámide y cono**: Se parecen en que los dos poseen una cúspide en la que culmina toda la superficie lateral. Una diferencia consiste en que la pirámide tiene todas sus superficies planas, pero en el cono la superficie lateral es curva.
3. **Esfera y cilindro**: Una semejanza es la superficie curva que poseen y una diferencia se observa en que la esfera no tiene caras planas, mientras que el cilindro sí posee dos en sus bases.

Es posible mencionar otras similitudes y diferencias en cada caso; por ejemplo, los cuerpos del punto 1 presentan caras laterales que son paralelogramos. Otra diferencia en los cuerpos del punto 2 está en la forma de la base, ya que en la pirámide es poligonal y en el cono, circular.

Trabajo colaborativo

Forma equipos.

1. Propongan más semejanzas y diferencias entre las parejas de cuerpos geométricos del **Problema**.
2. Comparen también el prisma triangular con el cilindro, la pirámide con el cubo, la esfera con el cono, etc.

Datos interesantes

Leonhard Euler (1707-1783) planteó la relación entre el número de caras (C), la cantidad de vértices (V) y la cantidad de aristas (A) en cualquier poliedro:

$$C + V = A + 2$$

Por ejemplo, para un prisma hexagonal:

$$C + V = 8 + 12 = 20$$

$$\text{y } A + 2 = 18 + 2 = 20.$$

Conclusión

Los cuerpos geométricos se clasifican en dos grandes grupos: los cuerpos redondos y los poliedros.

Los **cuerpos redondos** poseen una superficie curva. En este grupo se hallan el cilindro, el cono y la esfera.

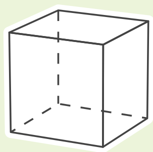
Cilindro

Cono

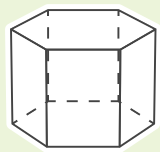
Esfera

- El cilindro y el cono tienen base plana. La esfera es totalmente curva.

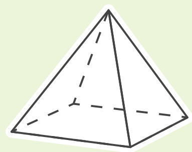
Los **poliedros** se encuentran limitados solamente por polígonos; por lo tanto, todas sus superficies (caras) son planas. En esta categoría se encuentran el prisma y la pirámide.



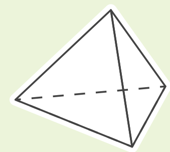
Cubo



Prisma hexagonal



Pirámide cuadrangular



Pirámide triangular

- El cubo es un prisma en el que todas sus caras son cuadrados.
- Prismas y pirámides se identifican de acuerdo con la forma del polígono de la base.

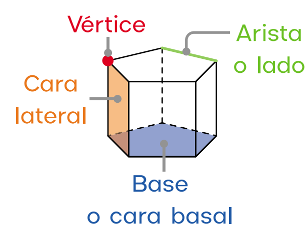
Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Contesta.
   a. ¿Cuántas caras tiene una pirámide cuadrangular?
   b. ¿Qué forma tienen las bases de un cilindro?
   c. ¿Qué forma tienen las caras laterales de una pirámide?
   d. ¿Qué polígono forma la base de un prisma pentagonal?
   e. ¿Cuántos vértices tiene una esfera?
   f. ¿Cuántas caras laterales tiene un prisma triangular?

2. Escribe **V** si el enunciado es verdadero o **F** si es falso. Justifica las falsas.
   a. Todas las superficies de un cuerpo redondo son curvas.
   b. Un sólido que posee dos bases cuadradas se clasifica como prisma.
   c. Un cono tiene un solo vértice.
   d. La pirámide hexagonal tiene 8 caras laterales.
   e. El cilindro no tiene vértices.

Recuerda



1.3 El cilindro circular recto

Problema

Imagínate que construirás un telescopio con materiales de reciclaje para la clase de Ciencias Naturales. El cuerpo del aparato será un cilindro de cartulina de 30 cm de largo y 5 cm de diámetro según se muestra en la figura 1. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la cartulina que debes cortar para formar la superficie lateral del cilindro?

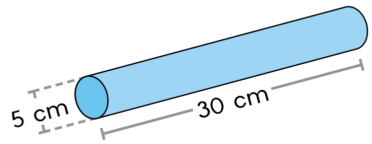


***Figura 1.** Diagrama del cilindro.*

Solución

Será un rectángulo de cartulina en el que el largo mide 30 cm.

Para saber el ancho debe calcularse la medida de la circunferencia (C) que tiene 5 cm de diámetro (d):

$$C = d \cdot \pi \approx 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7$$

Por lo tanto, las dimensiones son 30 cm de largo y 15,7 cm de ancho, como en la figura 2.

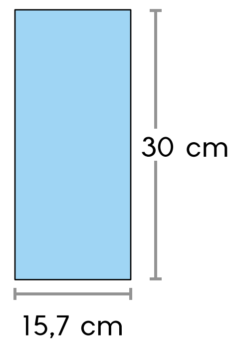
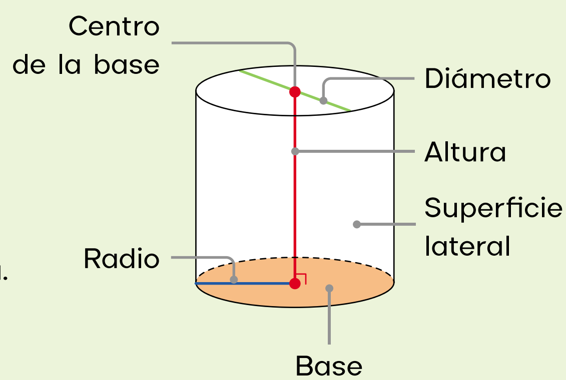


***Figura 2.** Dimensiones del rectángulo.*

Conclusión

El **cilindro circular recto** es un cuerpo redondo que posee una superficie lateral curva y dos caras circulares llamadas bases.

- La altura es perpendicular a la base.
- Sus bases son congruentes y paralelas.
- La superficie lateral es curva.



El **volumen** (V) de un **cilindro** circular recto se calcula multiplicando el área de una base circular (Ab) por la altura (h). Si el radio de la base es **r**, la fórmula es la siguiente:

$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Recuerda

- El volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo.
- La unidad fundamental de volumen en el Sistema Internacional de Unidades es el metro cúbico (m^3).
- La fórmula del área (A) de un círculo de radio **r** es:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Observa cómo se hace

Un camión cisterna como el de la imagen cuenta con un tanque cilíndrico de 1,2 m de radio y 4 m de largo. ¿Cuál es la capacidad en litros del tanque?

Solución

1. Se calcula el volumen del tanque con las medidas proporcionadas. Para π se utiliza la aproximación 3,14.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (1{,}2)^2 \cdot 4 = 18{,}0864$

$V = 18{,}0864 \text{ m}^3$

2. El volumen obtenido en metros cúbicos se convierte a litros. Hay que recordar que $1 \text{ m}^3 = 1$ kl (kilolitro)

$18{,}0864 \text{ m}^3 = 18{,}0864$ kl

Para convertir los kilolitros a litros se multiplica por 1000 pues 1 kl = 1000 L.

$18{,}0864 \text{ kl} \cdot 1000 = 18\ 086{,}4$ L

La capacidad del tanque es 18 086,4 L.

¡Atención!

También es posible convertir $18{,}0864 \text{ m}^3$ a decímetros cúbicos multiplicando por 1000:

$18{,}0864 \text{ m}^3 \cdot 1000 = 18\ 086{,}4 \text{ dm}^3$

Y como $1 \text{ dm}^3 = 1$ L, $18\ 086{,}4 \text{ dm}^3 = 18\ 086{,}4$ L.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Contesta.

a. ¿Cuántas bases tiene un cilindro circular recto?

b. ¿Qué forma tiene cada base de un cilindro circular recto?

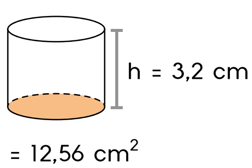
c. Si se traza una altura de un cilindro circular recto, ¿qué tipo de ángulo forma con la base?

d. ¿Las bases de un cilindro circular recto son paralelas o perpendiculares?

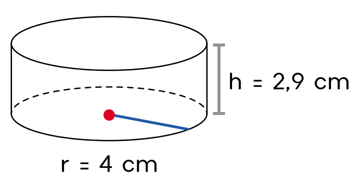
e. ¿La superficie lateral de un cilindro es plana o curva?

2. Calcula el volumen de cada cilindro.

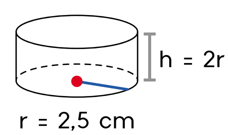
a.



b.



c.

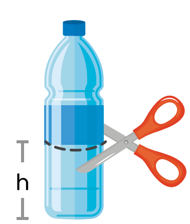


3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una piscina circular de 122 cm de diámetro y 25 cm de profundidad se llena en tres cuartas partes de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua contiene?

b. ¿Cuántas veces hay que utilizar un recipiente de 157 pulg^3 de volumen para llenar una olla cilíndrica de 5 pulg de radio y 6 pulg de altura?

c. Nadia debe alimentar a su gata con $78{,}5 \text{ cm}^3$ de concentrado. Desea hacer un recipiente para medir ese volumen con una botella cilíndrica de 2,5 cm de radio. ¿A qué altura de la base debe cortar la botella para obtener el recipiente adecuado?

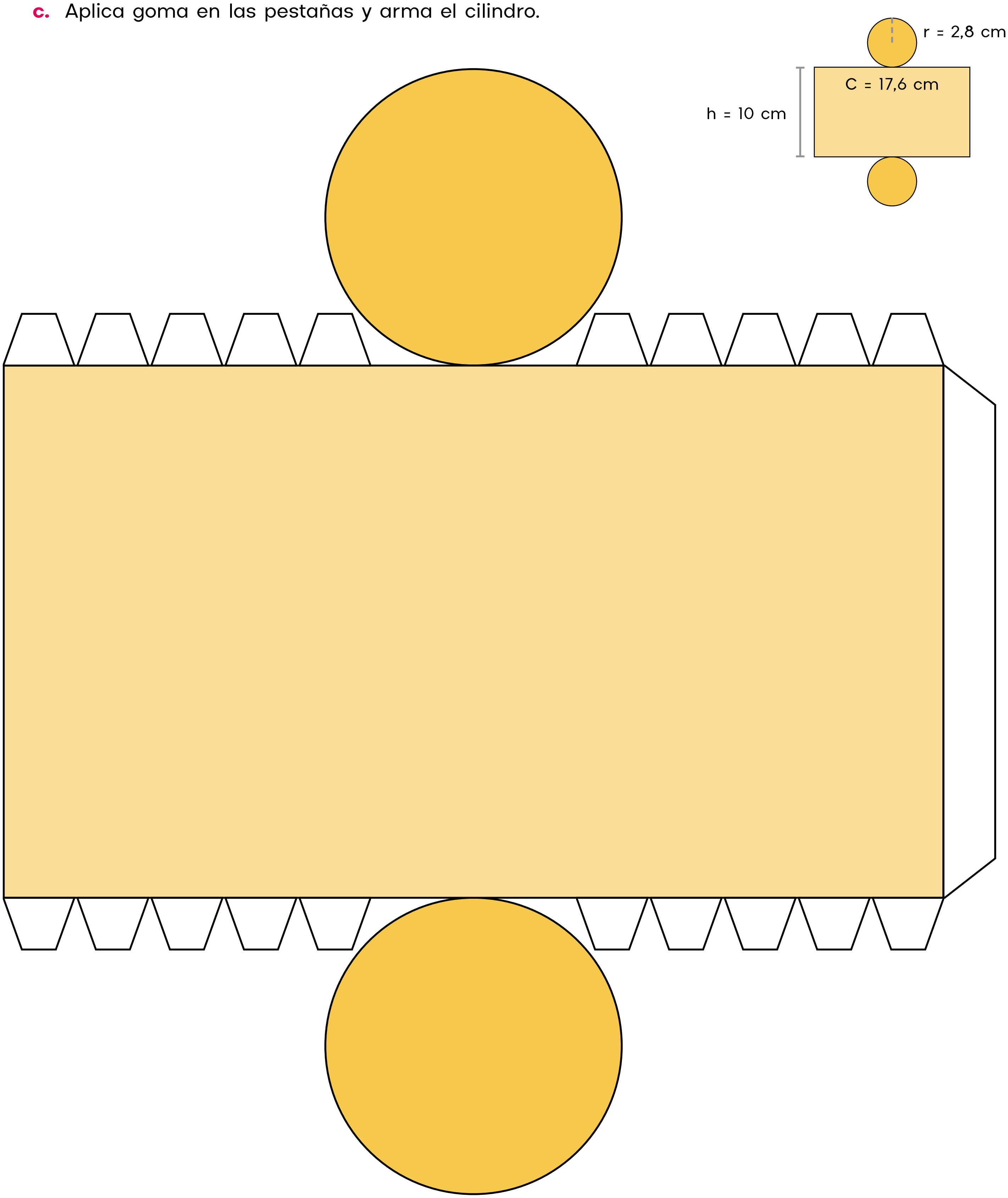


4. Sigue los pasos para construir un cilindro circular recto.

a. Calca o reproduce el desarrollo plano en cartulina. Si no tienes cartulina, usa papel blanco.

b. Recorta por las líneas externas y dobla.

c. Aplica goma en las pestañas y arma el cilindro.



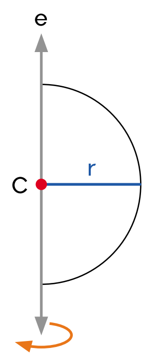


*Figura 1. Giro de la semicircunferencia alrededor de **e**.*

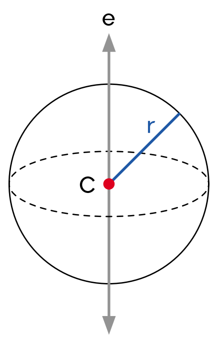


*Figura 2. Esfera de radio **r**.*

1.4 La esfera

Problema

La semicircunferencia de la figura 1 se gira alrededor del eje **e**.

1. ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene?
2. ¿A qué distancia del centro (C) se encuentra cualquier punto de la superficie del cuerpo que se forma?

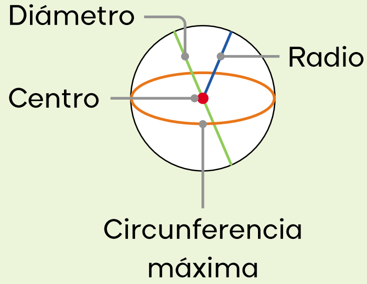
Solución

1. Se obtiene una esfera como la de la figura 2.
2. La distancia entre el centro y cualquier punto de la esfera es **r**.

Conclusión

La **esfera** es un cuerpo redondo en el que todos los puntos de su superficie curva están a igual distancia del centro.

- La distancia entre el centro y cualquier punto de la superficie de la esfera mide igual al radio.
- El diámetro mide el doble que el radio.
- La circunferencia máxima es la mayor que se puede trazar en la esfera. Su radio mide igual que el de la esfera.



El **volumen** (V) de una **esfera** de radio (r) se calcula con la siguiente fórmula:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Datos interesantes

El número π es la constante que relaciona la medida de una circunferencia con su diámetro. En agosto de 2021 se había calculado 62,8 billones de cifras decimales para este número irracional; para más exactitud, se trata de 62 831 853 071 796 cifras.

Observa cómo se hace

¿Cuál es el volumen de una esfera de 10 cm de radio?

Solución

Se calcula el volumen con la fórmula:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 = 4186{,}67$$

El volumen de la esfera es 4186,67 cm^3.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Contesta.

a. ¿La superficie de una esfera es plana o curva?

b. Si el radio de una esfera mide 12 cm, ¿cuál es la medida de su diámetro?

c. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia máxima de una esfera en la cual el radio mide 15 cm?

d. ¿Cuáles son dos ejemplos de objetos del entorno que tienen forma esférica?

2. Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno.

a. Dibuja la representación de dos esferas, una de 4,5 cm de radio y otra de 6 cm de diámetro.

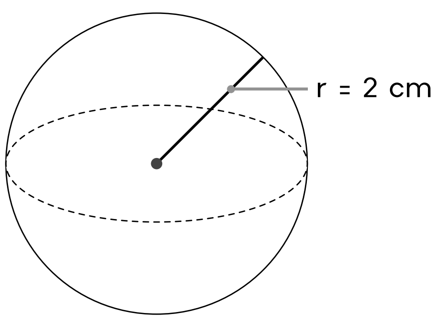
b. Traza un radio y un diámetro en la representación de cada esfera.

c. Píntalas de manera que parezca que son tridimensionales.

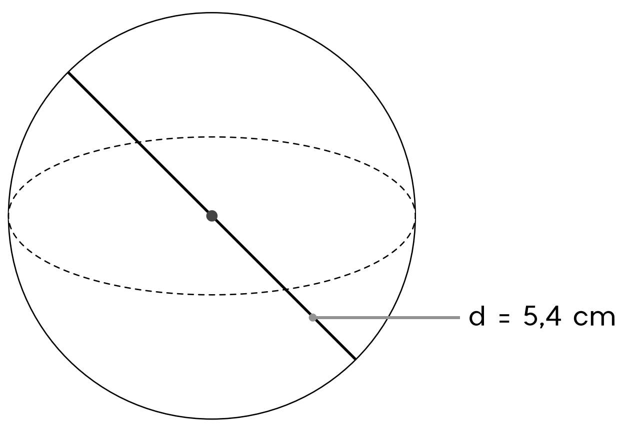
d. Anota la medida del radio y del diámetro en cada una.

3. Calcula el volumen de cada esfera.

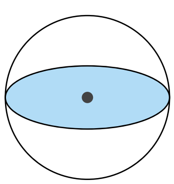
a.



c.

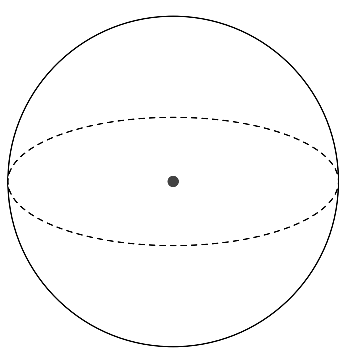


b.



Área de la circunferencia máxima: 3,80 cm^2

d.



Área total de la esfera: 60,79 cm^2

¡Atención!

En el ejercicio 3d considera que el área (A) de una esfera de radio (r) se calcula con la fórmula:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

4. Calcula lo que se solicita en cada caso.

a. El volumen de una semiesfera en la que el área de la sección plana es 28,26 cm^2.

b. El volumen de una esfera de 7 cm de diámetro.

c. El volumen de una esfera de 15 mm de radio.

d. El volumen de un cuarto de esfera de 33 mm de radio.

e. La medida del radio de una esfera de 4,19 cm^3 de volumen.

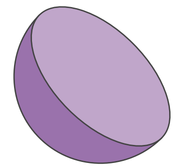
f. El volumen de una esfera de 201 cm^2 de área.

g. El área de la circunferencia máxima de una esfera de 735,25 mm^3 de volumen.

h. El área de una esfera de 2143,57 cm^3 de volumen.

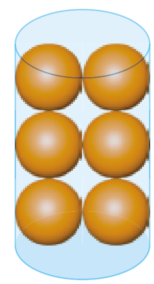
¡Atención!

En el ejercicio 4a toma en cuenta que una semiesfera es la mitad de una esfera.



5. Resuelve los siguientes problemas.

a. Se colocan seis esferas de metal de 2,5 cm de diámetro en un vaso cilíndrico de 5 cm de diámetro y 7,5 cm de altura, según se observa en la figura.

