REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante
Trimestre I

$$A_T = 2\pi\,(rh + r^2)$$

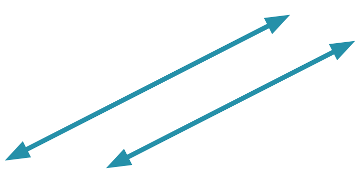
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

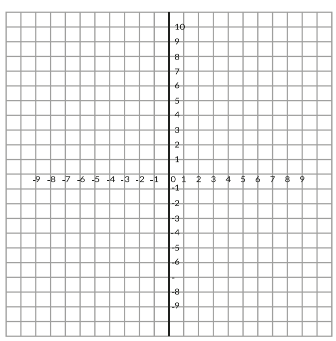
Factor literal a,x,y,b

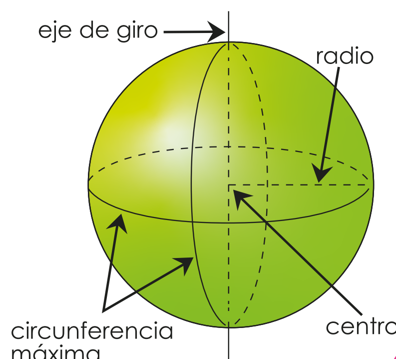
Signo +

$$\frac{3ax^9y^5}{25b}$$

Coeficiente numérico







$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Material para validación - 2022

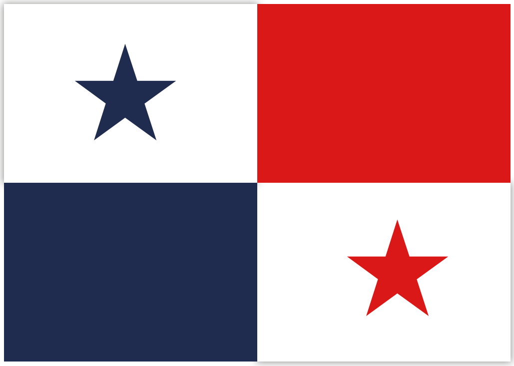
REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mediante la Ley 34 de 1949, reformada con la Ley 2 de 2012, se estableció que Panamá adopta como Símbolos de la Nación: la Bandera, el Himno y el Escudo. A partir de dicha Ley se sustituyó la denominación de "símbolos patrios" por "Símbolos de la Nación". Asimismo, con la Ley se creó la Comisión Nacional de los Símbolos de la Nación (Conasina), cuya función principal es promover el uso adecuado de los Símbolos de la Nación.

Himno

Bandera



Escudo

Autores

Letra: Jerónimo Ossa E.

Música: Santos Jorge A.

Confección: María Ossa de Amador

Diseño: Manuel Encarnación Amador

Concepto: Nicanor Villalaz L.

Diseño y pintura: Max Lemm B.

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante 2022

Ministra de Educación	Su Excelencia Maruja Gorday de Villalobos
Viceministra Académica de Educación	Su Excelencia Zonia Gallardo de Smith
Viceministro Administrativo de Educación	Su Excelencia José Pío Castillero
Viceministro de Infraestructura de Educación	Su Excelencia Ricardo Sánchez
Secretario General	Ricardo Alonso Vaz Wilky
Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa	Carmen Heredia Reyes Recuero **Directora Nacional** Yovany Guerra G. **Coordinador Nacional de Matemática**
Dirección Nacional de Formación y Perfeccionamiento Docente	Anabella Yepes Martínez **Directora Nacional**
Equipo de contextualizadores	Jesús Domingo Chacón Pinto Daniel Edil Herrera Muñoz Manuel Antonio Herrera Herrera Guillermo Castillo
Evaluación técnica	Yovany Guerra G.
Coordinación editorial	Esteban Ureña Salazar
Edición	Ana Gabriela Rojas Jiménez
Corrección de estilo	Matilde H. de Loo
Diagramación	Orlando Villalta Solano
Conceptualización de portada	Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa Aracelly Agudo
Coordinación del Proyecto	Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)

BID Banco Interamericano de Desarrollo | OEI

La serie Panamática ha sido producido gracias a la colaboración del Ministerio de Educación del Gobierno de El Salvador, a través del proyecto ESMATE, material diseñado para Matemática con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Este material didáctico fue posible con el respaldo de los recursos aportados por el Programa Mejorando la Eficiencia y Calidad del Sector Educativo (PN-L1143), Contrato de Préstamo n.° 4357/OC-PN con el Banco Interamericano de Desarrollo, a través del componente Apoyo Pedagógico Integral y Continuo.

La serie ha sido distribuida a estudiantes panameños, en centros educativos oficiales del país.