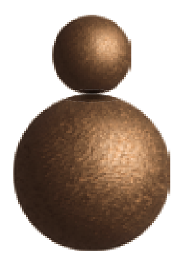


- ¿Cuál es el volumen de las seis esferas juntas?
- ¿Cuál es el volumen del espacio que no es ocupado por las esferas en el cilindro?

b. Cristina prepara un recipiente graduado de laboratorio con 10 cm^3 de agua. Sumerge una canica en el recipiente y el agua sube a 15,57 cm^3.

- ¿Cuál es el volumen de la canica? Ten en cuenta que el volumen desplazado en el recipiente corresponde al objeto sumergido.
- ¿Cuál es su radio?

c. Una escultura abstracta está formada por dos esferas de bronce colocadas una sobre la otra en forma vertical. La más grande, de 1 m de radio se ubica abajo y la más pequeña, que tiene la mitad del radio de la anterior, se posa arriba.



- ¿Cuál es el volumen de cada esfera?
- ¿Cuál es el volumen de la escultura completa?

6. Construye una esfera con materiales caseros o reutilizables. Realiza una estimación de su radio y calcula su volumen. Observa los ejemplos que se muestran a continuación.

Esfera hecha con envolturas de chocolates, esfera de plastilina y esfera hecha con papel recortado y pegamento.

1.5 El cono circular recto

Problema

Un cilindro circular recto posee un área de la base $A_b = 78{,}5\ cm^2$ y una altura $h = 10$ cm. Para un cono con igual base e igual altura que las del cilindro, se cumple que su volumen es un tercio del volumen del cilindro. ¿Cuál es el volumen del cono?

Solución

1. Se calcula el volumen del cilindro:

$$V_{cilindro} = A_b \cdot h = 78{,}5 \cdot 10 = 785\ cm^3$$

2. Se obtiene el volumen del cono multiplicando por $\frac{1}{3}$:

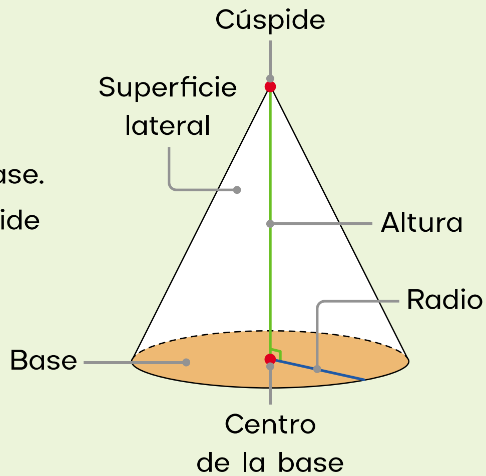
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot 785 = 261{,}67$$

El volumen del cono es $261{,}67\ cm^3$.

Conclusión

El **cono circular recto** es un cuerpo redondo que posee una superficie lateral curva, una base circular y un vértice llamado cúspide o ápice.

- La altura es perpendicular a la base.
- Si la altura del cono es **h**, la cúspide se encuentra a una distancia **h** de la base.



El **volumen** (V) de un cono circular recto con área de la base $\mathbf{A_b}$, radio **r** y altura **h** se calcula así:

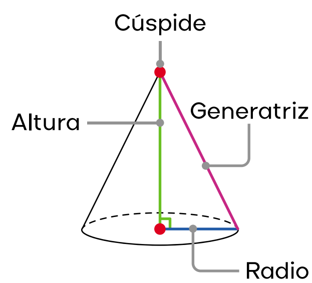
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Desarrollo sostenible

Una manera en la que puedes contribuir para mejorar la calidad de la educación es explicándoles a tus compañeros los temas que dominas y que ellos están en proceso de comprender. Comparte con ellos consejos para resolver los ejercicios y anímales mientras trabajan juntos.

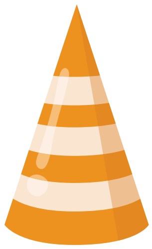
Datos interesantes

Otro elemento de un cono circular recto es la **generatriz**. Es una línea que tiene por extremos la cúspide y el punto donde un radio se une con la circunferencia de la base.



La generatriz, la altura y el radio forman un triángulo rectángulo.

Observa cómo se hace



¿Cuál es el volumen aproximado de un dispositivo de seguridad como el de la imagen si su radio es 15 cm y su altura 30 cm?

Solución

Se calcula el volumen del dispositivo aplicando la fórmula para un cono circular recto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 30 = 7065$$

$$V = 7065 \text{ cm}^3$$

El volumen del dispositivo de seguridad cónico es 7065 cm^3.

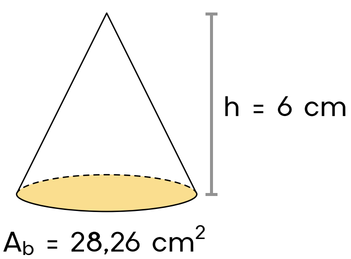
Práctica

Trabaja en tu cuaderno

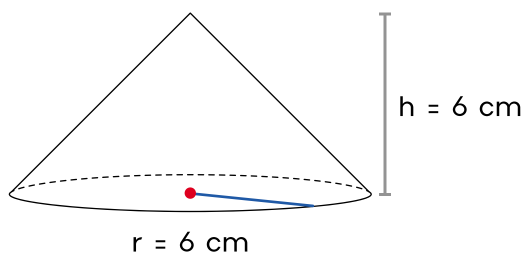
1. Contesta.
   a. ¿Cuántas bases tiene un cono circular recto?
   b. ¿Qué forma tiene la base de un cono recto?
   c. Si se traza una altura de un cono circular recto, ¿qué tipo de ángulo forma con la base?
   d. ¿La superficie lateral de un cono es plana o curva?
   e. Para un cono recto de altura **h**, ¿a qué distancia de la base se encuentra la cúspide?

2. Calcula el volumen de cada cono.

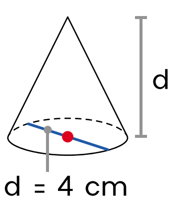
a.



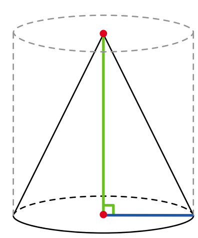
c.



b.



d.



El cono está inscrito en el cilindro.

Volumen del cilindro: 301,44 cm^3

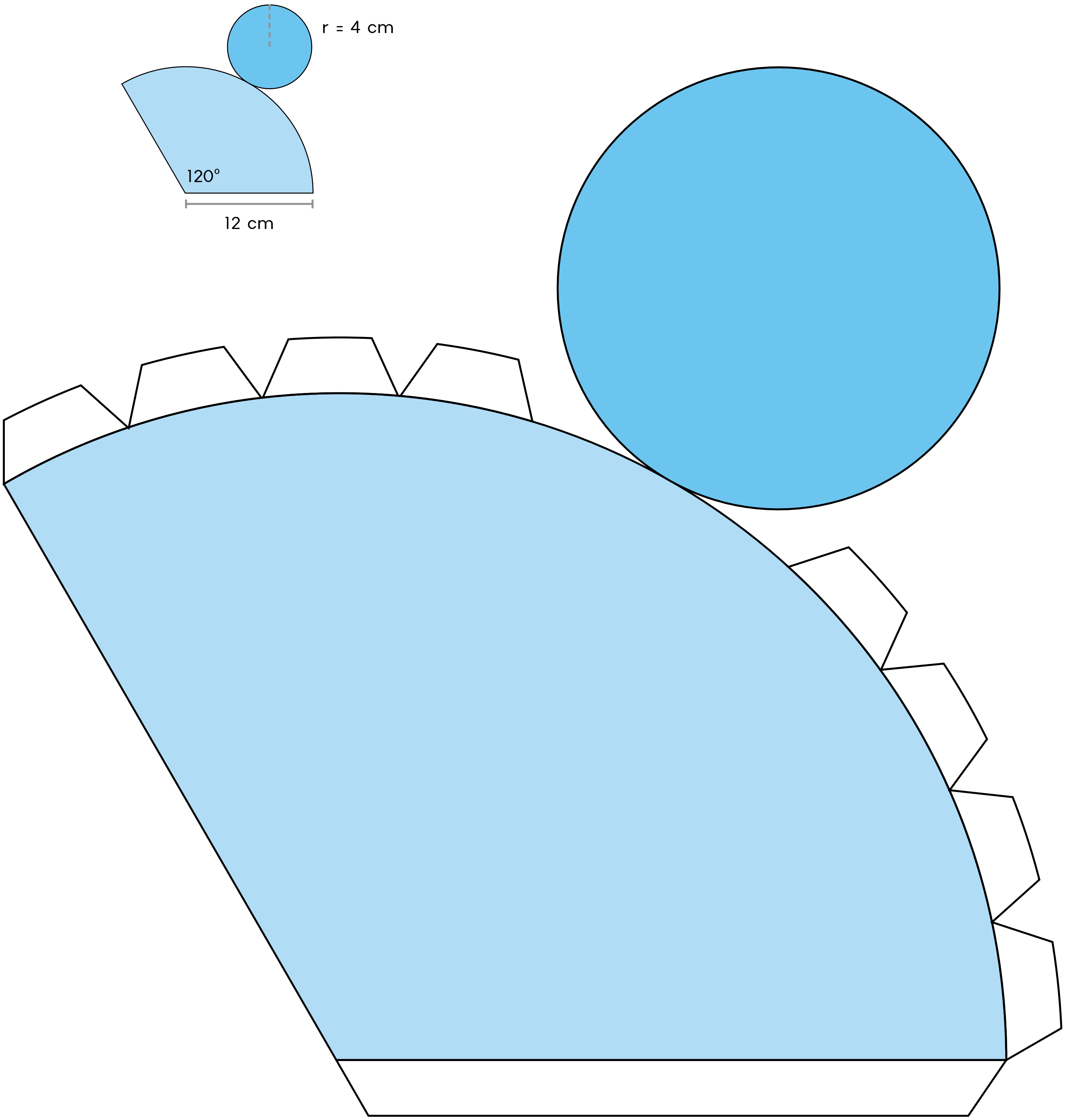
3. Resuelve los siguientes problemas.
   a. Un vaso de papel cónico se llenó hasta la mitad con agua. Si el radio de la base es 3 cm y la altura mide 8 cm, ¿cuál es el volumen de agua que contiene el vaso?
   b. Un camión puede transportar un volumen máximo de 100 yd^3 de arena para construcción. Si se desea cargar el camión con la arena de un montículo cónico de 7 yd de radio y 2 yd de altura, ¿es posible cargar todo el material?, ¿cuánto espacio queda libre? o ¿cuánta arena no se puede cargar?

4. Sigue los pasos para construir un cilindro circular recto.

a. Calca o reproduce el desarrollo plano en cartulina. Si no tienes cartulina, usa papel blanco.

b. Recorta por las líneas externas y dobla.

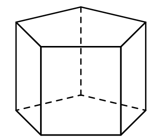
c. Aplica goma en las pestañas y arma el cono.



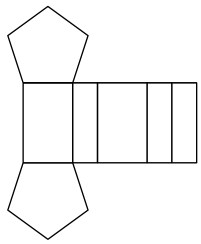
1.6 El prisma recto

Problema

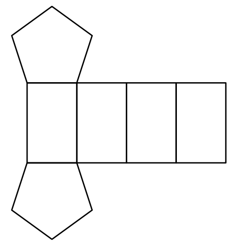
Observa el prisma de la derecha. ¿Cuál de los desarrollos planos de abajo es el correcto para un prisma como ese? Justifica tu respuesta.



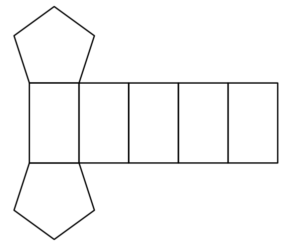
1.



2.



3.



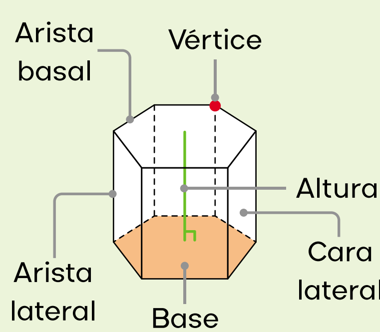
Solución

- El desarrollo plano correcto es el número 3. La cantidad de lados de la base y la cantidad de caras laterales representadas corresponden a un prisma pentagonal (cinco en cada caso). El ancho de los rectángulos coincide con el lado del pentágono.
- El desarrollo 1 no es correcto porque tres de los rectángulos que representan las caras laterales no tienen el ancho adecuado.
- El desarrollo 2 no es correcto, ya que solo presenta cuatro rectángulos para las caras laterales y deben ser cinco.

Conclusión

El **prisma recto** es un poliedro que tiene caras laterales rectangulares o cuadradas y posee dos caras poligonales llamadas bases.

- La altura es perpendicular a las bases.
- Sus bases son congruentes y paralelas.
- Sus bases pueden ser polígonos regulares o irregulares.



Recuerda

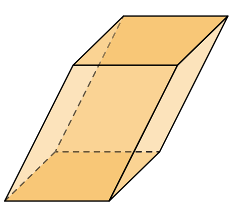
Nombre de algunos polígonos según el número de lados:

N.° de lados	Nombre
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono

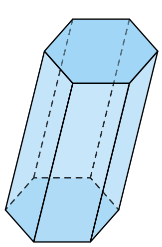
¿Qué pasaría?

Un prisma que no es recto se denomina **oblicuo**. Por ejemplo:

Prisma cuadrangular



Prisma hexagonal



El **volumen** (V) de un **prisma recto** se calcula multiplicando el área de una base (A_b) por la altura (h):

$$V = A_b \cdot h$$

Como la base puede ser cualquier polígono entonces para encontrar $\mathbf{A_b}$ se debe aplicar la fórmula que corresponda en cada caso.

Observa cómo se hace

¿Cuál es el volumen que puede contener una caja de cartón como la de la imagen?

Solución

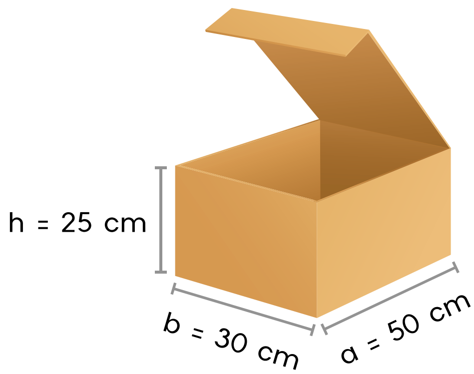
1. Como la base es rectangular su área es igual al producto del largo (a) por el ancho (b):

   $A_b = a \cdot b = 50 \cdot 30 = 1500$

2. Se calcula el volumen con la fórmula:

   $V = A_b \cdot h = 1500 \cdot 25 = 37\,500$

   El volumen que puede contener la caja es 37 500 cm^3.



Recuerda

Fórmulas de área (A) de algunos polígonos

- Área de un polígono regular de perímetro **P** y apotema $\mathbf{a_p}$:
  $$A = \frac{P \cdot a_p}{2}$$
- Área de un triángulo de base **b** y altura **h**:
  $$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
- Área de un cuadrado de lado **a**:
  $$A = a^2$$

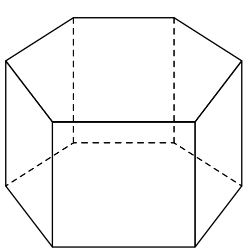
Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Contesta.
   - **a.** ¿Cuántas bases tiene un prisma recto?
   - **b.** ¿Cuántas aristas posee un prisma de base rectangular?
   - **c.** ¿Cuántos vértices hay en un prisma triangular?

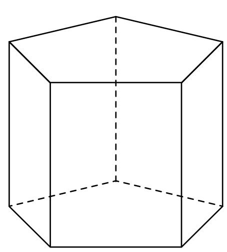
2. Calcula el volumen de cada prisma de base regular.

a.



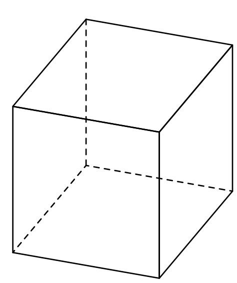
Perímetro de la base: 30 cm
Apotema: 4,33 cm
Altura: 9 cm

b.



Arista de la base: 7 cm
Apotema: 4,82 cm
Altura: 9 cm

c.



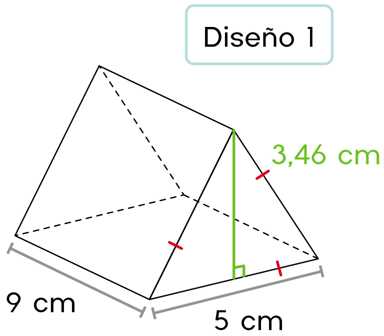
Arista: 8 cm

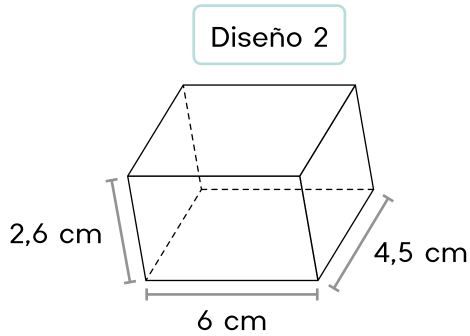
¡Atención!

- El término "base regular" significa que el polígono de la base es regular.
- Un cubo es un prisma en el que todas sus aristas son congruentes.

3. Resuelve el siguiente problema.

a. Se presentan dos diseños para una caja de chocolates como en las imágenes de abajo. Si se desea escoger el de mayor volumen, ¿cuál es el adecuado?