ISBN: 978-9962-737-94-0

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Estimados jóvenes:

Estamos contentos y complacidos de volver a verles junto a sus compañeros y profesores. Las clases interactivas, dinámicas, de manera cooperativa y colaborativa permitirán que todos podamos avanzar juntos y hacer del aprendizaje un espacio entretenido y enriquecedor.

La educación tiene el potencial de transformar sus vidas y permitirles más oportunidades para participar en la nueva sociedad del conocimiento y de las tecnologías de la información.

La comprensión lectora, junto con el desarrollo del pensamiento matemático y las habilidades de pensamiento abstracto, son factores clave para progresar en el desarrollo de todas las asignaturas y elegir el tipo de bachillerato que les gustaría estudiar cuando culminen sus estudios de Premedia.

Además, una educación de calidad es también más humana, más inclusiva y altruista; contribuye en la formación de ciudadanos íntegros, solidarios y comprometidos con el futuro de su familia, de su comunidad y de la sociedad. Les ofrece oportunidades, a todos, para mejorar sus competencias a su ritmo, con sus habilidades, sin dejar a nadie atrás; es permanente, equitativa e inclusiva.

Queridos jóvenes, el futuro los espera para que puedan concretar sus metas y alcanzar sus sueños de ser grandes hombres y mujeres, productivos y constructores de una mejor sociedad. Que este retorno a clases fortalezca todas sus competencias y les garantice una formación integral con calidad.

Éxitos en el año escolar 2022.

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Estructura del libro

Secciones de la lección y las clases

Título de la lección

Título de la clase

Problema

En este primer momento de cada clase, se solicita al estudiante que piense una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido por desarrollar.

Solución

En el segundo momento de la clase, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión

En el tercer momento didáctico, se presenta el contenido de manera formal. Se relacionan los dos primeros momentos para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Observa cómo se hace

Esta sección propone ejemplos de ejercicios resueltos para contribuir a la comprensión del procedimiento relativo a los contenidos de la **Conclusión**.

Práctica

En el último momento didáctico se incluyen ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Clases especiales

Repasa tus conocimientos

Este programa aparece siempre como la primera clase de una lección. Propone ejercicios para activar conocimientos previos sobre los temas de la lección.

Practica lo aprendido

Presenta ejercicios al final de cada lección, que integran los contenidos desarrollados en las clases.

Distribución de las clases

Este primer tomo se propone para el primer trimestre del curso, y está compuesto por 5 unidades didácticas. Cada unidad está formada por lecciones, y cada lección, por clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección, y el segundo, la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 correspondiente a la lección 2 se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 **Título de la clase**

Indica el número de clase

Secciones especiales

Recuerda

Activa contenidos de clases, unidades o grados anteriores que son necesarios para comprender el tema desarrollado.

¿Qué pasaría?

Aborda casos particulares relacionados con el contenido de las secciones **Conclusión** y **Observa cómo se hace**.

Trabajo colaborativo

Asigna tares de investigación o ampliación de conocimientos con el fin de fomentar el trabajo en equipo.

¡Atención!

Presenta pistas, recomendaciones o información adicional para resolver los ejercicios propuestos o comprender los ejemplos desarrollados.

Datos interesantes

Proporciona datos complementarios de diverso tipo (histórico, cultural, técnico), relacionados con los contenidos desarrollados durante la clase.

Desarrollo sostenible

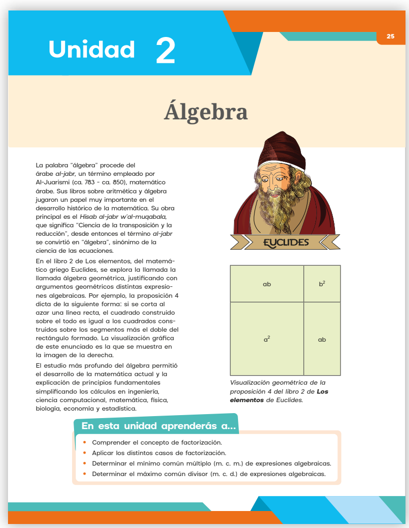
Propone textos informativos y acciones posibles en relación con el desarrollo sostenible, específicamente en cuanto al clima, la producción y el consumo responsables, el trabajo decente, el crecimiento económico, la igualdad de género, la salud y el bienestar.

Inicios de unidad

Se indica el número de unidad así como el tema central que se desarrollará durante las siguientes lecciones.

Se presenta una introducción general al tema por estudiar, para contextualizarlo en la historia de la cultura y de la matemática.

Finalmente se incluyen las habilidades por desarrollar durante la unidad.


Unidad 2

Álgebra

La palabra "álgebra" procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi (ca. 783 - ca. 850), matemático árabe. Sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, que significa "Ciencia de la transposición y la reducción", desde entonces el término *al-jabr* se convirtió en "álgebra", sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.

En el libro 2 de Los elementos, del matemático griego Euclides, se explora la llamada la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas. Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.

El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.

Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de ***Los elementos*** *de Euclides.*

En esta unidad aprenderás a...

- Comprender el concepto de factorización.
- Aplicar los distintos casos de factorización.
- Determinar el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de expresiones algebraicas.
- Determinar el máximo común divisor (m. c. d.) de expresiones algebraicas.

Trabaja en tu cuaderno

Este ícono aparece en todas las clases de **Repasa tus conocimientos** y **Practica lo aprendido**, además de las secciones **Practica** de todas las clases. Su propósito es recordarle al estudiante que debe resolver todos los ejercicios en su cuaderno.

Trabaja en **tu cuaderno**

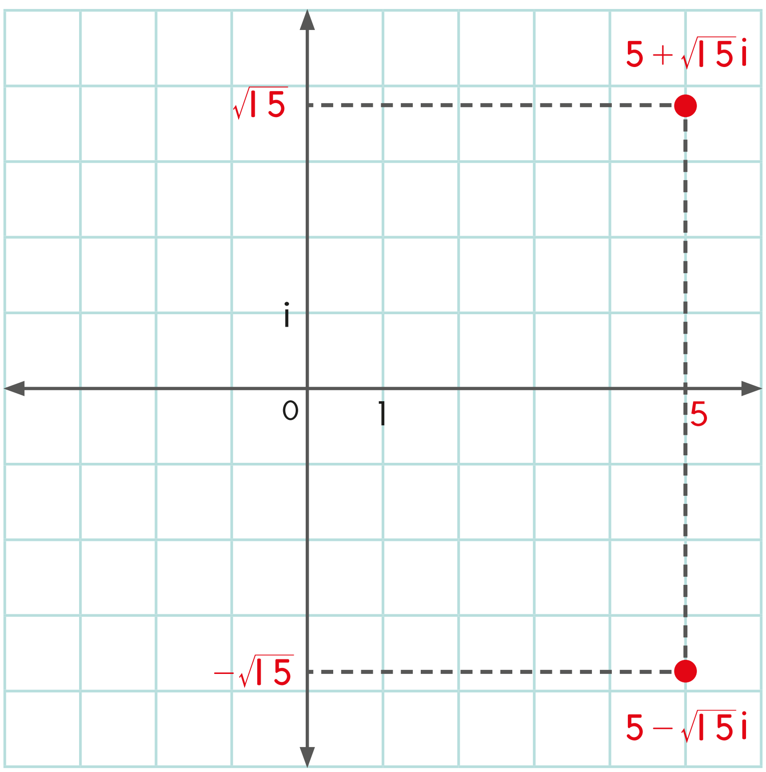
Índice

Unidad 1

Aritmética

Los números complejos nacen a partir de la necesidad del ser humano de encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas cuyas raíces no pertenecían al conjunto de los números reales hasta entonces conocidos. El primer trabajo que contempla estos números pertenece a Girolamo Cardano en el año 1545, cuando resolvió la ecuación $x(10 - x) = 40$, y obtuvo como resultado $5 \pm \sqrt{15}\,i$. Sin embargo, la primera raíz cuadrada negativa de la que se tiene registro, es más antigua y corresponde a la que calculó Herón de Alejandría hacia el año 50 a. C., quien intentó calcular $\pm\sqrt{81 - 144}$, pero la consideró imposible y se dio por vencido. Leonhard Euler introdujo la notación que utilizamos en la actualidad para trabajar con este tipo de números, definiendo que $\sqrt{-1} = i$; él expresó que estos números son imposibles (llamados imaginarios i por Cardano) porque solo existen en la imaginación. En 1637 René Descartes introduce la forma utilizada en la actualidad **a + bi** para expresar los números complejos.

Plano Complejo



En esta unidad aprenderás a...

- Conocer sobre el concepto y la definición del conjunto de los números complejos.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.
- Calcular raíces cuadradas de números negativos.
- Representar la gráfica de números complejos.
- Realizar operaciones con números complejos en el plano complejo.

Los números complejos

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Copia la actividad en tu cuaderno y une con una línea el nombre de cada conjunto numérico con su representación.

Conjunto de los números naturales	$\mathbb{Q}$
Conjunto de los números enteros	$\mathbb{I}$
Conjunto de los números racionales	$\mathbb{Z}$
Conjunto de los números irracionales	$\mathbb{R}$
Conjunto de los números reales	$\mathbb{N}$

2. Copia la tabla en tu cuaderno y marca con un gancho (✓) los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número.