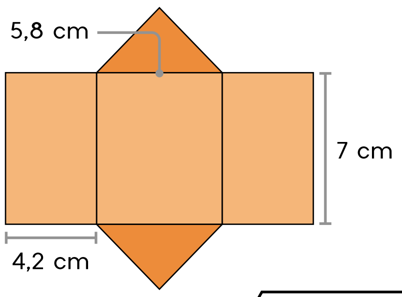


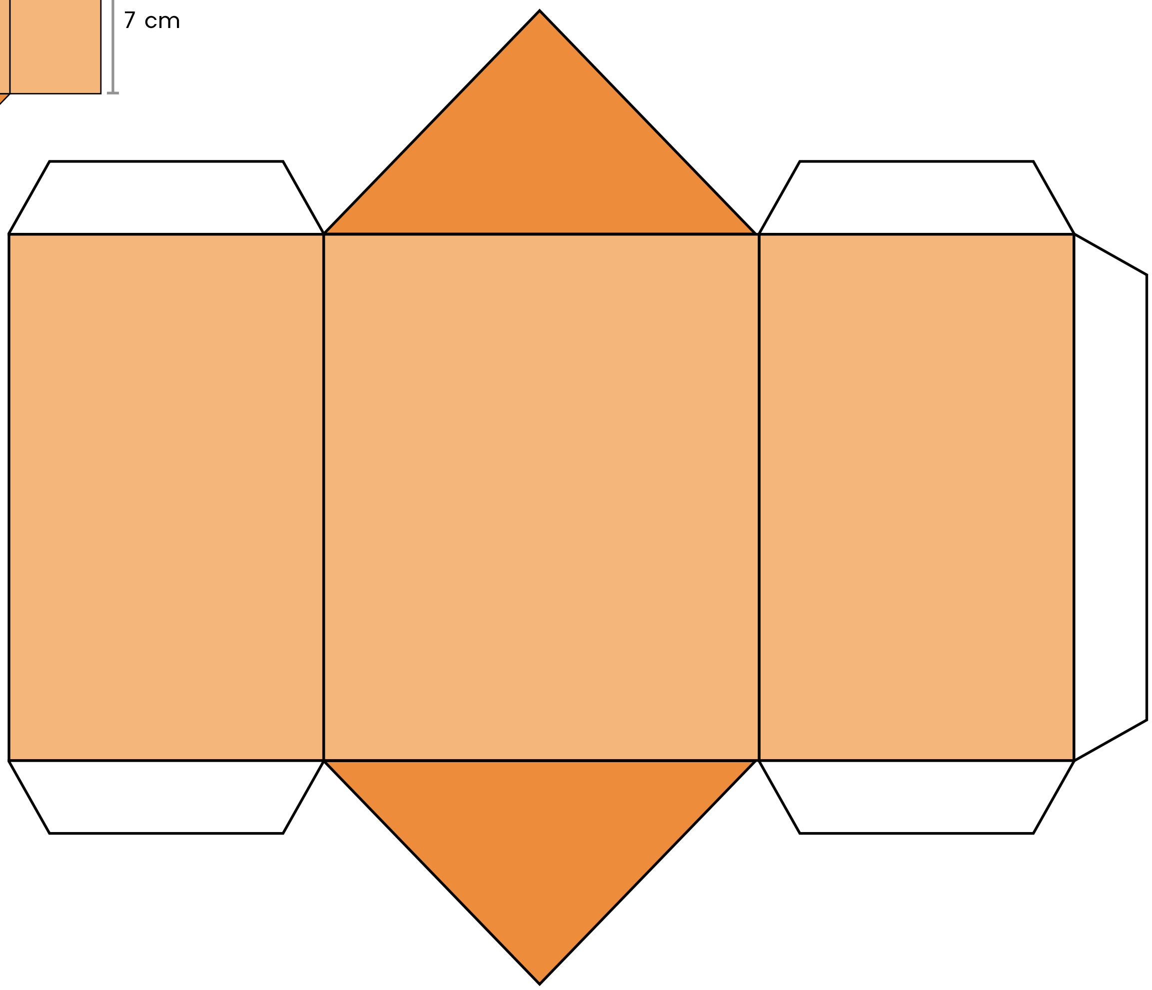
4. Sigue los pasos para construir un prisma recto.

a. Calca o reproduce el desarrollo plano en cartulina. Si no tienes cartulina, usa papel blanco.

b. Recorta por las líneas externas y dobla.

c. Aplica goma en las pestañas y arma el prisma.

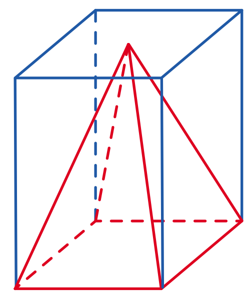




1.7 La pirámide recta

Problema

Un prisma cuadrangular recto posee un área de la base A_b = 16 cm^2 y una altura h = 6 cm. Para una pirámide recta con igual base e igual altura que las del prisma, se cumple que su volumen es un tercio del volumen del prisma. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?



Pirámide inscrita en un prisma. Su base y altura coinciden.

Solución

1. Se calcula el volumen del prisma:

   $V_{prisma} = A_b \cdot h = 16 \cdot 6 = 96\ cm^3$

2. Se obtiene el volumen de la pirámide multiplicando por $\frac{1}{3}$:

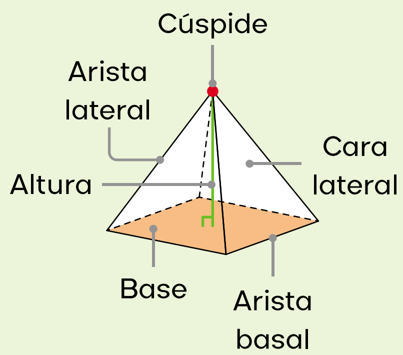
   $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot 96 = 32$

El volumen de la pirámide es 32 cm^3.

Conclusión

La **pirámide recta** es un poliedro que tiene caras laterales triangulares y posee una cara poligonal llamada base.

- La altura es perpendicular a la base.
- Si la altura de la pirámide es **h**, a cúspide se encuentra a una distancia **h** de la base.



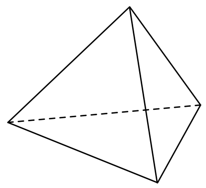
El **volumen** (V) de una **pirámide** recta es igual a la tercera parte del producto del área de la base (A_b) por la altura (h). La fórmula es la siguiente:

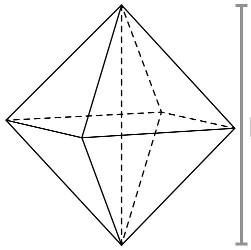
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Como la base puede ser cualquier polígono entonces para encontrar $\mathbf{A_b}$ se debe aplicar la fórmula que corresponda en cada caso.

Datos interesantes

El **tetraedro regular** es un tipo de pirámide que forma parte de los cinco poliedros regulares que existen. En este tipo de cuerpos todas las aristas son congruentes.





Un octaedro regular posee ocho caras que son triángulos equiláteros congruentes.

Observa cómo se hace

El octaedro regular de la izquierda está formado por dos pirámides rectas de base cuadrada que comparten la base. Todas sus aristas miden 10 cm y la altura H mide 14,14 cm. ¿Cuál es el volumen del octaedro?

Solución

1. H mide el doble de la altura (h) de cada pirámide, entonces $h = 14{,}14 \div 2 = 7{,}07$.
2. El área de la base cuadrada de cada pirámide es $A_b = 10^2 = 100$.
3. Se calcula el volumen de una pirámide:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 7{,}07 = 235{,}67$$

4. Para obtener el volumen del octaedro se multiplica el volumen de una pirámide por 2: $235{,}67 \cdot 2 = 471{,}34$

El volumen del octaedro regular es $471{,}34\ cm^3$.

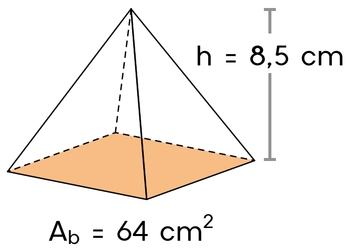
Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

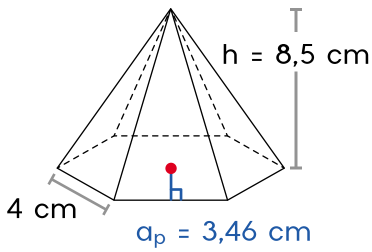
1. Contesta.
   a. ¿Cuántas bases tiene una pirámide recta?
   b. ¿Qué forma posee la base de una pirámide de ocho caras laterales?
   c. ¿Cuántos vértices tiene una pirámide cuadrangular?
   d. ¿Cuántas caras laterales hay en una pirámide heptagonal?
   e. ¿Cuántas aristas basales tiene una pirámide de seis caras laterales?

2. Calcula el volumen de cada pirámide de base regular.

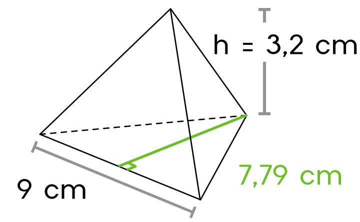
a.



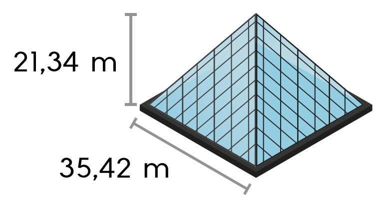
b.



c.



3. Resuelve los siguientes problemas.



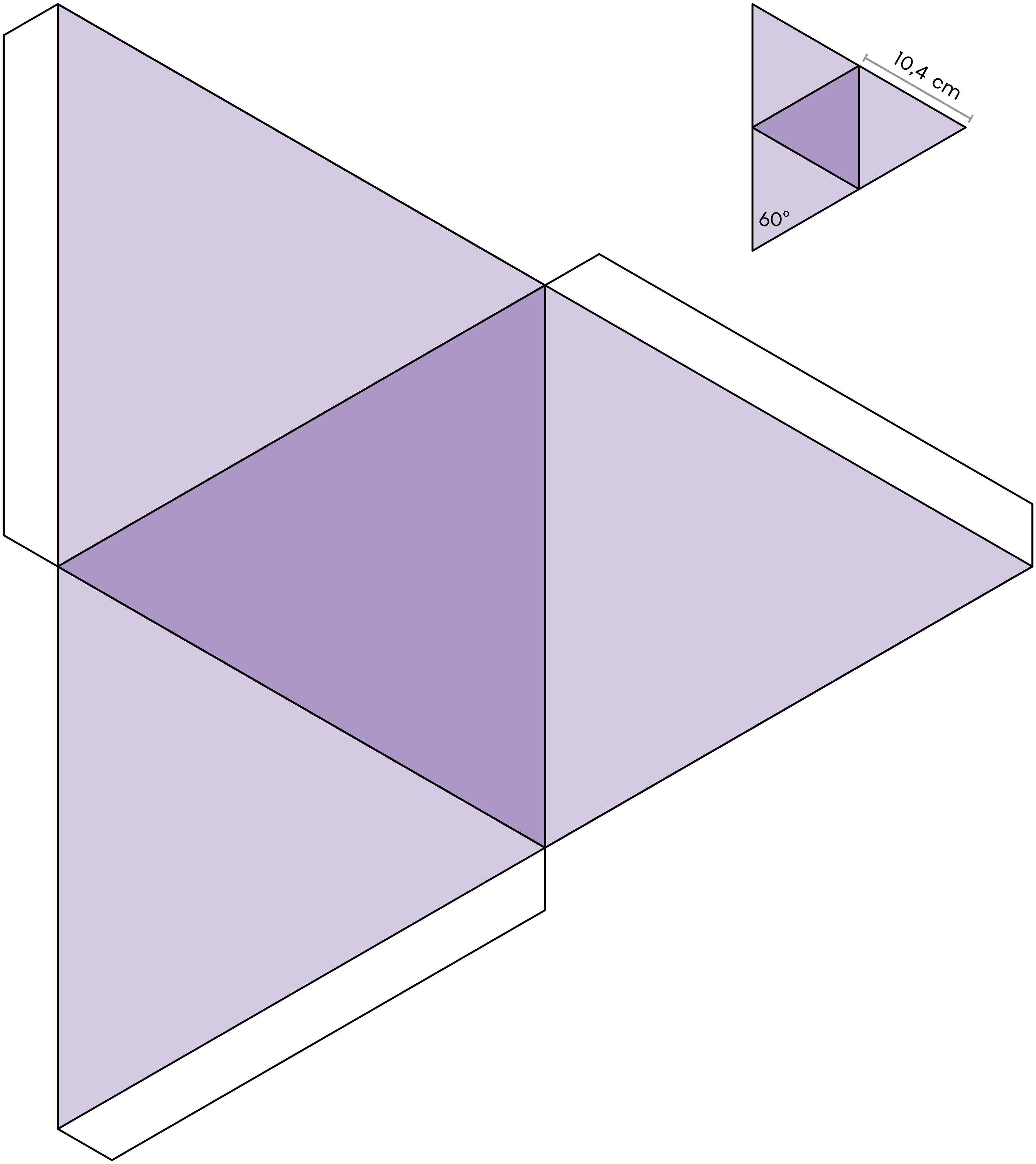
   a. La pirámide principal del museo de Louvre en París posee una base cuadrada y tiene las dimensiones que se muestran en la imagen. ¿Cuál es su volumen?
   b. Una botella de perfume tiene forma de pirámide recta de base pentagonal regular. La arista basal mide 2 cm, la apotema de la base, 1,38 cm y la altura, 7 cm. Si la cantidad de perfume ocupa las tres cuartas partes del volumen de la botella, ¿cuántos mililitros de perfume contiene la botella?
   c. Hannia elabora velas aromáticas. Las hace con forma de pirámide recta de base cuadrada. La arista basal mide 4 cm y la altura de la vela es 7 cm. ¿Cuántas velas puede elaborar con $200\ cm^3$ de cera?

4. Sigue los pasos para construir una pirámide recta.

a. Calca o reproduce el desarrollo plano en cartulina. Si no tienes cartulina, usa papel blanco.

b. Recorta por las líneas externas y dobla.

c. Aplica goma en las pestañas y arma la pirámide.

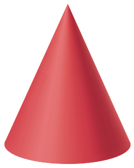


1.8 Practico lo aprendido

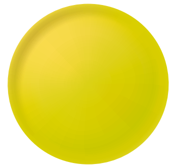
Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe dos características de cada cuerpo geométrico.

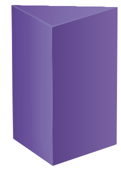
a. Cono



c. Esfera

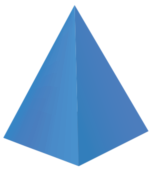


e. Prisma



b. Cilindro

d. Pirámide

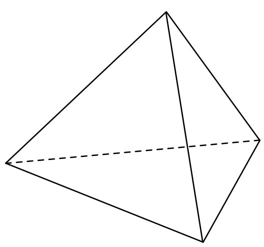


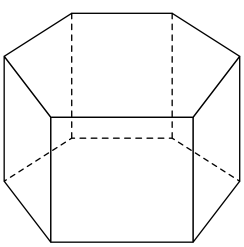
2. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala con semejanzas y diferencias entre los cuerpos geométricos indicados.

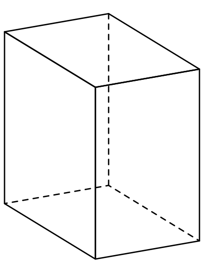
Semejanzas y diferencias entre cuerpos geométricos		
Cuerpos	**Semejanzas**	**Diferencias**
Prisma y pirámide		
Cono y cilindro		
Esfera y cubo		

3. Calca estos poliedros en tu cuaderno y marca...

a. Una arista basal.
b. Un vértice.
c. La altura.
d. Una arista lateral.

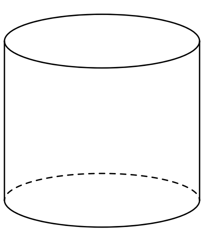


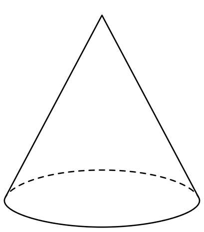




4. Calca estos cuerpos redondos en tu cuaderno y marca...

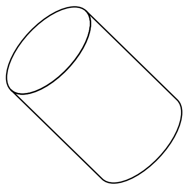
a. Un radio de la base.
b. La altura.





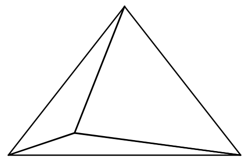
5. Calcula el volumen de cada cuerpo geométrico. En los poliedros la base es regular.

a.



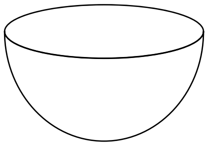
$r = 0,5$ cm
$h = 2,5r$

d.



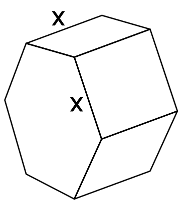
$A_b = 12$ cm^2
$h = 6$ cm

g.



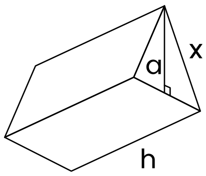
$d = 3,5$ cm

b.



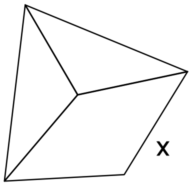
$x = 0,5$ cm
$a_p = 4,33$ cm

e.



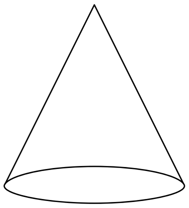
$x = 6$ cm
$h = 11$ cm
$a = 5,20$ cm

h.



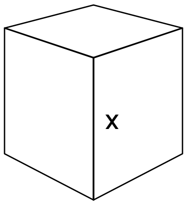
$x = 2$ cm
$h = 5,4$ cm

c.



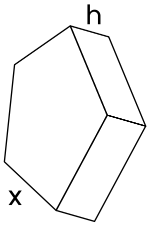
$d = 0,12$ cm
$h = 1,3$ cm

f.



$x = 12,1$ cm

i.



$x = 5$ cm
$h = 1$ cm
$a_p = 3,44$ cm

6. Resuelve los siguientes problemas.

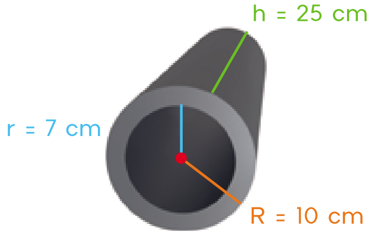
a. Las cuatro patas de una mesa son prismas rectos de base pentagonal regular. Cada una tiene una arista basal de 4 cm, apotema de la base de 3,46 cm y 80 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de las cuatro patas juntas?

b. Se inscribe un cilindro circular recto de 14 cm de radio y 27 cm de altura en un prisma recto de base cuadrada. El diámetro del cilindro mide igual que el lado de la base del prisma y además, ambos tienen la misma altura. ¿En qué cantidad es mayor el volumen del prisma al del cilindro?

c. ¿Cuál es el volumen de metal con el que está fabricado el tubo cilíndrico de la imagen?

d. Si se tienen 75 000 cm^3 de metal para fabricar tubos como los de la imagen, ¿cuántos se pueden fabricar?

e. Un vaso cónico recto de 8 cm de diámetro y 12 cm de altura está lleno de agua hasta el borde. Si se sumergen dos canicas iguales se derraman 28,26 cm^3 de líquido. ¿Cuál es el volumen de agua que queda en el vaso? ¿Cuánto mide el radio de cada canica?



Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Caracterizo según los elementos los diferentes cuerpos geométricos.			
2. Construyo cuerpos geométricos a partir de modelos.			
3. Determino por medio de la fórmula el volumen de los cuerpos geométricos.			
4. Calculo el volumen de diferentes cuerpos geométricos del entorno.			
5. Resuelvo con confianza problemas de volumen de cuerpos geométricos.			
6. Planteo y resuelvo situaciones del entorno que involucren el cálculo del volumen de cuerpos geométricos.			

Unidad 6

La estadística en la investigación

Alguna vez te has preguntado, ¿dónde y cuándo nació la estadística?

Pues, en el año 3800 a. C., en Babilonia ya se recopilaban datos sobre impuestos en tablillas de arcilla. En Egipto, hacia en 3500 a. C., se hacían censos de población.

Y en la actualidad, ¿cuál es la importancia de esta disciplina?

En las últimas décadas, la demanda de conocimientos estadísticos para la toma de decisiones está en constante aumento. Por ejemplo, el estudio del mercado, el comportamiento del virus SARSCoV-2 en la pandemia, el seguimiento de los estudiantes en los colegios oficiales o particulares, entre otros.

El Estado debe promover la investigación porque permite la toma de las decisiones más acertadas, las mismas deben beneficiar a todos los ciudadanos. Además, se fomenta el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

Para realizar proyectos de investigación a través de la estadística se necesita de una serie de etapas y herramientas que se abordarán en esta unidad.

En esta unidad aprenderás a...

- Explicar los conceptos básicos de estadística.
- Identificar los conceptos de estadística en situaciones contextualizadas.
- Caracterizar un proyecto de investigación a través de la estadística.
- Presentar según una secuencia lógica las etapas de un proyecto de investigación.
- Recopilar, procesar, analizar e interpretar datos estadísticos.
- Desarrollar un proyecto de investigación cumpliendo los pasos.