	3,6	1	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{-6}$	$3,5\overline{3}$	$-\sqrt{6}$	-5	π	$\sqrt{9}$	$\sqrt[3]{-8}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{I}$										
$\mathbb{R}$										

3. Determina el valor de cada raíz.

a. $\sqrt{81}$

b. $\sqrt[3]{-8}$

c. $\sqrt{28}$

d. $-\sqrt{64}$

e. $\sqrt[3]{27}$

f. $\sqrt{125}$

4. Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios.

a. $(x - 1) + (5x - 5)$

b. $(3a + 4) - (a + 1)$

c. $(6n - 8) + (2n + 2)$

d. $(4b^3 + 3) - (4b^3 + 8)$

e. $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) + (3x^2 + 4)$

f. $\left(\frac{3}{2}y - 1\right) - \left(-13y + \frac{9}{7}\right)$

5. Multiplica los siguientes polinomios.

a. $3a^3 \cdot (-3a)$

b. $7x^2 \cdot 4x^2$

c. $y(9y - 3)$

d. $-7d^5(3d^3 - 1)$

e. $(4z - 3)(z - 1)$

f. $(5b + 9)(3b - 3)$

1.2 El conjunto de los números complejos

Problema

Calcula las siguientes raíces cuadradas:

$$\sqrt{49} \quad \sqrt{100} \quad \sqrt{225} \quad \sqrt{-16} \quad \sqrt{-81} \quad \sqrt{-25}$$

Solución

Observa el cálculo de cada raíz cuadrada:

a. $\sqrt{49}$ → Como $7^2 = 49$, se determina que $\sqrt{49} = 7$.

b. $\sqrt{100}$ → Como $10^2 = 100$, se determina que $\sqrt{100} = 10$.

c. $\sqrt{225}$ → Como $15^2 = 225$, se determina que $\sqrt{225} = 15$.

d. $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-81}$ y $\sqrt{-25}$ → Como ningún número real elevado a la 2 puede dar como resultado un número negativo, no es posible determinar en el conjunto de los números reales la raíz cuadrada de estos números.

Conclusión

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por **i**, al número que satisface la ecuación $\mathbf{i^2 = -1}$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}$$

Dados dos números reales cualesquiera **a** y **b**, el número escrito de la forma **z = a + bi** se llama **número complejo**.

Al conjunto de todos los números complejos se le denota por $\mathbb{C}$.

Si **z = a + bi** es un número complejo, puede suceder alguno de los siguientes casos:

1. Si b = 0 entonces **z** es un número real.
2. Si **a** y **b** son diferentes de cero entonces **z** se llama **número imaginario**.
3. Si a = 0 y b ≠ 0 entonces **z = bi** se llama **número imaginario puro**.

Al número **a** se le llama **parte real** de **z**, y se denota por **Re(z)**; mientras que al número **b** se le llama **parte imaginaria** de **z**, y se denota por **Im(z)**. Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo: Determina Re(z) e Im(z) en el número complejo **z = 5 - 7i**.

$$\mathrm{Re}(z) = 5 \qquad \mathrm{Im}(z) = -7$$

Recuerda

Las partes de la radicación son:

$$\underset{\text{índice}}{n}\sqrt{a} = b$$

índice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← raíz

radicando (a)

¿Qué pasaría?

Si la radicación que se calcula tiene índice impar y radicando negativo, la raíz es negativa.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Investiguen cuál es la unidad imaginaria del equivalente a 1 en los números reales.

Recuerda

Toda resta puede expresarse como una suma.

Ejemplo:

$$5 - 7 = 5 + (-7)$$

¿Qué pasaría?

Si un número se escribe de la forma:

-2i + 10

Recuerda que la suma es conmutativa y es equivalente a:

10 + (-2i)

Observa cómo se hace

Observa cómo se determina Re(z) (parte real) e Im(z) (parte imaginaria) de cada número complejo:

1. $z = \sqrt{2} + i$

   $Re(z) = \sqrt{2} \qquad Im(z) = 1$

2. $z = \frac{-4 + 9i}{2}$

Primero reescribe z, así:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, determina la parte real y la parte imaginaria:

$$Re(z) = -2 \qquad Im(z) = \frac{9}{2}$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Observa cada número y anota en tu cuaderno los que no pertenecen al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) únicamente al conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).
   - **a.** $z = -2i$
   - **b.** $z = 8 - 9i$
   - **c.** $z = 6$
   - **d.** $z = \frac{-5}{3}$
   - **e.** $z = \sqrt{3}\,i$
   - **f.** $z = \frac{-4}{3} + \sqrt{8}\,i$