Aplicación de la estadística en la investigación

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Anota el concepto que corresponde a cada definición.
   - a. Tipo de dato estadístico que corresponde a un número, por ejemplo, edad y estatura.
   - b. Representación de la información estadística que presenta, mediante un arreglo de filas y columnas, la cantidad de veces que una variable toma un cierto valor.
   - c. Número de veces que se repite un dato estadístico.
   - d. Representación que muestra la información con un círculo dividido en sectores.
   - e. Representación cuyos elementos principales son puntos que se unen con segmentos.
   - f. Medida estadística que se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado por la cantidad de datos.
   - g. Medida estadística que corresponde al dato de mayor frecuencia.
   - h. Medida estadística que se ubica en el “centro” de un grupo de datos numéricos ordenados.

2. Contesta con base en la tabla de frecuencias con datos agrupados.

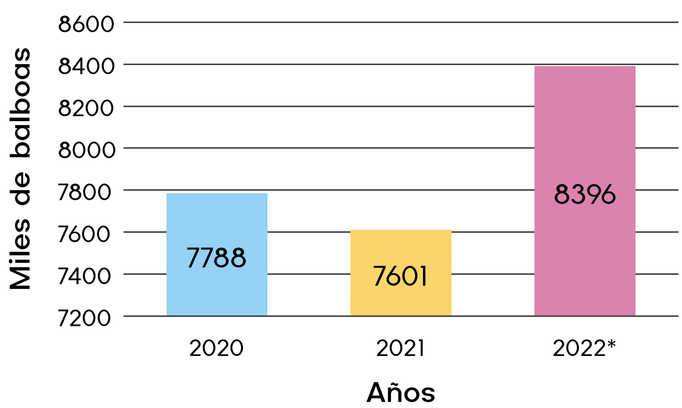
Distribución de 100 pacientes de un consultorio médico según peso en kilogramos

Peso	Frecuencia
[45,5, 55,5)	12
[55,5, 65,5)	27
[65,5, 75,5)	20
[85,5, 95,5]	46
Total	105

   - a. ¿Cuál elemento de la tabla muestra un dato erróneo? ¿Cuál es el valor correcto?
   - b. ¿Qué porcentaje representan los pacientes con un peso entre 65,5 kg y 75,5 kg?
   - c. ¿Cuál es la moda de los datos?
   - d. ¿Cuál es la amplitud o tamaño de cada clase?

3. Construye en tu cuaderno la tabla de frecuencias que corresponde con la siguiente gráfica.

Exportación de pescado y filete de pescado de la República: Enero-febrero, 2020-2022



*Cifras preliminares
Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Censo (INEC)
Tomado de www.inec.gob.pa

4. Observa la tabla y sigue los pasos para elaborar una distribución de frecuencias para datos agrupados en clases.

- Calificación de 18 estudiantes en la prueba de Matemática

2,0	2,5	2,7	3,0	3,0	3,3	3,5	3,5	3,5
3,6	3,8	4,0	4,0	4,5	4,6	4,9	5,0	5,0

a. Calcula el rango de los datos. Resta el dato menor del mayor.

b. Halla la amplitud de cada clase si se definen cuatro clases, para ello, divide el rango entre 4.

c. Establece los límites de las clases.

- El límite inferior de la primera clase es el dato menor.
- Súmale al dato menor la amplitud calculada en el literal **b** de esta actividad, para conseguir el límite superior de la primera clase.
- El dato obtenido en el punto anterior es el límite inferior de la segunda clase.
- Suma la amplitud nuevamente para definir el límite superior de la segunda clase.
- Procede de igual manera para definir los demás límites.
- Anotas las cuatro clases con los límites calculados.

d. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y escribe las clases.

Distribución de los estudiantes de un grupo de 9.° grado según calificación obtenida

Clase	Frecuencia	Porcentaje
Total		

e. Realiza el conteo de los datos y completa la columna **Frecuencia**.

f. Haz los cálculos correspondientes para la columna **Porcentaje**.

5. Construye, en tu cuaderno, un histograma a partir de la distribución de frecuencias anterior. Sigue los pasos indicados.

a. Escribe el título del histograma: **Distribución de los estudiantes**...

b. Dibuja los ejes de la gráfica.

- En el eje horizontal traza cinco rayitas igualmente espaciadas que indiquen los límites de clase. Anota los límites de clase debajo de las rayitas.
- En el eje vertical dibuja al menos siete rayitas igualmente espaciadas para las frecuencias (de 1 hasta 7). Escribe los números al lado izquierdo de las rayitas. (Continúa leyendo en la página siguiente.)

Recuerda

Cada clase, excepto la última, se escribe así: **[a, b)**. El paréntesis cuadrado significa que los datos mayores o iguales a **a** están en la clase. El paréntesis redondo indica que los datos estrictamente menores que **b** están en la clase.

Solo la última clase comprende ambos límites. Por ello se escribe como **[a, b]**.

¡Atención!

En el ejercicio **4e**, se cuentan los datos o calificaciones que corresponden a cada clase o intervalo.

En el ejercicio **4f**, en cada clase o intervalo se divide la frecuencia respectiva entre el total de datos y multiplica por 100. Redondea a la centésima.

c. Dibuja la primera barra de manera que su ancho vaya del primer límite de clase al segundo. Su altura debe coincidir con la frecuencia de la primera clase en la distribución de la actividad 4.

d. Traza las otras barras con el mismo ancho, sin separación entre ellas. Establece las alturas de acuerdo con cada frecuencia.

e. Añade los títulos de los ejes: **Calificación** y **Frecuencia**.

f. Colorea las barras del histograma.

6. Resuelve estas actividades.

a. Completa, en tu cuaderno, la distribución de frecuencias correspondiente a los datos de la izquierda.

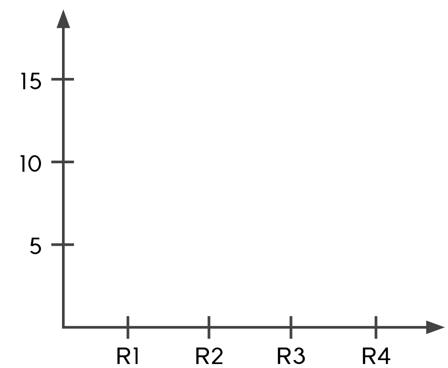
Distribución de 35 trabajadores de la empresa Saludable que se ejercitaron según cada receso de actividad física de hoy						
R1	R1	R1	R1	R1	R2	R2
R2	R2	R2	R2	R2	R2	R2
R2	R3	R3	R3	R3	R3	R3
R3	R3	R3	R3	R3	R3	R3
R3	R3	R4	R4	R4	R4	R4

→

Receso	**Frecuencia**
R1	
R2	
R3	
R4	
Total	

b. Elabora, en tu cuaderno, una gráfica lineal para los datos.

- Traza los ejes y sus valores tal como se muestra a la derecha.
- Dibuja un punto sobre R1 a una altura que corresponda con su frecuencia.
- Dibuja un punto para R2, R3 y R4, cada uno asociado con su frecuencia.
- Une cada par de puntos mediante una línea.
- Añade los títulos de los ejes y el título principal para la gráfica.



7. Identifica en cada caso la población y la muestra.

a. Para conocer cuál es el sistema de pago preferido por los clientes frecuentes en el supermecado La Flor, se entrevistó a 50 personas de entre todos los clientes frecuentes.

b. Se desea saber cuál es el equipo de fútbol con mayor afición en el país. Para averiguarlo se consultó a 1300 personas mayores de edad.

8. Anota, para cada uno de los estudios anteriores, cuál es la variable.

9. Clasifica las siguientes variables como cuantitativas o cualitativas.

a. Talla de los bebés nacidos en el hospital de Chiriquí Grande.

b. Color de las camisas vendidas en una tienda.

c. Marcas de automóviles que circulan en la ciudad de Panamá.

d. Volumen de agua consumida mensualmente por las familias de una barriada.

1.2 Conceptos de estadística

Problema

Un equipo de investigadores estudió la opinión de los panameños mayores de 10 años sobre el cambio climático. Como era muy difícil entrevistar a todas esas personas, se aplicó una encuesta solo a 1500 habitantes que fueron seleccionados cuidadosamente para que representaran en forma confiable a toda la población. Fueron clasificados de acuerdo con las siguientes variables: edad, condición socioeconómica, región y nivel académico.

Se les consultó si habían escuchado sobre el cambio climático y cuál es el nivel de urgencia con que debe atenderse la situación.

Uno de los resultados indica que entre los menores de edad está el mayor porcentaje de quienes creen que el cambio climático es una emergencia que debe ser atendida con prontitud. También, llamó la atención que más de la mitad de los adultos mayores de 60 años opina igual que los menores de edad.

Responde las preguntas.

1. En la estadística, ¿qué nombre recibe el grupo de personas que fue entrevistado?
2. ¿Por qué razón los entrevistados debían representar en forma confiable a toda la población?
    - ¿Qué hubiera pasado si el criterio hubiera sido entrevistar a 1500 personas de 30 años residentes en la ciudad de Panamá?
3. ¿En cuál de las siguientes categorías: cuantitativa o cualitativa, clasificarías los valores de las variables mencionadas?
4. ¿Por qué se separaron por rango de edad los resultados indicados en el texto?

Desarrollo sostenible

¿Sabías que Panamá es uno de los tres países "carbono negativos" del mundo? Significa que en su territorio se absorben más gases de efecto invernadero de los que se emiten. Sin embargo, cada año aumentan las emisiones y crece la deforestación lo cual agrava el cambio climático.

Recuerda

La palabra **cuantitativa** se relaciona con cantidad. **Cualitativa** hace referencia a una cualidad no numérica.

Solución

1. En estadística este grupo recibe el nombre de muestra.
2. Porque esas 1500 personas debían ser tan variadas como lo es la población panameña mayor de 10 años. De esa manera, los resultados reflejan mejor la opinión de los habitantes. Si entrevistan solo a los de 30 años residentes en Panamá, los datos obtenidos no serían confiables, ya que no responderían a la variedad de características de la población.
3. Edad: cuantitativa. Condición socioeconómica: cualitativa. Región: cualitativa. Nivel académico: cualitativa.
4. Probablemente, al analizar los datos, se detectaron diferencias de opinión significativas entre los distintos grupos de edad y resultó importante dar a conocer esas diferencias.

Conclusión

La **estadística** es la disciplina que se encarga de recopilar y ordenar datos referidos a diversos temas y fenómenos. También brinda los medios para analizar e interpretar los datos.

Conviene recordar algunos conceptos de estadística para aplicarlos en los nuevos aprendizajes que se adquirirán en la unidad:

- **Población**: Conjunto completo de los individuos, objetos, fenómenos, etc., sobre los que la investigación estadística quiere producir un conocimiento.
- **Muestra**: Porción representativa de la población que se extrae para ser estudiada.
- **Variable**: Característica de los componentes de la población. Es **cuantitativa**, si los valores que toma son numéricos; o **cualitativa**, si los valores NO son numéricos. Las variables cuantitativas son **discretas** si corresponden solo a números enteros o **continuas** si toman valores reales.
- **Frecuencia**: Número de veces que aparece cada valor de una variable en un estudio.
- **Herramientas de recopilación de datos**: Observación, entrevista, encuesta, censo, medición y experimento.

Recuerda

Un ejemplo de variable discreta es "el número de visitas al médico". Toma valores como 0, 1, 2, etc.

Por otra parte, una variable continua puede ser "el peso en kilogramos" y presenta valores como 67,5 o 79,61.

Observa cómo se hace

Identifica los conceptos de estadística que están presentes en la siguiente situación.

Un equipo de publicidad debe formular una campaña para promocionar una marca de consolas de videojuegos que vende una cadena de tiendas. Necesita averiguar cuál es el rango de edad de los clientes que prefieren con mayor frecuencia dicha consola de entre otras que están en el mercado.

Se selecciona, de entre los 700 clientes que han comprado una consola el año anterior, a 100 para consultarles vía telefónica.

Solución

- **Población**: Los 700 clientes de las tiendas que han comprado una consola el año anterior.
- **Muestra**: Los 100 clientes que son consultados.
- **Variables**: La edad de los clientes y la marca de consola que prefieren. La edad es una variable cuantitativa discreta y la marca de consola es cualitativa.
- **Frecuencia**: El número asociado a las diferentes edades de los clientes y el número de veces que se menciona cada marca de consola.
- **Herramienta de recopilación de datos**: Una encuesta.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Busquen periódicos y seleccionen encuestas o estudios que presenten datos estadísticos.
   b. Peguen los recortes de los estudios encontrados en hojas blancas y anoten los conceptos de estadística que reconozcan en ellos.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica en cada caso la población y la muestra.
   a. Para conocer el candidato presidencial preferido de los votantes se hizo una encuesta en la que se consultó a 950 personas con derecho al sufragio.
   b. Se aplicó una prueba diagnóstica a los 178 estudiantes de 9.° grado de un colegio.

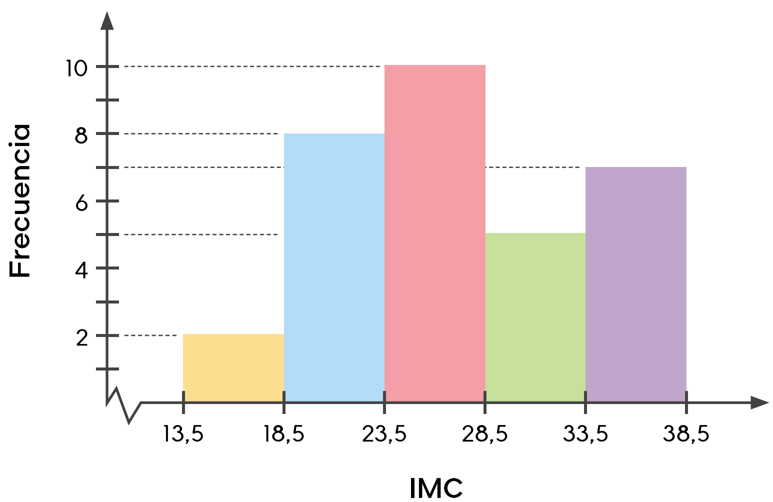
2. Anota, para cada uno de los estudios anteriores, cuál es la variable.

3. Clasifica las siguientes variables como cuantitativas o cualitativas.
   a. Marcas de bicicletas disponibles en una tienda.
   b. Estatura de las jugadoras equipo de *softball* femenino de 9.° grado.
   c. Razas de ganado vacuno más comunes en la provincia de Chiriquí.
   d. Cantidad de cursos de inglés aprobados por los participantes en una encuesta.

4. Clasifica las variables cuantitativas de la actividad anterior en continuas o discretas.

5. Identifica con base en la siguiente gráfica la variable, los valores que toma la variable y la frecuencia más alta.

Índice de masa corporal (IMC) de los pacientes regulares de un consultorio médico



¡Atención!

Observa que en el histograma los valores de la variable se distribuyen en clases por lo que deben indicarse en forma de intervalos.

6. Lee el texto y con base en él describe un estudio que harías sobre el tema. Indica sobre qué indagarías, qué herramientas de recopilación de datos se emplearían y si se usaría una muestra.

> Las personas ahora son más concientes de la importancia de practicar actividades físicas y alimentarse adecuadamente. Desafortunadamente, ese conocimiento no implica que mejoren sus malos hábitos.

1.3 Características y etapas de un proyecto de investigación a través de la estadística

Problema

Un centro de salud enviará funcionarios a vacunar estudiantes en tres colegios cuya matrícula es de 500 alumnos cada uno. Se realizó una investigación sobre la cantidad de jóvenes que tienen el esquema de vacunación completo y los resultados son los siguientes:

Estudiantes con el esquema de vacunación completo según colegio	
Colegio	**Frecuencia**
1	450
2	275
3	350

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál colegio debe visitarse primero? ¿Por qué?
2. Si luego de estas visitas se logra que la totalidad de los estudiantes estén vacunados; sin embargo, al año siguiente se realizarán de nuevo las visitas, ¿sobre cuáles alumnos se debe aplicar un nuevo estudio?, ¿sobre todos? o ¿sobre una parte? Justifica tu respuesta.

Solución

1. El colegio 2, porque es el que presenta el menor número de jóvenes vacunados.
2. En el año siguiente se debe efectuar un estudio solo sobre los alumnos nuevos que ingresen a 7.° y los que provengan de otros colegios, ya que los demás tendrían el esquema de vacunación completo. No es necesario aplicar el estudio a todos.

Conclusión

Un **proyecto de investigación** es un estudio que permite, por ejemplo, la solución de un problema, la obtención de nuevos conocimientos y la toma de decisiones. Debe ser útil para lograr beneficios en campos como el social, el científico y el económico.

La **estadística** brinda, a la persona que investiga, los conocimientos y las herramientas para recopilar, analizar e interpretar los datos.

Desarrollo sostenible

El esquema nacional de vacunación protege a niños, jóvenes y adultos de enfermedades como: hepatitis, influenza, rotavirus, varicela y COVID-19, entre otras.

La vacunación es particularmente importante en la población estudiantil, pues los jóvenes interactúan en grupos numerosos. Y por supuesto: ¡Una juventud saludable estudia mejor!

Datos interesantes

En Panamá hay instituciones, empresas y personas dedicadas a la investigación científica. Esto favorece el desarrollo de prototipos como por ejemplo, STEMO, el cual es un equipo que “consiste en un sistema de detección molecular y *hardware* para diagnóstico preliminar ‘In situ’ de SARS-CoV-2.”

Fuente: senacyt.gob.pa

Se proponen estas etapas para desarrollar un proyecto:

1. Planteamiento del problema.
2. Definición de los objetivos.
3. Formulación de las hipótesis.
4. Establecimiento de la población y la muestra y elección de las herramientas de recolección de datos.
5. Recopilación y procesamiento de los datos.
6. Análisis de los datos y obtención de conclusiones.
7. Comunicación de los resultados mediante un informe.

Observa cómo se hace

En una comunidad rural se cree que es necesaria una nueva ruta de autobús para transportar a una gran cantidad de estudiantes del colegio de la zona. La junta comunal planifica un estudio inicial sobre el tema y que ayude, más adelante, a determinar si se justifica la solicitud de la nueva ruta. ¿Mediante qué etapas se puede formular un proyecto de investigación sobre la situación descrita?

1. Se plantea el problema mediante preguntas como: ¿De qué manera se trasladan los estudiantes al colegio? ¿Cuánto tiempo les toma acudir a clases?
2. Se definen los objetivos que deben cumplirse, por ejemplo:
   - Averiguar la forma de desplazamiento de los estudiantes a fin de establecer cuántos viajan a pie y cuántos por otros medios.
   - Determinar el tiempo de traslado de los jóvenes para saber si hay quienes demoran mucho tiempo.
3. Se formula la hipótesis (respuesta tentativa a la problemática estudiada). Podría ser: *Un gran número de alumnos se traslada a pie y les toma mucho tiempo llegar al centro educativo.*
4. Se establece que la población corresponde a todos los estudiantes del colegio y la muestra son los que se entrevistarán. En este caso, conviene consultar a la totalidad de estudiantes, es decir, la población (no una muestra).
   Además, en esta etapa se elige la herramienta de recolección de datos: un cuestionario.
5. Se recopilan y procesan los datos con la herramienta establecida (cuestionario). Los medios de traslado y el tiempo podrían representarse, respectivamente, en una gráfica de barras y un histograma, y también, podrían calcularse el promedio y la moda de los tiempos.
6. Se analizan los datos y se desarrollan las conclusiones. Se hace una reflexión sobre la investigación, se explican las hipótesis y se justifica su veracidad o falsedad.
7. Se comunican los resultados mediante la confección de un informe, pues es importante compartir los hallazgos obtenidos.

Datos interesantes

¿Sabías que el Instituto Nacional de Estadística y Censo (INEC) es el ente encargado de dirigir y formar la estadística nacional? El compendio estadístico **Panamá en cifras** se puede consultar en su versión impresa y a través del sitio web: www.inec.gob.pa

¡Atención!

En las clases posteriores se profundizará sobre procesamiento, análisis e interpretación de datos. En la sección **Practica lo aprendido** podrás desarrollar un proyecto de investigación.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe una característica de un proyecto de investigación.

2. Brinda un ejemplo de un beneficio social que puede lograrse mediante un proyecto de investigación.

3. Contesta: ¿Qué crees que significa la frase "La estadística brinda herramientas para interpretar los datos obtenidos en una investigación"?

4. Con base en la situación descrita anota V si es la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica las que sean falsas.

> La administración de un colegio realizará un estudio con todos los estudiantes de nuevo ingreso que solicitaron una beca de alimentación. La investigación indagará, entre otras cosas, sobre la cantidad de miembros de la familia de cada alumno y sobre el ingreso mensual del hogar. Estos datos permitirán conocer la situación socioeconómica de los jóvenes y enriquecerá el conocimiento de la institución sobre la población estudiantil.

   a. El estudio se debe aplicar a la totalidad de los alumnos que desean obtener la beca.
   b. Un objetivo de la investigación podría ser: Determinar los alimentos preferidos por los estudiantes a fin de crear unos menús atractivos para el colegio.
   c. La herramienta estadística que podría utilizarse es un cuestionario.

5. Contesta las preguntas con base en la siguiente situación.

> Unos científicos creen que el consumo de alimentos ricos en fibra es muy bajo en cierto corregimiento del país y que este dato se relaciona con padecimientos digestivos de la población adulta. El corregimiento tiene un total de 1275 personas adultas.
>
> Se realizará un proyecto de investigación que establezca los hábitos alimenticios de 300 adultos del corregimiento. El estudio determinará por ejemplo, la cantidad de comidas diarias, los tipos de alimentos ingeridos, el cálculo de la cantidad de fibra consumida y la comparación de esa cantidad con la que es recomendada para una dieta saludable.

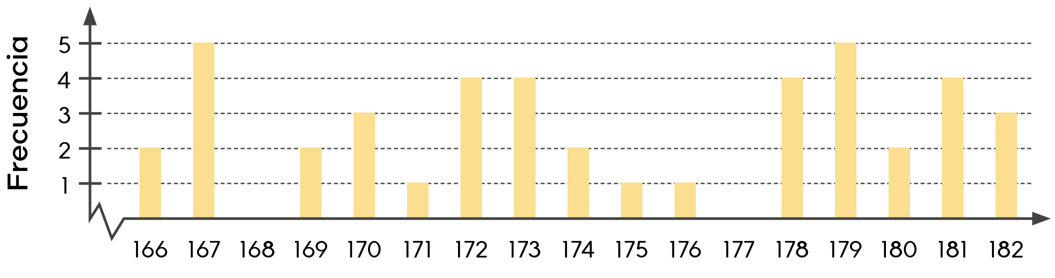
   a. ¿Cuál sería el problema de investigación? Plantéalo en forma de pregunta.
   b. ¿Qué objetivo(s) se puede(n) definir para el proyecto de investigación?
   c. ¿Qué hipótesis plantearías?
   d. ¿Cuáles serían, respectivamente, la población y la muestra del estudio?
   e. ¿Qué herramientas de recolección de datos aplicarías si llevaras a cabo el estudio?
   f. ¿Crees que sería suficiente el resultado de ese proyecto para relacionar el bajo consumo de fibra con los padecimientos digestivos de la población? Sugerencia: Piensa en características de la población adulta como edad, área de trabajo, otros tipos de alimentos que consumen regularmente, calidad del agua que ingieren, entre otras.

1.4 Recopilación y representación de datos

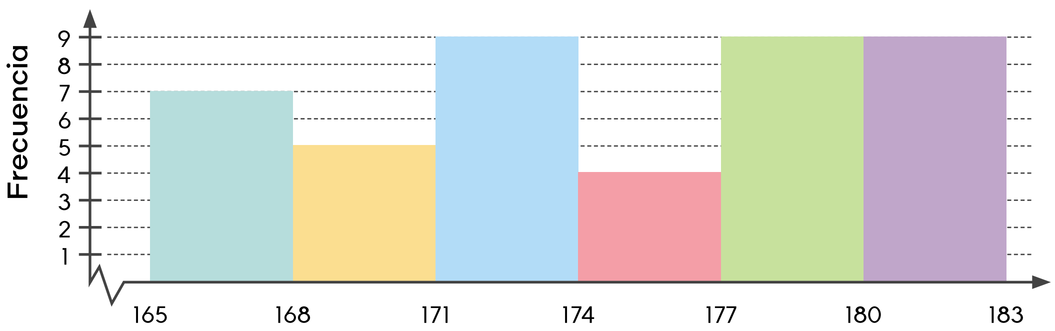
Problema

Observa las gráficas que representan los mismos datos.

Distribución de los miembros de una academia de natación según estatura en centímetros



Distribución de los miembros de una academia de natación según estatura en centímetros



Contesta las preguntas.

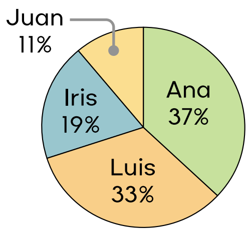
1. ¿Cuántas personas miden 166 cm?
2. ¿Cuántas personas miden más de 165 cm y menos 168 cm?
3. Hay dos diferencias entre las gráficas, ¿cuáles son?

Recuerda

Una **gráfica de barras**, como la de la izquierda, es una representación en la que la altura de cada barra corresponde a la frecuencia.

Una **gráfica circular**, presenta sectores proporcionales a cada valor de la variable expresados en forma porcentual. Por ejemplo:

Elección de la presidencia del salón



¡Atención!

En el eje horizontal de las gráficas de esta página aparece un quiebre en forma de zigzag. Este elemento indica que entre 0 y el primer elemento no hay datos que mostrar.

Solución

1. Dos personas.
2. Siete personas.
3. La primera representación es una gráfica de barras y la segunda es un histograma. La gráfica de barras muestra los datos sin agrupar y el histograma, agrupados en clases de 3 cm de amplitud.

Conclusión

Los datos estadísticos se deben recopilar y representar en forma adecuada por lo que conviene repasar estos procesos para aplicarlos en proyectos de investigación.

Métodos y herramientas de recopilación de datos

Cuatro métodos para recopilar datos estadísticos son observación, interrogación, medición y experimentación.

Estos métodos cuentan con herramientas que son los instrumentos físicos utilizados para registrar los datos. Por ejemplo, en la interrogación se pueden usar cuestionarios y entrevistas guiadas.

Recursos para representar la información

Los datos recopilados se representan en una distribución de frecuencias que es una tabla que muestra la información referente a una variable en estudio. Puede ser de frecuencias absolutas, de porcentajes o de ambos. Por ejemplo:

Título — **Distribución de 105 pacientes de un consultorio médico según peso en kilogramos**

Variable — Peso

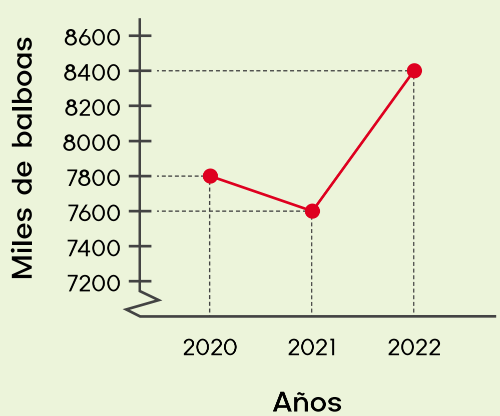
Valores que toma la variable.

Peso	Frecuencia	Porcentaje
[45,5, 55,5)	12	11,4%
[55,5, 65,5)	27	25,7%
[65,5, 75,5)	20	19,0%
[85,5, 95,5]	46	43,8%
Total	105	100%

Otro recurso para representar la información es la gráfica. Dos tipos son la gráfica lineal y el histograma:

La **gráfica lineal** contiene puntos unidos con líneas. La altura de cada punto indica el valor de una magnitud o la frecuencia de cada valor de una variable. Es muy utilizada para mostrar variaciones temporales.

Exportación de pescado y filete de pescado de la república: Enero-febrero, 2020-2022



Recuerda

Para calcular el porcentaje de la frecuencia absoluta 12 en la distribución de frecuencias de la derecha se divide 12 entre el total (105) y se multiplica por 100:

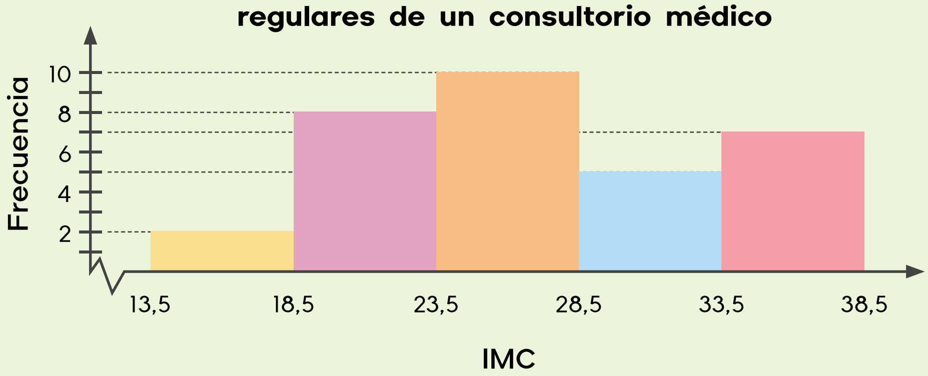
$$12 \div 105 = 0{,}114$$
$$0{,}114 \cdot 100 = 11{,}4$$

¡Atención!

El total en la columna de porcentajes en una distribución de frecuencias debe ser 100 %, pero por pequeños errores aceptables en el redondeo es posible obtener 99,9% o 100,1%.

El **histograma** posee barras en las que la altura de cada una corresponde a la frecuencia de los datos de cada clase. Conviene usarlo cuando se trata de datos continuos y agrupados.

Índice de masa corporal (IMC) de los pacientes regulares de un consultorio médico



Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Construye una distribución de frecuencias absolutas y porcentajes con la siguiente información.

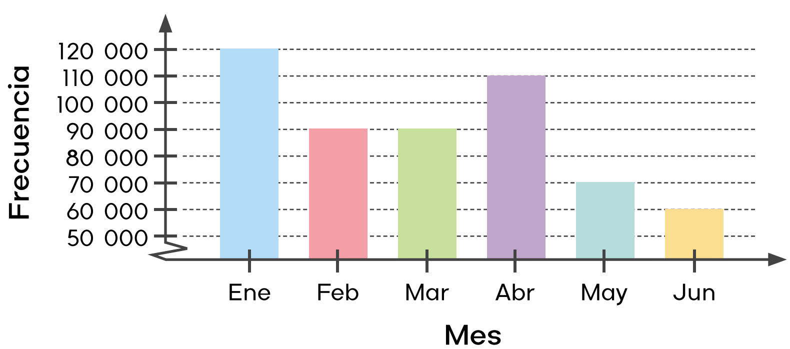
Números obtenidos al lanzar un dado 20 veces									
5	1	6	2	1	4	6	4	3	3
4	5	3	3	4	1	6	1	5	6

2. Elabora un histograma con los datos de la distribución de frecuencias.

Distribución de bebés nacidos en un hospital en el mes de mayo según peso al nacer	
Peso en gramos	**Frecuencia**
[2600, 2800)	4
[2800, 3000)	6
[3000, 3200)	5
[3200, 3600)	8
[3600, 3800]	2

3. Transforma esta gráfica de barras en una gráfica lineal.

Cantidad aproximada de visitantes al país según mes, primer semestre



1.5 Análisis e interpretación de datos

¿Qué pasaría?

Si se asigna una calificación porcentual de 20% a quienes tuvieron una respuesta correcta y de 100% a quienes respondieron bien las cinco preguntas, ¿qué porcentaje le corresponde a cuatro respuestas acertadas?

Para responder esta pregunta usa esta regla de tres:

$$\frac{5}{4} = \frac{100}{a}$$

Y luego,

$4 \cdot 100 \div 5 = 80$

Por lo tanto, cuatro respuestas correctas equivalen a un 80%.

Recuerda

En una distribución de frecuencias la variable es la que encabeza la primera columna. En este caso, es **Respuestas correctas**. Los valores que toma son 1, 2, 3, 4 y 5.

Problema

Se aplicó una prueba de cinco preguntas a unos estudiantes de 9.° grado. Los resultados se registraron en la siguiente distribución de frecuencias:

Distribución de los estudiantes de 9.° grado según cantidad de respuestas correctas de la prueba

Respuestas correctas	Frecuencia
1	2
2	10
3	9
4	22
5	15
Total	**58**

Si la media obtenida es menor a 4 respuestas correctas se implementará un taller semanal de refuerzo para todos los estudiantes y si el promedio es mayor o igual a 4, solo se aplicará el taller a los alumnos que tuvieron 3 respuestas correctas o menos.

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál es el procedimiento para calcular la media?¿Cuál es su valor?
2. Según el resultado obtenido, ¿de qué manera se llevará a cabo el taller semanal de refuerzo?
3. Si los datos se representaran en una gráfica de barras, ¿a cuál de los valores de la variable **Respuestas correctas** le correspondería la barra más alta? ¿Qué nombre recibe la medida de tendencia central relacionada con esa mayor altura?

Solución

1. Se suman los productos de multiplicar cada cantidad de respuestas correctas por su frecuencia y la suma se divide entre el total de estudiantes.

$$\frac{(1 \cdot 2) + (2 \cdot 10) + (3 \cdot 9) + (4 \cdot 22) + (5 \cdot 15)}{58} = \frac{212}{58} = 3{,}7$$

   El valor de la media es 3,7.
2. Como la media es menor que 4, se implementará el taller para todos los estudiantes.
3. La barra más alta le correspondería al valor 4. El nombre que recibe la medida de tendencia central relacionada con la mayor altura es **moda**.

Conclusión

El **análisis** y la **interpretación** de los datos estadísticos es primordial para formular las **conclusiones** de un proyecto de investigación.

Las medidas de tendencia central: **media**, **moda** y **mediana** son eficaces para analizar cantidades, pues expresan los valores hacia los que tienden dichas cantidades.

Para interpretar los datos en forma eficiente y comunicarlos con facilidad es necesario representarlos en **distribuciones de frecuencia** y **gráficas**.

¡Atención!

El término **análisis** se define como el estudio detallado de algo.

Interpretar significa explicar o declarar el sentido de algo.

Observa cómo se hace

Observa la tabla de calificaciones ordenadas de 36 estudiantes en la prueba de Matemática.

2,1	2,5	2,7	3,0	3,0	3,3	3,5	3,5	3,5
3,6	3,8	4,0	4,0	4,5	4,6	4,7	4,7	4,7
4,7	4,7	4,7	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9
4,9	4,9	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0

Calcula la mediana. ¿Qué significa esa medida?

Solución

Al observar los datos ordenados de menor a mayor resulta que los dos datos centrales son 4,7 y 4,7. Se obtiene la media de esos dos valores que es igual a 4,7.

Entonces la mediana es 4,7. Significa, que la mitad de los datos son menores o iguales a 4,7 y que la mitad de los datos son mayores o iguales a 4,7.

Recuerda

Para obtener la **mediana** se enlistan los datos ordenados de menor a mayor.

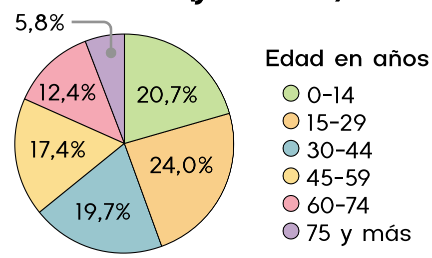
Si la cantidad de datos es impar, la mediana corresponde al dato que está en el centro. Y si la cantidad es par, se ubican los dos datos centrales y se calcula la media de ellos.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Contesta las preguntas con base en la gráfica de la derecha.
   a. ¿Qué grupo de edad representa la moda?
   b. ¿Cuál es el grupo de edad menos numeroso?
   c. ¿Es posible afirmar que aproximadamente la mitad de la población tiene entre 30 y 74 años? ¿por qué?

Estimación porcentual de la población de la provincia de Herrera según grupos de edad (julio 2019)



2. Realiza las actividades de acuerdo con la siguiente información.

El cuadro muestra los puntajes obtenidos en la prueba de Ciencias Naturales por los 31 estudiantes del salón 9-A. El total de puntos de la prueba es 35.

19	23	25	25	25	26	27	28
30	30	30	31	31	31	31	32
33	33	33	33	33	34	34	34
34	35	35	35	35	35	35	

a. Calcula la media, la mediana y la moda de los puntajes.

b. Si el puntaje mínimo para aprobar el examen se fijó en 23, ¿cuántos alumnos aprobaron?

c. ¿Qué porcentaje corresponde a los jóvenes aprobados?

3. Analiza los datos de la derecha y responde.

a. ¿Cuál fue el mes de mayor producción?

b. ¿Cuántas sandías se produjeron en total durante el semestre?

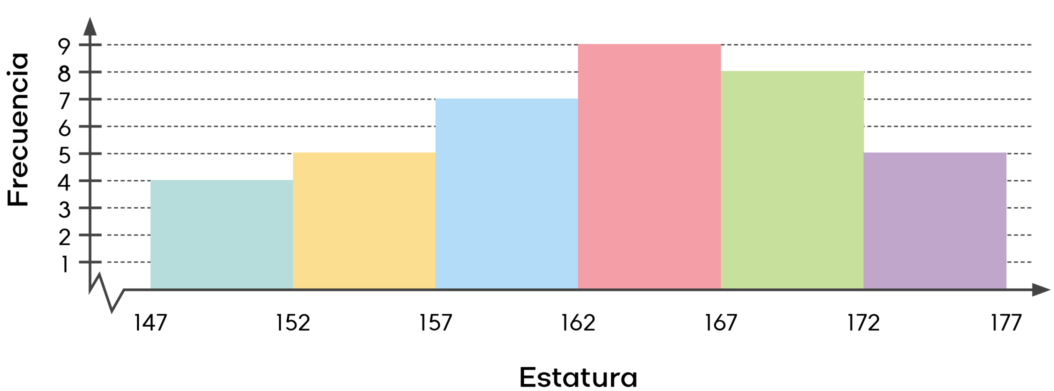
c. En uno de los meses, el exceso de lluvia hizo que la producción disminuyera drásticamente. ¿Cuál fue ese mes?

Producción de sandías en la finca Miramar según mes, durante el primer semestre del año

Mes	Cantidad
Enero	612
Febrero	520
Marzo	550
Abril	593
Mayo	515
Junio	210

4. Realiza las actividades con base en la gráfica.

Distribución de los estudiantes de 9.° grado de un colegio según estatura en centímetros



a. ¿Cuál es la moda?

b. ¿Cuántos alumnos miden 162 cm o más?

c. ¿Cuál es el total de estudiantes?

d. ¿Se puede decir que cerca del 25% de los jóvenes mide menos de 157 cm?¿Por qué?

e. ¿Es correcto afirmar que 5 estudiantes miden 172 cm o más? Explica.