2. Escribe en tu cuaderno los números que son imaginarios puros.

   $z = 2 - 10i \qquad z = 9i \qquad z = -\frac{12}{7}i \qquad z = \sqrt{7} \qquad z = -14i \qquad z = -7 - 18i$

3. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de **z**.
   - **a.** $z = -3 + 8i$
   - **b.** $z = \frac{1}{2} - 6i$
   - **c.** $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$
   - **d.** $z = 11i$
   - **e.** $z = 3$
   - **f.** $z \quad \frac{-12 - i}{3}$

4. Escribe los números complejos que se forman según los datos dados.
   - **a.** $Re(z) = 5 \qquad Im(z) = \frac{1}{2}$
   - **b.** $Re(z) = 0 \qquad Im(z) = 17$
   - **c.** $Re(z) = \frac{7}{6} \qquad Im(z) = -10$
   - **d.** $Re(z) = -15 \qquad Im(z) = 0$
   - **e.** $Re(z) = 7 \qquad Im(z) = -5$
   - **f.** $Re(z) = -\sqrt{11} \qquad Im(z) = \sqrt{2}$

5. Simplifica cada expresión numérica. Luego, determina la parte real y la parte imaginaria de **z**.
   - **a.** $z = -1 + 6 + 5i$
   - **b.** $z = \frac{10}{3} + 4i + 1$
   - **c.** $z = -6 + 4i - 6i$
   - **d.** $z = \frac{-7}{9} + 2i + \frac{4}{9}i$
   - **e.** $z = 7 + 4i - 8$
   - **f.** $z = \frac{6}{7} + i - \frac{1}{2}$
   - **g.** $z = -5i + 1 + 5i$
   - **h.** $z = \frac{9}{5}i - \frac{7}{5} + 7i$

Recuerda

La forma de un número complejo es:

$$z = a + bi$$

Parte imaginaria: bi

Parte real: a

1.3 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema

Si $\mathbf{z = 3 + 7i}$ y $\mathbf{w = 2 - 3i}$, ¿cuál es el resultado de cada operación?

- Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

a. $z + w$ **b.** $z - w$ **c.** zw

Recuerda

Cuando se representa una multiplicación entre 2 o más variables no es necesario escribir el símbolo de multiplición. Por ejemplo:

$z \bullet w = zw$

Solución

a. Resuelve la suma de números complejos.

$z + w = (3 + 7i) + (2 - 3i)$ → Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

$= 3 + 7i + 2 - 3i$ → Elimina los paréntesis que agrupan cada número complejo.

$= (3 + 2) + (7 - 3)i$ → Suma los términos que sean "semejantes".

$= 5 + 4i$

b. Resuelve la resta de números complejos.

$z - w = (3 + 7i) - (2 - 3i)$ → Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

$= 3 + 7i - 2 + 3i$ → Elimina los paréntesis que agrupan cada número complejo cambiando los signos de la parte real e imaginaria de w.

$= (3 - 2) + (7 + 3)i$ → Resta los términos que sean "semejantes".

$= 1 + 10i$

c. Resuelve la multiplición de números complejos.

$zw = (3 + 7i)(2 - 3i)$ → Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

$= 3 \bullet 2 + [3 \bullet -3 + 7 \bullet 2]i + 7(-3)i^2$ → Desarrolla la multiplicación como producto de binomios.

$= 6 + (-9 + 14)i - 21 \bullet -1$ → Resuelve las operaciones y toma en cuenta que $i^2 = -1$ y sustituye.

$= 6 + 21 + 5i$ → Suma los términos que sean "semejantes".

$= 27 + 5i$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Recuerda

Para multiplicar variables iguales se suman los exponentes y se mantiene la variable.

Por ejemplo:

$i \bullet i = i^{1+1} = i^2$

Conclusión

La **suma** y **resta** de los números complejos **z = a + bi** y **w = c + di** se denotan por **z + w** y **z - w** respectivamente, y se definen:

1. $z + w = (a + c) + (b + d)i$
2. $z - w = (a - c) + (b - d)i$

El **producto** de los números complejos **z = a + bi** y **w = c + di** se denota por **zw** y se define:

- $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

El **complejo conjugado** de **z = a + bi**, o simplemente conjugado de **z**, es otro número complejo denotado por $\bar{z}$ tal que $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplos: Calcula $z + w$, $z - w$, zw y $\bar{z}$ para $z = -4 + 2i$ y $w = 7 - i$.

a. $z + w = (-4 + 7) + [2 + (-1)]i = 3 + i$

b. $z - w = (-4 - 7) + [2 - (-1)]i = -11 + 3i$

c. $zw = [-4 \bullet 7 - 2 \bullet (-1)] + [(-4) \bullet (-1) + 2 \bullet 7]i$
$= [-28 + 2] + [4 + 14]i$
$= -26 + 18i$

d. $\bar{z} = -4 - 2i$

¡Atención!