1.6 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Realiza las actividades con base en la información.

Un centro de salud debe publicar un informe sobre el estado de la vacunación de los habitantes del distrito contra la COVID-19. Por el momento, se tiene esta tabla con los datos absolutos.

Grupos de edad (años)	Población total	Población con tres dosis
Mayores de 60	3090	2936
16 a 59	10 381	7474
12 a 15	1284	1027
5 a 11	1143	1040

a. Copia la tabla en tu cuaderno y añádele una fila para que calcules los totales de población total y población con tres dosis. Agrégale una columna titulada **Porcentaje** en la que indiques qué porcentaje de cada grupo de edad ha recibido las tres dosis.

b. Redacta dos ideas que interpretes de la tabla.

2. Trabaja en un **proyecto de investigación** a través de la estadística, el mismo debe presentarse por medio de un informe y una exposición ante la clase.

a. Forma equipo con unos compañeros y propongan una temática o situación del entorno sobre la cual investigar.

b. Realicen las siguientes etapas. Se les recomienda que las anoten en fichas junto con toda la información que corresponda, a fin de que tengan el material necesario para el informe y la exposición.

- Definan de manera precisa y concreta el problema. Pueden utilizar preguntas.
- Redacten el objetivo(s) que debe(n) cumplirse con el proyecto.
- Formulen la(s) hipótesis.
- Establezcan la población y la muestra que serán objeto de estudio. Con esos elementos planteados, definan cuáles serán las herramientas de recopilación de datos y a quiénes les solicitarán información. Elaboren los cuestionarios necesarios o enlisten los pasos de los experimentos que deben realizar.
- Recopilen los datos con las herramientas establecidas. Procesen los datos. Recuerden emplear distribuciones de frecuencias y gráficas, y si es posible, calculen las medidas de tendencia central.
  En el informe los datos deben aparecer procesados y acompañados de toda la información necesaria para que el lector los comprenda.
- Analicen los datos y desarrollen las conclusiones o recomendaciones obtenidas a partir de los datos recolectados. Expliquen si las hipótesis resultaron acertadas o no.

c. Redacten el informe de manera que sus secciones correspondan con las etapas anteriores. Planteen subtítulos como estos: Definición del problema, Objetivos, Hipótesis, Población y muestra, Descripción de las herramientas de recopilación de datos, Datos obtenidos, Conclusiones (o Recomendaciones). No olviden añadir una portada y un índice al inicio, y una sección de referencias, al final si es necesario.

d. Preparen la exposición con elementos visuales en los que se aprecien las gráficas y las conclusiones del proyecto.

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Comprendo los principales conceptos de estadística a fin de emplearlos en un proyecto de investigación.			
2. Caracterizo un proyecto de investigación a través de la estadística.			
3. Presento, según una secuencia lógica, las etapas de un proyecto de investigación.			
4. Aplico herramientas de recopilación y representación de datos en la ejecución de investigaciones.			
5. Analizo e interpreto representaciones estadísticas como distribuciones de frecuencias y gráficas.			
6. Elaboro, a través de la estadística, un proyecto de investigación.			
7. Desarrollo un proyecto de investigación cumpliendo los pasos.			

Unidad 7

Eventos y probabilidad

En el verano de 1654, Pierre de Fermat y Blaise Pascal, dos renombrados científicos y matemáticos franceses, intercambiaron correspondencia. Se trató de cinco cartas en las que discutieron problemas sobre el lanzamiento de dados y en las cuales, sin una intención directa, sentaron las bases de la teoría de la probabilidad.

La probabilidad estudia la aleatoriedad, es decir, los fenómenos que dependen del azar. Los juegos de dados y de ruleta son situaciones aleatorias que se analizan mediante la probabilidad.

La lotería también se relaciona con la probabilidad. Por ejemplo, el sorteo corresponde a una situación aleatoria en la que se conoce cuáles son todos los posibles números favorecidos, pero no se puede saber de antemano qué número va a salir.

En esta unidad estudiarás conceptos fundamentales de probabilidad y las reglas que se aplican al calcular probabilidades en dos o más situaciones relacionadas entre sí.

La Lotería Nacional de Beneficencia de Panamá se creó en 1919 y desde entonces ha favorecido muchos proyectos y obras sociales.

En esta unidad aprenderás a...

- Describir con curiosidad las características de la ocurrencia de eventos probabilísticos.
- Enunciar el principio de la suma como regla en la ocurrencia de eventos.
- Resolver problemas de probabilidad de un evento a través de la regla del principio de suma.
- Plantear y resolver situaciones del entorno que involucren la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Probabilidad de un evento

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Relaciones de orden	
Forma literal	**Forma simbólica**
12 es menor que 237.	
	$0 \geq -11$
0,05 es mayor que y.	
x es menor o igual a 9.	

2. Escribe las probabilidades como fracciones simplificadas al máximo.
   a. $P(A) = \frac{2}{8} =$
   b. $P(B) = \frac{21}{45} =$
   c. $P(C) = \frac{6}{6} =$
   d. $P(D) = \frac{3}{9} =$

3. Expresa cada probabilidad en forma decimal y en forma porcentual.
   a. $P(E) = \frac{8}{16} =$
   b. $P(F) = \frac{7}{7} =$
   c. $P(G) = \frac{5}{25} =$
   d. $P(H) = \frac{9}{12} =$

4. Redondea las probabilidades a la centésima más cercana.
   a. $P(I) = 0{,}333 =$
   b. $P(J) = 0{,}785 =$
   c. $P(K) = 0{,}397 =$
   d. $P(L) = 0{,}812 =$

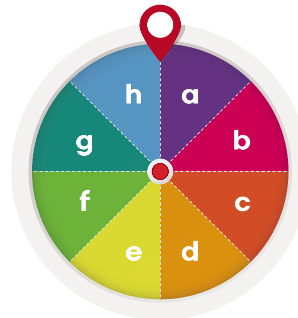
5. Completa cada descripción con el concepto que le corresponde.
   a. Su resultado no se puede predecir, no se puede saber con certeza lo que ocurrirá: ______
   b. Es una prueba que consiste en repetir un fenómeno con el fin de analizarlo y extraer conclusiones sobre su comportamiento.: ______
   c. Se tiene certeza de su resultado después de realizarlo en repetidas ocasiones: ______

Experimento	Experimento aleatorio	Experimento determinístico

6. Completa cada situación con "más probable", "menos probable" o "igualmente probable", de acuerdo con el experimento aleatorio de lanzar un dado.
   a. Es ______ obtener un 1 que obtener un 2.
   b. Es ______ obtener un 6 que conseguir un número impar.
   c. Es ______ obtener un número par que uno impar.
   d. Es ______ obtener un número mayor que 2, que uno menor que 2.
   e. Es ______ obtener un número menor que 5, que uno mayor que 5.

1.2 Conceptos de probabilidad

Problema



Al girar una ruleta como la de la derecha, ¿qué es más probable: obtener una vocal o conseguir una consonante? ¿Por qué? Considera que cada letra tiene igual posibilidad de salir favorecida.

Solución

Es más probable obtener una consonante, ya que seis de las ocho letras son consonantes. Solo dos de las ocho son vocales.

En términos probabilísticos si C es el suceso de que salga consonante y V el evento de obtener vocal se tiene que:

$$P(C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ y } P(V) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ entonces } P(C) > P(V).$$

Conclusión

Se realiza el **experimento aleatorio** de girar una ruleta como la de arriba para ver qué letra sale. A partir de él se definen y ejemplifican algunos conceptos de probabilidad.

El **espacio muestral** (Ω) es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Al girar la ruleta $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

La **cardinalidad** del espacio muestral indica su cantidad de elementos. se simboliza con #. Para la ruleta: $\# \Omega = 8$

Un **evento** o suceso es un subconjunto del espacio muestral. Dicho de otra manera, es un resultado del experimento. Al girar la ruleta se definen estos dos eventos:

- A es el evento obtener a. En forma simbólica $A = \{a\}$
- C es el evento obtener una consonante. En forma simbólica $C = \{b, c, d, f, g, h\}$

Evento seguro: Corresponde a todos los elementos de Ω y por lo tanto, ocurre con seguridad. Para la ruleta, si B es un evento seguro, se cumple que $B = \Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Evento imposible: No contiene elementos de Ω, es decir, que no puede suceder. Si K consiste en obtener una k en la ruleta, entonces se dice que K es un conjunto vacío y se simboliza $K = \emptyset$.

Evento probable o **posible**: Está formado por uno o varios elementos de Ω pero no es igual a Ω. Esto significa que tiene posibilidad de ocurrir. En el caso de la ruleta, dos ejemplos son $D = \{d\}$ y $E = \{e, f, g\}$.

Recuerda

1. En un experimento aleatorio **no** es posible predecir con certeza cuál será el resultado.
2. Un **conjunto** es una colección de elementos definida.
3. Si todos los elementos que pertenecen a un conjunto A también pertenecen a un conjunto B, se dice que A es **subconjunto** de B y se escribe $A \subset B$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica cuál de los siguientes experimentos es aleatorio.
   a. En una caja se colocaron las fichas de un juego de damas (o tablero). Hay 12 fichas rojas y 12 negras y se extrae una ficha sin mirar.
   b. En la caja del ejercicio anterior se dejan solo las fichas rojas y se extrae una sin mirar.

2. Brinda tres ejemplos de experimentos aleatorios que puedes realizar con recursos que tengas en tu casa o salón de clase.
3. Escribe el espacio muestral para los experimentos aleatorios descritos.

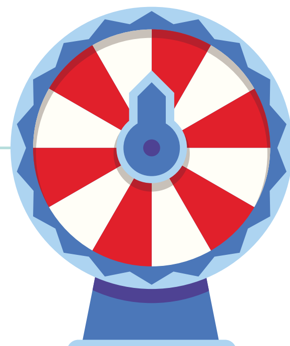
a.

Se lanza un dado para obtener un número.

b.

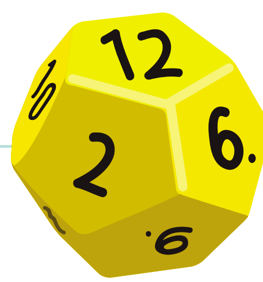
Se mezclan las cinco cartas y se extrae una sin mirar.

c.



Se gira la ruleta para obtener un color.

d.



Se lanza un dado de doce caras (con los números del 1 al 12) para obtener un número.

4. Describe dos ejemplos de eventos para cada uno de los experimentos del ejercicio anterior.
5. Clasifica los siguientes sucesos según su tipo (probable, seguro o imposible).
   a. Obtener un número par al lanzar el dado de seis caras.
   b. Conseguir el color verde en la ruleta de arriba.
   c. Que salga una carta de corazones del conjunto de cartas de arriba.
   d. Obtener un número menor que 12 al lanzar el dado de 12 caras.
   e. Conseguir un 9 en el dado de 6 caras.
   f. Que se obtenga rojo o blanco en la ruleta de arriba.
   g. Obtener una carta con una letra del conjunto de cartas de arriba.
   h. Que se salga un número múltiplo de 2 al tirar el dado de 12 caras.

1.3 Fórmula de Laplace

Problema

Lee la siguiente información y contesta.

La UNICEF reveló en el *Informe del estado mundial de la infancia*, que en 2018, uno de cada cinco niños no está creciendo bien por la malnutrición en América Latina y el Caribe.
Fuente: UNICEF Panamá. Disponible en www.unicef.org/panama.

¿Cuál es la probabilidad porcentual de que en una muestra al azar de niños de América Latina y el Caribe se seleccione una persona que no está creciendo bien?

Solución

La información suministrada indica “uno de cada cinco”. Esto equivale a la fracción $\frac{1}{5}$.

Para expresar esa cantidad en forma porcentual se aplica una regla de tres: $\frac{1}{5} = \frac{p}{100} \rightarrow p = \frac{1 \cdot 100}{5} = 20$

Por lo tanto, la probabilidad porcentual es 20%.

Conclusión

La **probabilidad** es el valor numérico de la posibilidad de que ocurra un evento.

En un experimento aleatorio formado por un número finito de eventos que tienen igual probabilidad de ocurrencia, la probabilidad de cualquiera de dichos eventos A se calcula mediante la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\#\ A}{\#\ \Omega}$$

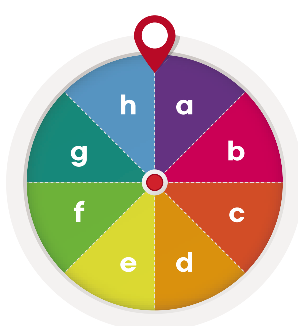
Al girar una ruleta como la derecha, para el evento V que consiste en obtener una vocal, la probabilidad de V es:

$$P(V) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Desarrollo sostenible

Hay acciones que, aunque individuales, contribuyen a que los niños reciban una mejor alimentación, por ejemplo:

- Lleva víveres a los bancos de alimentos.
- Haz trabajo voluntario en comedores comunitarios o centros de atención a menores en condición de pobreza.



Si V es el evento de obtener una vocal, los casos favorables son dos pues V = {a, e}.

Observa cómo se hace

En el experimento de lanzar dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos sellos?

Solución

1. Se escribe el espacio muestral. Conviene utilizar un diagrama de árbol.

Moneda 1	Moneda 2	
cara	cara →	(cara, cara)
	sello →	(cara, sello)
sello	cara →	(sello, cara)
	sello →	(sello, sello)

Ω = {(cara, cara), (cara, sello), (sello, cara), (sello, sello)}

2. Se identifican cuatro casos posibles y un caso favorable para el evento S de obtener (sello, sello). La fórmula de Laplace se desarrolla así:

$$P(S) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\#\ S}{\#\ \Omega} = \frac{1}{4}$$

El anverso y el reverso de la moneda se conocen como cara y sello, respectivamente.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve las actividades con base en el experimento aleatorio descrito.

> En el recipiente de la derecha hay cuatro bolitas moradas, tres amarillas, tres celestes, tres rosadas y dos rojas. Se extrae una bolita del recipente sin mirar.

   a. Expresa en forma decimal la probabilidad de sacar una bolita roja.
   b. Calcula en forma fraccionaria la probabilidad de obtener una bolita celeste.
   c. Encuentra la probabilidad porcentual de extraer una bolita morada.
   d. Explica cuál de los eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
   e. Justifica qué es menos probable, obtener una bolita amarilla o una rosada.

2. Realiza las actividades con base al experimento aleatorio de lanzar tres monedas.
   a. Escribe el espacio muestral del experimento. Recomendación: Usa un diagrama de árbol.
   b. Calcula P(A) si A es el evento de obtener dos caras y un sello.
   c. Encuentra P(C) si C es el suceso de que salgan tres caras.

1.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

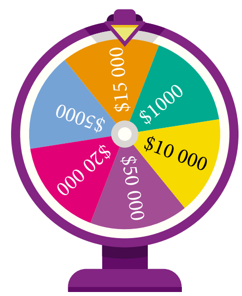
1. Anota **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa. Justifica las que sean falsas.
   - **a.** Un ejemplo de experimento aleatorio consiste en soltar una pelota de la mano y describir si cae o si sube.
   - **b.** El lanzamiento de una moneda para observar qué lado muestra es un ejemplo de experimento aleatorio.
   - **c.** Un evento posible es obtener un 3 al lanzar un dado de seis caras.
   - **d.** Un evento imposible se describe como un conjunto vacío (Ø).
   - **e.** La probabilidad de obtener un 1 al lanzar un dado de seis caras es igual a 50%.

2. Escribe el espacio muestral para los experimentos aleatorios descritos.

a.

Se extrae una balota al azar y se obtiene un color.

b.



Se gira la ruleta y se obtiene el premio indicado.

3. Calcula la probabilidad fraccionaria y porcentual de cada evento.
   - **a.** Obtener una balota morada de la tómbola de arriba.
   - **b.** Ganar más de 10 000 en la ruleta de arriba.

4. Confecciona en tu cuaderno una tabla como esta, complétala y responde.

Experimento aleatorio de lanzar dos dados de seis caras y sumar los números obtenidos

Dado 2 \ Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2				6	7
2	3	4	5	6	7	8
3		5	6			
4	5	6	7	8	9	10
5						
6						

   - **a.** ¿Cuál es la suma que hay que escoger para tener mayor probabilidad de acertar? Anota el valor.
   - **b.** ¿Cuáles sumas tienen menor probabilidad? Escribe el valor.
   - **c.** ¿Cuáles son dos sumas que tienen igual probabilidad de salir. ¿Qué probabilidad tienen?

Reglas probabilísticas

2.1 Algunas reglas probabilísticas y cálculo de la probabilidad

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Cada integrante propone un ejemplo de un evento a partir del lanzamiento de un dado.
   b. Tomen los ejemplos de cada uno y escriban qué nuevos conjuntos surgen de juntar los elementos de esos ejemplos.

Problema

1. Resuelve las actividades con base en el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener un número.
   a. Representa los eventos A: obtener un número impar y B: obtener un número par.
   b. ¿De qué manera se representa el evento C: obtener un número impar o par? ¿Cuál es la probabilidad de C?
   c. ¿De qué manera se representa el evento D: obtener un número impar y par a la vez? ¿Cuál es la probabilidad de D?

Solución

a. $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

b. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

$P(C) = \frac{6}{6} = 1.$

c. $D = \varnothing$

Es igual al conjunto vacío, pues es imposible que salga un número que sea impar y par a la vez.

$P(D) = \frac{0}{6} = 0.$

Conclusión

Conceptos previos sobre conjuntos

Es posible establecer relaciones entre eventos probabilísticos a fin de obtener otros eventos como resultado. El uso de conjuntos y sus operaciones permite evidenciar esas relaciones y trabajarlas.

Las relaciones entre conjuntos se representan mediante diagramas de Venn como el de la **Figura 1** a la izquierda. Los elementos dentro del círculo rojo pertenecen a A y los que estén dentro del círculo verde a B. Puede haber elementos que pertenezcan tanto a A como a B y elementos que no pertenezcan a ninguno.

El conjunto universo (Ω) está formado por todos los elementos a los que hace referencia una situación particular.

Operaciones con conjuntos

A continuación se explican y ejemplifican cuatro operaciones necesarias con conjuntos para calcular la probabilidad de ciertos tipos de eventos.

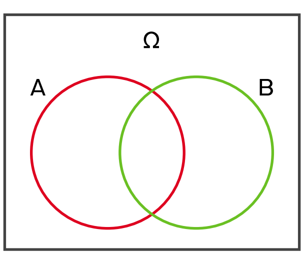


Figura 1*. Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos.*

- La **unión** de los conjuntos A y B (A U B) es igual al conjunto formado por los elementos de A y los elementos de B (**Figura 2**).
- La **intersección** de los conjuntos de A y B (A ∩ B) es igual al conjunto constituido por los elementos que están en tanto en A como en B (**Figura 3**).
- El **complemento** de un conjunto A (Ac) es el conjunto de elementos de Ω que no pertenecen a A (**Figura 4**).
- La **diferencia** de A y B (A – B) es igual al conjunto formado por los elementos que están en A pero no en B (**Figura 5**).

Cálculo de la probabilidad

La fórmula de cálculo de la probabilidad de un evento utilizando lenguaje de conjuntos es:

$$P(A) = \frac{\text{Cardinalidad del conjunto A}}{\text{Cardinalidad del espacio muestral}} = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Algunas reglas probabilísticas

En el espacio muestral Ω en el cual P(A) es la probabilidad del evento A se cumplen las siguientes propiedades:

- La probabilidad del espacio muestral o evento seguro es $P(\Omega) = 1$.
- La probabilidad del conjunto vacío o evento imposible es $P(\emptyset) = 0$.
- Para cualquier conjunto o evento A se cumple $0 \leq P(A) \leq 1$.