El **complejo conjugado de un número** se estudia en este momento, ya que se requiere su dominio antes de estudiar el procedimiento que se utiliza para dividir números complejos y de dónde se deriva.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(i + 9) + (10 - 3i) = (9 + 10) + [1 + (-3)]i = 19 + (-2)i = 19 - 2i$

b. $(8i - 7) - (i - 4) = [-7 - (-4)] + (8 - 1)i = -3 + 7i$

c. $(1 + 9i)(4 + 8i) = [1 \bullet 4 - 9 \bullet 8] + [1 \bullet 8 + 9 \bullet 4]i$
$= [4 - 72] + [8 + 36]i$
$= -68 + 44i$

Recuerda

La suma es conmutativa:

$i + 9 = 9 + i$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$, zw, $\bar{z}$ y $\bar{w}$.
   a. $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
   b. $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
   c. $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
   d. $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
   e. $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
   f. $z = -3 + 8i$, $w = 2$
   g. $z = 1 + 3i$, $w = -7$
   h. $z = -5 - 4i$, $w = 8 + 6i$

2. Resuelva las siguientes operaciones.
   a. $(-2 + 8i) + (5 - 9i)$
   b. $\left(1 - \frac{2}{3}i\right) - \left(\frac{1}{3} + 10i\right)$
   c. $(-18 + 4i)(2 + 10i)$
   d. $(6 + 7i) - (3 + 4i)$
   e. $(9 + 6i)(4 + 2i)$
   f. $(1 + 6i) + (9 - 9i)$

1.4 División de números complejos

Problema

Sean **z = a + bi** y **w = c + di**. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Recuerda

Una fracción cuyo numerador y denominador sean iguales equivale a 1.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{2} = 1 \text{ y } \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = 1$$

Solución

1. Multiplica $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$, toma en cuenta que, como $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = 1$, la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

2. Efectúa los productos:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{[ac-(-bd)]+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

3. Por lo tanto el resultado de la división de **z** entre **w** es el siguiente número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

¡Atención!

El desarrollo de la multiplicación de dos números complejos es el siguiente:

$$(c + di)(c - di) =$$
$$(c^2 - -d^2) + (cd - dc)i =$$
$$(c^2 + d^2) + 0i =$$
$$c^2 + d^2$$

Conclusión

Sean los números complejos z = a + bi y w = c + di. La **división** de **z** entre **w** se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo: Divide 4 + 3i entre 5 - i.

Aplica el procedimiento indicado, así:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1)}{5^2+1^2} + \frac{-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5}{5^2+1^2}$$
$$= \frac{20+(-3)}{25+1} + \frac{4+15}{25+1}i = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$.

Observa cómo se hace

Resuelve la operación $\dfrac{2+4i}{-3-9i}$.

$$\frac{2+4i}{-3-9i} = \frac{2\cdot(-3)+4\cdot(-9)}{(-3)^2+(-9)^2} + \frac{-2\cdot(-9)+4\cdot(-3)}{(-3)^2+(-9)^2}i$$ → Aplica la fórmula de la división entre números complejos.

$$= \frac{-6+(-36)}{9+81} + \frac{18+(-12)}{9+81}i$$ → Resuelve las operaciones planteadas en cada fracción.

$$= \frac{-42}{90} + \frac{6}{90}i$$ → Simplifica las fracciones.

$$= \frac{-7}{15} + \frac{1}{15}i$$

Por lo tanto, $\dfrac{2+4i}{-3-9i} = \dfrac{-7}{15} + \dfrac{1}{15}i$.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Para cada caso, calcula $\dfrac{z}{w}$.

a. $z = 3$, $w = 2 + 4i$

b. $z = -7i$, $w = 6 - 2i$

c. $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$

d. $z = 4 - 2i$, $w = -5i$

e. $z = 5$, $w = 2 - 7i$

f. $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$

g. $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$

h. $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

i. $z = 2$, $w = -2 - 3i$

j. $z = 3 - i$, $w = -9 - 6i$

k. $z = -2 + 9i$, $w = -1$

l. $z = -5i$, $w = -7 + 6i$

m. $z = -9 - 6i$, $w = 3$

n. $z = i$, $w = -9 - 5i$

2. Resuelva las siguientes divisiones de números complejos.

a. $(-15 - 5i) \div (1 - 6i)$

b. $(10 - 4i) \div (-10 - 2i)$

c. $(-8 + i) \div (6 + 9i)$

d. $(5 - 3i) \div 3$

e. $\left(\frac{3}{4} + i\right) \div \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\right)$

f. $(6 - 7i) \div (6 + 9i)$

g. $(-3 + 7i) \div (1 + 8i)$

h. $\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2}i\right) \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)$

i. $(18 + 7i) \div 3i$

j. $(-9 + 9i) \div (3 + i)$

k. $(2 - 4i) \div (-8 - 2i)$

l. $(-9 + 8i) \div (3 - 6i)$

m. $[(6 + 2i) + (-16 + 7i)] \div 3$

n. $[(-3 + 5i) \div (-7 - 7i)] - (-1 + 8i)$

3. Sean $z = 6 + 2i$ y $w = 2$; realiza lo siguiente.

a. Determina la división $\dfrac{z}{w}$.