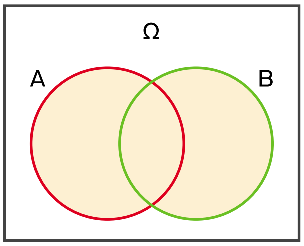


Figura 2. *Unión de A y B (A U B).*

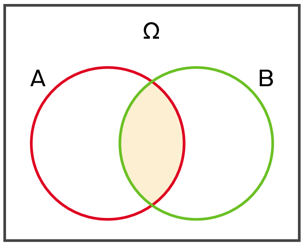


Figura 3. *Intersección de A y B (A ∩ B).*

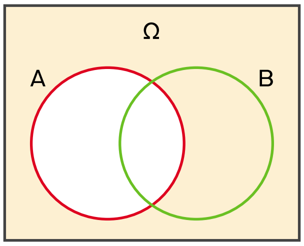


Figura 4. *Complemento de A (A^C).*

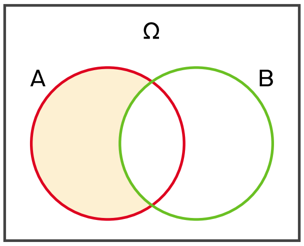


Figura 5. *Diferencia de A y B (A – B).*

Observa cómo se hace

En el experimento aleatorio de lanzar un dado se definen los eventos E = {1, 2, 3}, F = {4, 5, 6} y G = {3, 6}. Calcula: P(E U G) y $P(G^C \cap F)$.

Solución

1. P(E U G)
   a. Se calcula E U G.
   b. E U G = {1, 2, 3} U {3, 6} = {1, 2, 3, 6}
   c. E U G consta de cuatro elementos, entonces # (E U G) = 4.
   d. Se calcula la probabilidad conociendo que # Ω = 6.

$$P(E \cup G) = \frac{\text{Cardinalidad del conjunto } (E \cup G)}{\text{Cardinalidad del espacio muestral}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. $P(G^C \cap F)$
   a. Se calcula G^C que corresponde a los elementos de Ω que no pertenecen a G: $G^C = \{1, 2, 4, 5\}$
   b. Se calcula $G^C \cap F$.
   c. $G^C \cap F = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 5\}$
   d. $G^C \cap F$ consta de dos elementos, entonces $\# (G^C \cap F) = 2$.
   e. Se calcula la probabilidad conociendo que # Ω = 6.

$$P(G^C \cap F) = \frac{\text{Cardinalidad del conjunto } (G^C \cap F)}{\text{Cardinalidad del espacio muestral}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Calcula el resultado de cada operación de conjuntos.

a. $A \cup B$ para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

b. $A \cap B$ para $A = \{b, c, d, f\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$.

c. $A \cup B$ para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

d. $A \cap B$ para $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

e. $A - B$ para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

f. A^C para $A = \{b, c, d, f\}$ y $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$.

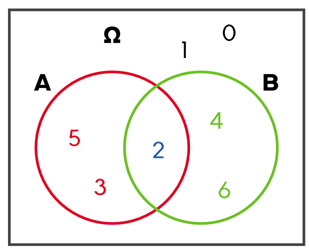
g. $\Omega - A$ para $A = \{1, 2, 3\}$ y $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Ilustra los conjuntos mediante diagramas de Venn. Observa el ejemplo.

$A = \{2, 3, 5\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



a. $C = \{1, 3\}$
$D = \{1, 3, 9\}$
$\Omega = \{0, 1, 3, 6, 9\}$

b. $E = \{1, 2\}$
$F = \{1, 2, 4\}$
$\Omega = \{0, 1, 2, 4\}$

c. $G = \{0\}$
$H = \{2, 4, 6, 8\}$
$\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

3. Observa la tabla y calcula las probabilidades indicadas.

Experimento aleatorio de lanzar dos dados de seis caras y sumar los números obtenidos						
Dado 1 / Dado 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a. $P(A \cap B)$

- A es el evento de obtener un total de dos cifras.
- B es el evento de conseguir un 12.

b. $P(A^C \cap B)$

- A es el evento de obtener un total par mayor que 8.
- B es el evento de conseguir un 7.

4. Contesta.

a. Si A es un conjunto y $P(A) = 0$, ¿a qué conjunto equivale A?

b. Si $B = \Omega$, ¿cuál es la probabilidad de B?

5. Determina los elementos que pertenecen a los conjuntos indicados con base en el diagrama.

a. Ω

b. $R \cup T$

c. $R \cup S$

d. $R \cap T$

e. $R \cap S$

f. $S \cup T$

g. $S \cap T$

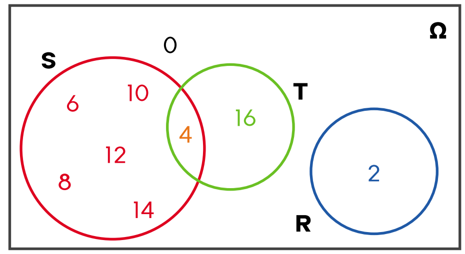
h. R^C

i. $R^C \cup T$

j. $T^C \cap S$

k. $T - S$

l. $\Omega - S$



6. Calcula la probabilidad de los conjuntos del ejercicio 5. Considera que son eventos del experimento aleatorio que consiste en obtener un número del conjunto de los pares menores que 18.

7. Copia en tu cuaderno los eventos que cumplan la condición descrita en la imagen.

a. Su probabilidad es igual a 1.

- A = {Obtener una carta roja}
- B = {Obtener una carta negra}
- C = {Sacar un 10}
- D = {Obtener una letra}

b. Su probabilidad es igual a 0.

- A = {Obtener una carta roja}
- B = {Obtener una carta negra}
- C = {Sacar un 10}
- D = {Obtener una letra}

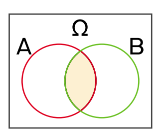
Se mezclan las cartas y se realiza el experimento de extraer una del grupo sin mirar.

8. Contesta de acuerdo con el diagrama.

$\# A = 8$

$\# B = 9$

$\# A \cap B = 5$



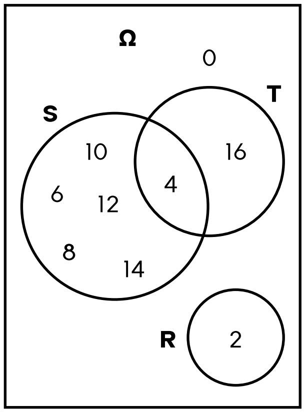
- ¿Cuál es la probabilidad de tomar al azar un elemento de A?
- ¿Cuál es la probabilidad de tomar un elemento de A o de B pero no de $A \cap B$?

9. Resuelve el problema.

a. Un club de 10 excursionistas realiza tres tipos de actividad: buceo, alpinismo y caminata. Dos de los miembros realizan exclusivamente buceo, una persona practica solamente alpinismo y otra, solamente caminata. Hay dos integrantes que realizan las tres actividades, mientras que cuatro, participan solo en dos. La probabilidad de seleccionar al azar a un miembro que realiza únicamente buceo y caminata es del 10%. Encontrar a alguien que realice exclusivamente buceo y alpinismo es imposible.

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar a un miembro que practique únicamente alpinismo y caminata?

2.2 Principio de la suma de probabilidades



Números pares menores que 18.

Problema

En el diagrama de Venn de la izquierda se identifican estos conjuntos:

- Ω = {Números naturales, pares, menores que 18}
- R = {Número par, positivo, primo}
- S = {Números pares, positivos, compuestos, menores que 16}
- T = {Números, pares, positivos, cuadrados perfectos, menores que 18}

Considera el experimento de tomar un número al azar de Ω y calcula estas probabilidades.

1. P(R)
2. P(S)
3. P(T)
4. P(S ∩ T)
5. P(S ∪ T)
6. P(R ∪ S)

Solución

1. R = {2}, por lo que # R = 1 y como # Ω = 9, entonces $P(R) = \frac{1}{9}$.
2. S = {4, 6, 8, 10, 12, 14} por lo que # S = 6. $P(S) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
3. T = {4, 16} por lo que # T = 2. $P(T) = \frac{2}{9}$
4. S ∩ T = {4} por lo que # (S ∩ T) = 1. $P(S \cap T) = \frac{1}{9}$
5. S ∪ T = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16} por lo que # (S ∪ T) = 7. $P(S \cup T) = \frac{7}{9}$
6. R ∪ S = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} por lo que # (R ∪ S) = 7. $P(R \cup S) = \frac{7}{9}$

Conclusión

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** si **no** es posible que ocurran a la vez, es decir, que su intersección es igual a Ø.

En la sección **Problema**, R y S son mutuamente excluyentes y también R y T. Por otro lado, S y T **no** lo son.

Principio de la suma de probabilidades

- **Caso 1**. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de su **unión** es igual a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Caso 2**. Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de su **unión** es igual a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Para más de dos eventos (A^1, A^2, ..., A_n) mutuamente excluyentes también se cumple el principio:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Observa cómo se hace

1. Verifica el principio de la suma para los eventos ($S \cup T$) y ($R \cup S$) de la sección **Problema**.

Solución

- $S \cup T$

S y T **no** son mutuamente excluyentes, pues su intersección no es vacía, entonces se debe aplicar la fórmula del caso 1.

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

El resultado coincide con lo calculado en el punto 5 de la sección **Solución** de la página 130.

- $R \cup S$

R y S son mutuamente excluyentes, pues su intersección es vacía, entonces se debe aplicar la fórmula del caso 2.

$$P(R \cup S) = P(R) + P(S) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

El resultado coincide con lo calculado en el punto 6 de la sección **Solución** de la página 130.

2. Un mercadito vende varios sabores de paletas de helado: mango, sandía y otros. Se puede comprar uno o más sabores. El 60% de los clientes de ayer compró paletas de mango, el 40% paletas de sandía y el 20% adquirió tanto de mango como de sandía.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar a un cliente que haya comprado paletas de mango o de sandía?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar a un cliente que no haya comprado ni paletas de mango ni de sandía?

Solución

a. M es el conjunto de los que compraron sabor mango y S, el de los que llevaron sabor sandía. No son eventos mutuamente excluyentes por lo que se aplica la fórmula del caso 1:

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S) = 60\% + 40\% - 20\% = 80\%$$

b. Se aplica la segunda regla de los **Datos interesantes**:

$$P([M \cup S]^C) = 1 - P(M \cup S) = 100\% - P(M \cup S) = 100\% - 80\% = 20\%$$

Datos interesantes

Otras reglas probabilísticas importantes son:

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$
  En forma porcentual: $100\% - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

¿Qué pasaría?

Se aplica la fórmula del caso 1 a dos eventos mutuamente excluyentes, por ejemplo, a R y S:

$$P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{7}{9}$$

La probabilidad 0 se debe a que, como los eventos son mutuamente excluyentes, su intersección es vacía y $P(\emptyset) = 0$.

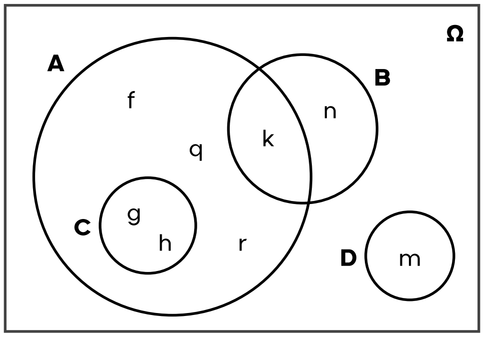
Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las actividades con base en el diagrama. Considera el experimento de elegir una letra de Ω al azar.

a. Determina las siguientes probabilidades.

- P(A)
- P(B)
- P(C)
- P(D)
- P(Ω)
- P(A ∩ B)
- P(A ∩ C)



b. Calcula las probababilidades aplicando el principio de la suma según corresponda.

- P(A U B)
- P(A U C)
- P(A U D)
- P(B U C)
- P(B U D)
- P(C U D)

2. Representa la situación descrita mediante un diagrama de Venn y realiza las actividades.

La ruleta de la derecha contiene los 12 primeros números impares. Se realiza el experimento de girarla para obtener un número y se definen los siguientes eventos:

D = {Número primo}

E = {Número compuesto}

F = {Ni primo ni compuesto}

a. Averigua la probabilidad de D, E y F.

b. Calcula la probabilidad de cada unión indicada.

- P(D U E)
- P(E^C U D)
- P(D^C U E)
- P(E U F)
- P(D U F)
- P(D U E U F)

3. Resuelve los problemas.

a. Han ingresado nuevos estudiantes a una academia de baile en la que se enseñan varios ritmos: salsa, merengue y otros. Los alumnos pueden practicar uno o más ritmos. El 43,75% asiste a clases de salsa, el 50% a clases de merengue y el 18,75% van tanto a merengue como a salsa. Si se elige al alzar a un estudiante de la academia...

- ¿Cuál es la probabilidad de que vaya a clases de salsa o de merengue?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no asista ni a merengue ni a salsa?

b. Se consultó a los estudiantes de 9.° grado de un colegio sobre los tipos de series que observan en televisión. El 75% de los alumnos ve dramas o comedias, el 28% observa dramas y comedias y el 50% no ve comedias. Si un alumno es elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea comedias?

¡Atención!

La conjunción "y" se relaciona con la intersección de conjuntos y la conjunción "o", con la unión.

2.3 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

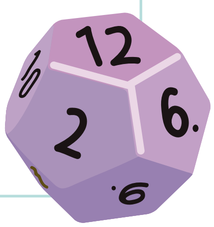
1. Calcula el resultado de cada operación de conjuntos.
   a. A U B para A = {a, b, c} y B = {c, d, e, f}.
   b. A ∩ B para A = {a, b, c} y B = {c, d, e, f}.
   c. A U B para A = Ø y B = {1, 2, 3, 4}.
   d. A ∩ B para A = {0} y B = {5, 7}.
   e. A – B para A = {x, y, z, w} y B = {x, y, z}.
   f. A^C para A = {m, n} y Ω = {m, n, p, q}.

2. Ilustra cada grupo de conjuntos mediante diagramas de Venn.
   a. C = {1, 6, 9}
      D = {1, 3, 6}
      Ω = {0, 1, 3, 6, 9}
   b. E = {1, 2}
      F = {4}
      Ω = {0, 1, 2, 4}
   c. G = {0, 8, 10}
      H = {2, 4, 6, 8}
      Ω = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

3. Calcula las probabilidades de acuerdo con los conjuntos del ejercicio anterior.
   a. P(C)
      P(D)
      P(C U D)
   b. P(E)
      P(F)
      P(E U F)
   c. P(G)
      P(H)
      P(G U H)

4. Representa la situación descrita mediante un diagrama de Venn y realiza las actividades.

   El dado de la derecha contiene los números del 1 al 12. Se realiza el experimento de lanzarlo para obtener un número y se definen los siguientes eventos:
   J = {Número par}
   K = {Número impar}
   L = {Número primo}
   M = {Número múltiplo de 3}



   a. Averigua la probabilidad de J, K, L y M.
   b. Calcula la probabilidad de cada unión indicada.
      - P(J U K)
      - P(J U M)
      - P([K – L] U M)
      - P(J U L)
      - P(J^C U M)
      - P(M U L U K)

5. Resuelve el problema.
   a. Una academia de idiomas abrió únicamente cursos de inglés, francés y portugués y se matricularon ocho nuevos estudiantes. Dos optaron únicamente por portugués, mientras que dos tomaron los tres idiomas. Los demás se matricularon en dos idiomas solamente. El 37,5% del total escogió exclusivamente inglés y francés. ¿Cuál es la probabilidad porcentual de seleccionar un estudiante al azar que se haya matriculado solamente en francés y portugués?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza los valores de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Comprendo los principales conceptos referentes a un experimento aleatorio para aplicarlos correctamente en situaciones de probabilidad.			
2. Determino valores de probabilidad haciendo uso de la fórmula de Laplace para un evento A: $P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\# A}{\# \Omega}$			
3. Describo las características de ocurrencia de eventos probabilísticos.			
4. Uso conjuntos y operaciones con conjuntos para evidenciar relaciones entre eventos probabilísticos.			
5. Enuncio el principio de la suma como regla en la ocurrencia de eventos.			
6. Resuelvo problemas de probabilidad de un evento a través del principio de la suma.			
7. Planteo y resuelvo situaciones del entorno que involucren la probabilidad de ocurrencia de un evento.			

Anexos

Simbología y fórmulas

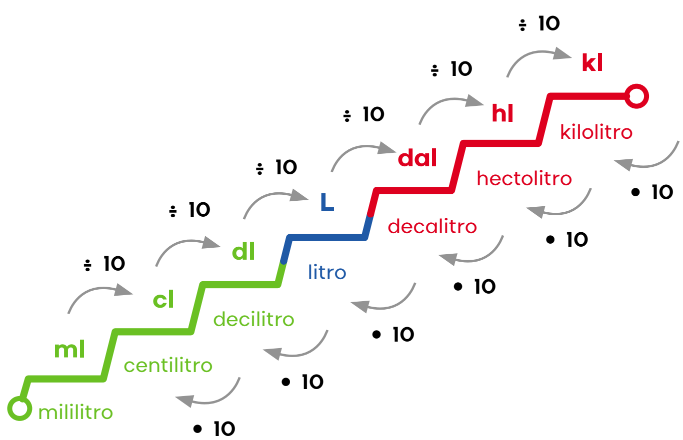
Símbología general

Símbolo	Significado
=	Igual a
<	Menor que
>	Mayor que
≤	Menor o igual a
≥	Mayor o igual a
≈	Aproximadamente
≠	Diferente
m. c. m.	Mínimo común múltiplo
m. c. d.	Máximo común divisor
SI	Sistema Internacional de Unidades
L	Litro
m	Metro
m^3	Metro cúbico
gal	Galón
qt	Cuarto
pt	Pinta
c	Taza
fl oz	Onza fluida
Ω	Espacio muestral
P(A)	Probabilidad de un evento A
⊂	Subconjunto
Ø	Conjunto vacío
A U B	Unión de los conjuntos A y B
A ∩ B	Intersección de los conjuntos A y B
A^C	Complemento del conjunto A
A – B	Diferencia de los conjuntos A y B

Prefijos para algunos múltiplos y submúltiplos en el Sistema Métrico Decimal

Nombre	Símbolo prefijo	Significado
Mili	m	10^{-3}
Centi	c	10^{-2}
Deci	d	10^{-1}
Deca	da	10
Hecto	h	10^2
Kilo	k	10^3

Escalera de conversión para el litro, sus múltiplos y submúltiplos



Equivalencias entre algunas medidas de capacidad del Sistema Inglés

- 1 barril = 42 galones (gal)
- 1 galón (gal) = 4 cuartos (qt)
- 1 cuarto (qt) = 2 pintas (pt)
- 1 pinta (pt) = 2 tazas (c)
- 1 taza (c) = 8 onzas fluidas (fl oz)
- 1 onza fluida (fl oz) = 2 cucharadas

Equivalencias entre algunas medidas de capacidad y volumen

- 1 ml = 1 cm^3
- 1 L = 1 dm^3
- 1 kl = 1 m^3

Fórmulas

Diferencia de cuadrados
- $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

Trinomios cuadrados perfectos
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Perímetro de un polígono regular (P)
- $P = n \cdot a$
  n: número de lados, a: medida del lado

Medida de una circunferencia (C)
- $C = 2 \cdot \pi \cdot r$
  π: número pi (aproximadamente 3,14),
  r: radio

Área (A)
- Cuadrado: $A = a^2$
  a: lado
- Rectángulo: $A = b \cdot h$
  b: base, h: altura
- Triángulo: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
  b: base, h: altura
- Polígono regular: $A = \dfrac{P \cdot a_p}{2}$
  P: perímetro, a_p: apotema
- Circunferencia: $A = \pi \cdot r^2$
  π: número pi (aproximadamente 3,14),
  r: radio

Volumen (V)
- Cilindro circular recto: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
  π: número pi (aproximadamente 3,14),
  r: radio, h: altura
- Esfera: $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
  π: número pi (aproximadamente 3,14),
  r: radio
- Cono circular recto: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
  π: número pi (aproximadamente 3,14),
  r: radio, h: altura
- Prisma recto: $V = A_b \cdot h$
  A_b: área de una base, h: altura
- Pirámide recta: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$
  A_b: área de una base, h: altura

Media aritmética o promedio
- $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

Probabilidad de un evento A
- $P(A) = \dfrac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \dfrac{\text{Cardinalidad del conjunto A}}{\text{Cardinalidad del espacio muestral}} = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$

Principio de la suma de probabilidades
- Si A y B **no** son mutuamente excluyentes:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A y B son mutuamente excluyentes:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Para más de dos eventos mutuamente excluyentes:
  $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

Ficha 1. Actividades de refuerzo (Unidad 1)

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe cada división entre expresiones algebraicas como una fracción algebraica. Luego, construye una tabla como la indicada y clasifícalas en racionales o irracionales.

a. $(2m + 7) \div (m^2 + m + 1)$

b. $(\sqrt{x} + 1) \div (x^3 - 2x^2 + 5)$

c. $(5y - 2) \div (\sqrt{2y + 7})$

d. $k \div (4k^5 - 3k + 1)$

e. $(25n + 3) \div 4n^{-2}$

f. $45b^3 \div (5b^2 + 6b + 2)$

Fracciones algebraicas racionales	Fracciones algebraicas irracionales

2. Determina cuáles de los valores dados podría o no tomar la variable **x** en cada fracción algebraica. Escribe "sí" o "no" según corresponda.

a. $\dfrac{x}{2x + 4} \rightarrow x = 3 \quad x = 2 \quad x = -2$

b. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 64} \rightarrow x = 64 \quad x = 8 \quad x = -8$

c. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} \rightarrow x = 0 \quad x = 1 \quad x = -1$

d. $\dfrac{5 - x^2}{x^3 - x} \rightarrow x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1$

¡Atención!