b. Determina la división $\dfrac{w}{z}$.

c. Determina el complejo conjugado del resultado de dividir **z** entre **w**.

d. Determina el complejo conjugado del resultado de dividir **w** entre **z**.

e. Encuentra el resultado de dividir $\overline{z}$ entre $\overline{w}$.

f. Encuentra el resultado de dividir $\overline{w}$ entre $\overline{z}$.

1.5 Raíces cuadradas de números negativos

Problema

1. Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$.

Solución

Se busca un número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a −5; observa que −5 puede escribirse como el producto $5 \cdot (-1)$, entonces: $x^2 = 5 \cdot (-1)$.

Como $-1 = i^2$ se sustituye en la expresión obtenida anteriormente:

$$x^2 = 5 \cdot i^2 = 5i^2$$

De lo anterior se cumple que, los valores que satisfacen la ecuación $x^2 = 5i^2$ son:

$$x = \sqrt{5}\,i \text{ o } x = -\sqrt{5}\,i$$

Por lo tanto el valor de **x** se comprueba de la siguiente forma:

a. $(\sqrt{5}\,i)^2 = (\sqrt{5})^2 i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$

b. $(-\sqrt{5}\,i)^2 = (-\sqrt{5})^2 i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$

Por lo tanto, los valores de **x** que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Conclusión

Sea **a** un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$$

Ejemplo: Escribe los siguientes números en la forma **a + bi**:

a. $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$

Primero escribe las raíces de los números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$:

$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = (\sqrt{3}\,i)(\sqrt{5}\,i)$ → Resuelve la multiplicación.

$= \sqrt{15}\,i^2$ → Sustituye i^2 por su valor equivalente -1.

$= \sqrt{15} \cdot (-1)$ → Resuelve la multiplicación.

$= -\sqrt{15}$

Por lo tanto:

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = -\sqrt{15}$$

Recuerda

Se llama unidad imaginaria, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}$$

Datos interesantes

Toma en cuenta que en los números complejos se multiplican los radicandos hasta que se sustituya -1 por su valor equivalente **i**. Por lo tanto:

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5} \neq \sqrt{15}$$

Observa cómo se hace

Escribe los siguientes números en la forma **a + bi**:

a. $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$

Primero, escribe las raíces de los números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$:

$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \text{ Sustituye } \sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i.$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}}\,i \quad \rightarrow \text{ Aplica la propiedad de la raíz de un cociente.}$$

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i} \quad \rightarrow \text{ Sustituye } \sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i} \cdot \left(\frac{-i}{-i}\right) \quad \rightarrow \text{ Multiplica numerador y denominador por el conjugado de } \mathbf{i}.$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{-i}{-i^2}\right) \quad \rightarrow \text{ Aplica propiedades de radicación y potenciación.}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{-i}{1}\right) \quad \rightarrow \text{ Sustituye } -i^2 \text{ por 1 y resuelve la multiplicación.}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{5}}\,i$$

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

¿Qué pasaría?

Como $i^2 = -1$, al multiplicar -1 por i^2 se obtiene:

$$-i^2 = 1$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de **-a**.

a. $a = 2$

b. $a = 4$

c. $a = 3$

d. $a = 25$

e. $a = 7$

f. $a = \dfrac{1}{3}$

g. $a = 10$

h. $a = \dfrac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma **a + bi**.

a. $\sqrt{-7}\sqrt{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$

c. $\sqrt{7}\sqrt{-2}$

d. $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$

e. $\sqrt{-3}\sqrt{-7}$

f. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

g. $\sqrt{-5}\sqrt{-10}$

h. $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}$

i. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}$

1.6 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina la parte real y la parte imaginaria de cada número complejo.
   a. $z = 4 - 6i$
   b. $z = -1 + \frac{9}{2}i$
   c. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$
   d. $z = 13$
   e. $z = 8i$
   f. $z = \frac{16 + 2i}{10}$