Recuerda que en una fracción algebraica, el polinomio del denominador no puede ser igual a 0; por lo tanto, **x** no puede tomar valores que hagan que el valor numérico del denominador sea 0.

3. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\dfrac{m^3}{mn}$

b. $\dfrac{5x^2w}{15x^3w^2}$

c. $\dfrac{12a^3b^4c}{18a^6b^2c}$

d. $\dfrac{xz^4}{3x^2z}$

e. $\dfrac{2b^2 + 6b}{b^2 - 9}$

f. $\dfrac{6x^2 - x - 2}{2 - x - 3x^2}$

g. $\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{5b - 10a}$

h. $\dfrac{x^3 - 9x}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

i. $\dfrac{24m^3n}{36m^3n^2 + 48m^4n}$

4. Anota la expresión desconocida en cada pareja de fracciones para que sean homogéneas.

a. $\dfrac{5w^3}{2xw}$ y $\dfrac{5w^3}{?}$

b. $\dfrac{1 - w^3}{4w^5 - w^2}$ y $\dfrac{2w^2 + 3w - 1}{?}$

c. $\dfrac{5x - 6}{?}$ y $\dfrac{2x}{x - 2x^2 + 3}$

d. $\dfrac{5xz^2}{?}$ y $\dfrac{-5xz^2}{2x^2 + 6xz - 4z^2}$

5. Homogeneiza cada pareja de fracciones.

a. $\dfrac{a}{ab + b^2}$ y $\dfrac{-b}{a^2 + ab}$

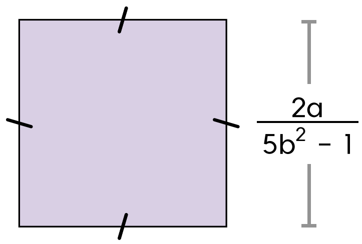
b. $\dfrac{5}{a^2 + 2a + 1}$ y $\dfrac{a}{a^2 - 3a - 4}$

Ficha 2. Actividades de refuerzo (Unidad 2)

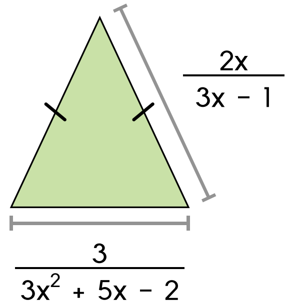
Trabaja en **tu cuaderno**

1. Determina el perímetro de cada figura. Simplifica al máximo cada resultado.

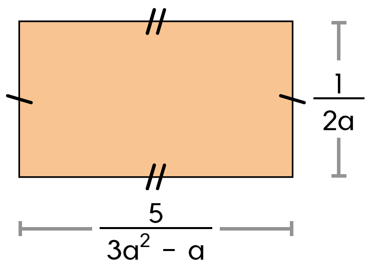
a.



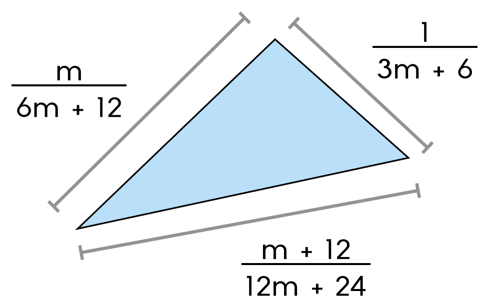
c.



b.



d.



Recuerda

El perímetro de un polígono se obtiene al sumar la medida de todos sus lados.

2. Calcula la fracción algebraica que completa correctamente cada igualdad.

a. $\frac{3y}{2x} + \boxed{?} = \frac{9y}{2x}$

b. $\frac{2a}{a^2 - 1} + \boxed{?} = \frac{a}{a^2 - 1}$

c. $\boxed{?} + \frac{2}{x - 2} = \frac{10x}{(x - 2)^2}$

d. $\boxed{?} + \frac{n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{4n + 3}{(n + 1)^2}$

¡Atención!

Aplica la relación entre la suma y la resta, con la cual se sabe que si **a + b = c**, entonces **a = c − b** y **b = c − a**.

3. Escribe dos fracciones algebraicas homogéneas que den el resultado indicado en cada caso al sumarlas o restarlas, según corresponda.

a. Fracción 1 + Fracción 2 = $\frac{5w}{w^2 + 3}$

b. Fracción 1 + Fracción 2 = $\frac{2x + 5}{x^2 - 2x - 1}$

c. Fracción 1 − Fracción 2 = $\frac{5}{2x^2}$

d. Fracción 1 − Fracción 2 = $\frac{2w - 9}{3w^2 + 1}$

4. Resuelve las siguientes operaciones combinadas con sumas y restas de fracciones algebraicas.

a. $\frac{9x}{y} + \frac{15x}{y} - \frac{18x}{y}$

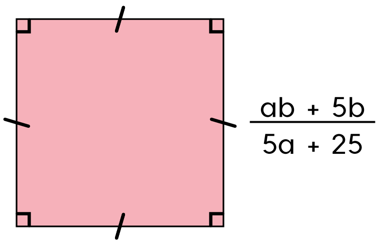
b. $\frac{3a + 5}{a^2 - 6b} - \frac{2b - a}{a^2 - 6b} + \frac{15 - b}{a^2 - 6b}$

c. $\frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} + \frac{3}{2 - x - x^2} - \frac{2}{x - 3}$

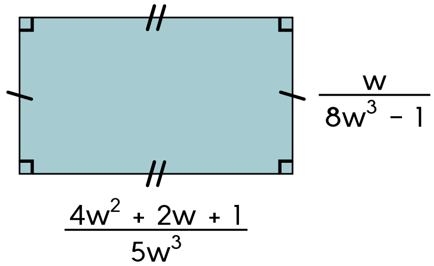
d. $\frac{5m}{m^2 - 4} + \frac{8}{m + 2} - \frac{5}{2m - 4}$

5. Determina el área de cada figura. Simplifica al máximo cada resultado.

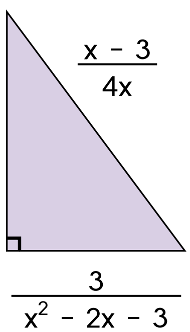
a.



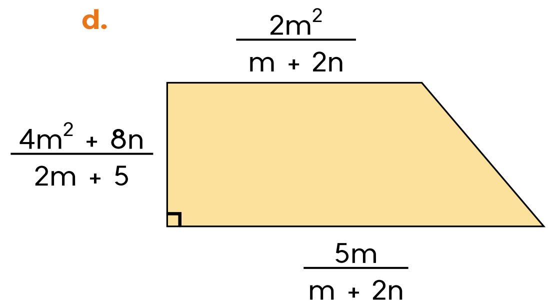
c.



b.



d.



Recuerda

Área de un cuadrado:

$\ell \cdot \ell$

Área de un rectángulo:

$b \cdot h$

Área de un triángulo:

$\dfrac{b \cdot h}{2}$

Área de un trapecio:

$\dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

6. Considera las siguientes igualdades y resuelve las operaciones combinadas propuestas.

$P = \dfrac{x}{x + 1}$ $\quad Q = \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}$ $\quad R = \dfrac{5}{x}$ $\quad S = \dfrac{2x}{x - 1}$

a. $P + Q \cdot R$

b. $R \div S - P$

c. $Q \cdot P \div R$

d. $(P + Q) \cdot R$

e. $R \div (S - P)$

f. $Q \cdot (P - R) \div S$

7. Si el área de un rectángulo se representa con la fracción algebraica $\dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ y la medida de la base corresponde a $\dfrac{(x + 1)(x - 3)}{x^2 - 1}$, ¿cuál fracción algebraica simplificada representa la medida de la altura de ese rectángulo?

8. La cantidad de litros de agua que hay en un tanque de almacenamiento se representa con la expresión $\dfrac{4x^2 + 6x}{4x^2 + 12x + 9}$. Si durante un día la cantidad de agua disminuyó en una quinta parte, ¿cuál fracción algebraica representa la cantidad de agua que quedó en el tanque?

¡Atención!

En el problema 7, la expresión corresponde al área entre la base para determinar la altura.

En el problema 8, considera que la quinta parte se obtiene al multiplicar la cantidad total por $\frac{1}{5}$; luego resta esa quinta parte del total de litros que había inicialmente.

Ficha 3. Actividades de refuerzo (Unidad 3)

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Relaciona cada sistema de ecuaciones con su respectiva solución.

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 3 \\ -3y + 2x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x + 4y = -35 \\ x + 6y = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4y - 3x = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ -3y + 7x = -20 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x = 5 \\ y = 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = -3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 9 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

2. Plantea cada situación mediante un sistema de ecuaciones y resuelve.

a. El punto más alto en Panamá se encuentra en el volcán Barú en Chiriquí, mientras que el segundo lugar lo ocupa el cerro Fábrega en la provincia de Bocas del Toro. Si la suma de las aturas de estos dos puntos es de 6810 m y la diferencia entre ellas es de 140 m, ¿cuál es la altura de cada uno de ellos?

b. A un partido asistieron 25 572 personas. Si había exactamente el doble de hombres que de mujeres, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron al partido?

c. En una granja hay 36 gallinas, algunas blancas y otras de color marrón. Si durante una semana se recolectaron 210 huevos en total y se sabe que cada gallina blanca puso 5 huevos y cada gallina marrón 7, ¿cuántas gallinas hay de cada color?

d. Los estudiantes de un grupo de noveno grado se organizan para realizar una excursión. Calcularon que si todos asisten, cada uno debe pagar B/.15 por el transporte; sin embargo, el día del viaje faltaron 4 estudiantes, por lo cual, cada uno tuvo que pagar B/.18. ¿Cuál era el costo total de la excursión y cuántos estudiantes fueron?

e. Carmen confecciona sombreros para vender en el mercado. El precio de venta de un sombrero corresponde al doble de su costo de producción. Si durante un día vendió 8 sombreros y obtuvo una ganancia de B/.96, ¿cuál es el costo de producir un sombrero y cuál es el precio de venta?

Ficha 4. Actividades de refuerzo (Unidad 4)

1. Copia las medidas que son equivalentes a 1 L.

1000 kl	1000 ml	0,2642 gl	10 dal	0,001kl
10 dl	3,785 gl	0,1 dal	4,2373 c	100 hl
0,946 qt	100 cl	0,01 hl	0,236 c	1,0571 qt

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una piscina infantil tiene una capacidad de 2700 L y tres salidas de agua, de manera que por cada una salen 250 ml por segundo. Si la piscina se encuentra completamente llena y se abren las tres salidas de agua a la vez, ¿cuántas horas tardará en vaciarse por completo?

b. La señora Marta prepara chicha de naranja para vender y la envasa en botellas de 12 oz y de 1,5 qt. Si le hicieron un encargo de 12 botellas grandes y 25 pequeñas, ¿cuál es la menor cantidad de galones completos de chicha que debe preparar para completar el pedido?

c. Un frasco de medicina que contiene 4,2 oz cuesta B/.18. Si Valeria debe tomar 10 ml de ese medicamento, tres veces al día durante 12 días, ¿cuánto dinero necesita para comprar la cantidad de frascos necesarios para completar el tratamiento?

d. Un agricultor compró un fertilizante concentrado líquido que contiene 2,5 L y para utilizarlo debe diluir 2 oz por cada litro de agua. Si quiere preparar todo el producto en un barril que indica las marcas en galones, ¿cuántos galones de agua debe utilizar aproximadamente?

¡Atención!

Aproxima el resultado a la unidad más cercana.

3. Realiza las siguientes actividades para completar la tabla.

a. Busca tres productos en tu casa que indiquen su capacidad en litros.

b. Anota, en la primera columna, el nombre y en la segunda, la capacidad en litros.

c. Convierte esa medida a las otras unidades solicitadas en la tabla y complétala.

Producto	Capacidad en litros	Capacidad en mililitros	Capacidad en cuartos	Capacidad en onzas

Ficha 5. Actividades de refuerzo (Unidad 5)

Trabaja en tu cuaderno

1. Define cada tipo de cuerpo geométrico.
   a. Cuerpo redondo
   b. Poliedro

2. Brinda dos ejemplos de cuerpo redondo y dos ejemplos de poliedro.
3. Escribe el nombre del cuerpo geométrico descrito.
   a. Tiene caras laterales triangulares y posee una cara poligonal llamada base.
   b. Posee una superficie lateral curva, una base circular y un vértice llamado cúspide o ápice.
   c. Presenta una superficie lateral curva y dos caras circulares llamadas bases.
   d. Tiene caras laterales rectangulares o cuadradas y posee dos caras poligonales llamadas bases.
   e. Todos los puntos de su superficie curva están a igual distancia del centro.

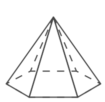
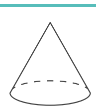
4. Copia la tabla en tu cuaderno y anota Sí o No.

Superficies planas y curvas en cuerpos geométricos

Nombre del cuerpo geométrico	¿Posee superficies planas?	¿Posee superficies curvas?
Esfera		
Prisma		
Cilindro		

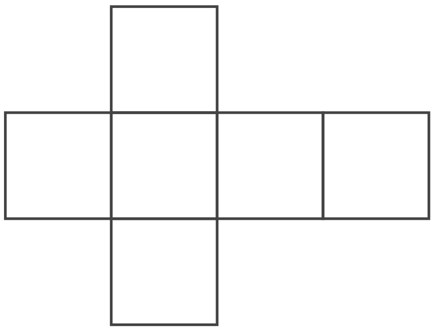
5. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Elementos de los cuerpos geométricos

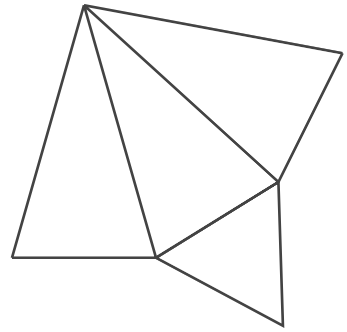
Representación	Nombre	N.º de superficies curvas	N.º de superficies planas	N.º de aristas		N.º de vértices
				Basales	Laterales	
	Prisma recto de base rectangular					
						
	Cilindro circular recto					
						
		1	0	0	0	0

6. Escribe el nombre específico del poliedro que corresponde a cada desarrollo plano.

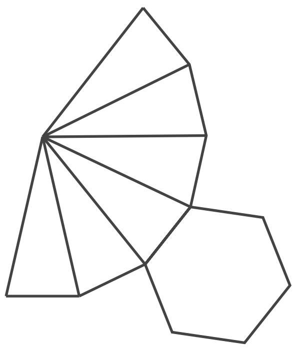
a.



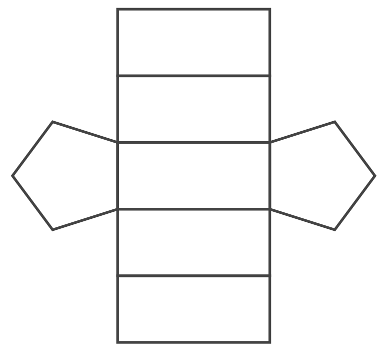
d.



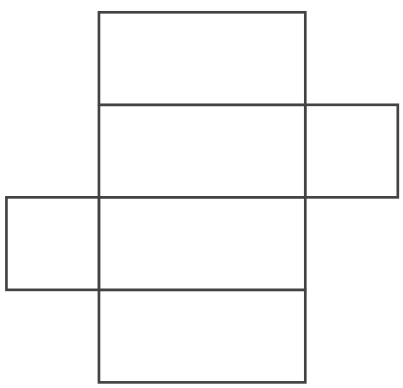
b.



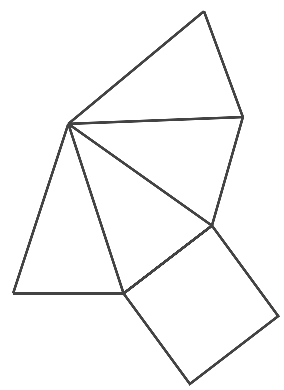
e.



c.



f.



7. Calcula el volumen de cada cuerpo geométrico descrito.
   a. Prisma pentagonal regular de 5,5 cm de arista basal, 3,79 cm de apotema basal y 10 cm de altura.
   b. Pirámide hexagonal regular de 9 cm de arista basal, 7,79 cm de apotema basal y 12 cm de altura.
   c. Cilindro circular recto de 25 cm de diámetro y 17 cm de altura.

8. Resuelve los siguientes problemas.
   a. Si se hace girar una semicircunferencia de 15 cm de diámetro alrededor de su lado recto se obtiene una esfera. ¿Cuál es el volumen de la esfera?
   b. ¿Cuántos mililitros de agua puede contener un vaso de papel cónico de 4,5 cm de radio y 10 cm de altura?
   c. ¿Cuál es la diferencia de volumen entre un prisma de base cuadrada de 30 cm de arista basal y 45 cm de altura y un cilindro inscrito en él?

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante
Trimestres 2 y 3

2022

De la mano con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)