2. Forma los números complejos utilizando la información adjunta.
   a. $Re(z) = -\frac{2}{3}$ $\quad Im(z) = -10$
   b. $Re(z) = -19$ $\quad Im(z) = 0$
   c. $Re(z) = 15$ $\quad Im(z) = -\frac{1}{6}$
   d. $Re(z) = 0$ $\quad Im(z) = -16$
   e. $Re(z) = -2$ $\quad Im(z) = 4$
   f. $Re(z) = \sqrt{7}$ $\quad Im(z) = -\sqrt{8}$

3. Resuelva las siguientes sumas.
   a. $(8 - 4i) + (-10 + 9i)$
   b. $\left(-\frac{1}{8} + \frac{9}{8}i\right) + \left(-2 - \frac{1}{8}i\right)$
   c. $(8 + i) + (100 - 14i)$
   d. $(-17 + 14i) + (15 - 13i)$
   e. $(-16 - 19i) + (14 + 30i)$
   f. $(13 - 24i) + (14 - 10i)$

4. Resuelva las siguientes restas.
   a. $(-8 + 6i) - (4 + i)$
   b. $\left(\frac{1}{3} - \frac{9}{7}i\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{10}{7}i\right)$
   c. $(-7 - 2i) - (-20 + 12i)$
   d. $(14 - 17i) - (-17 - 19i)$
   e. $(10 + 20i) - (13 - 18i)$
   f. $(-12 + 19i) - (-40 + 15i)$

5. Resuelva las siguientes multiplicaciones.
   a. $(5 + 4i)(4 + 3i)$
   b. $(8 - 8i)(6 - 2i)$
   c. $(-7 + 3i)(-1 - 4i)$
   d. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}i\right)\left(1 - \frac{6}{7}i\right)$
   e. $(-8 - 9i)(-10 + 7i)$
   f. $(1 - 2i)(-4 + 6i)$

6. Determina el conjugado de cada número complejo.
   a. $(7 - 7i)$
   b. $(1 + i)$
   c. $(-8 - 9i)$
   d. $\left(-\frac{7}{9} + \frac{10}{7}i\right)$
   e. $(-9 - 2i)$
   f. $(-18 + 10i)$

7. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$.
   a. $z = -3 - 3i$, $w = 12i$
   b. $z = 4$, $w = 9 + 6i$
   c. $z = 10 - 7i$, $w = -6 + 8i$
   d. $z = -5 - 7i$, $w = 10i$
   e. $z = -2 + 2i$, $w = 8 - 3i$
   f. $z = 5 - i$, $w = -7 - 2i$

8. Escribe los siguientes números en la forma **a + bi**.
   a. $\sqrt{3}\sqrt{-17}$
   b. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$
   c. $\sqrt{-2}\sqrt{3}$
   d. $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$
   e. $\sqrt{-7}\sqrt{-8}$
   f. $\frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{-3}}$

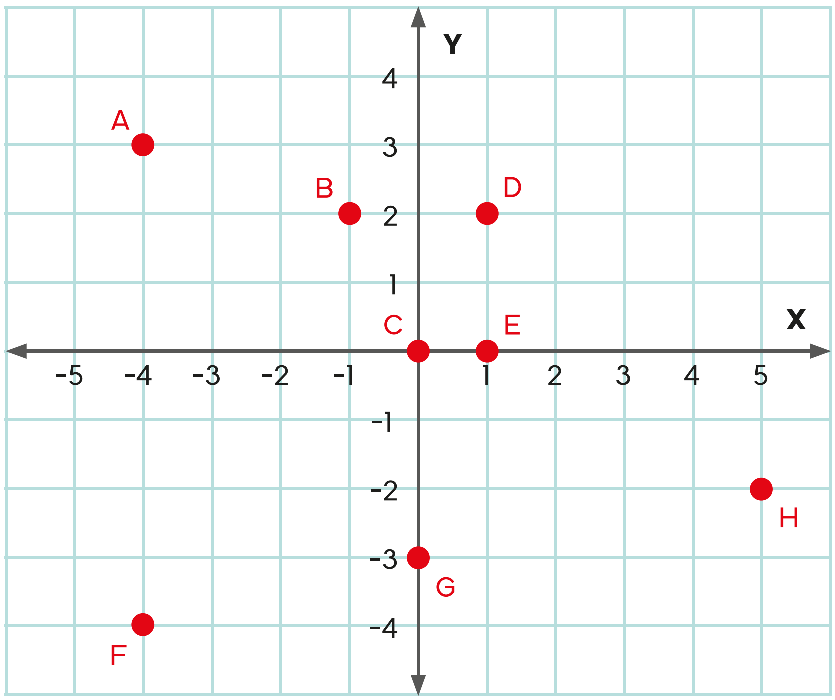
El plano complejo

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

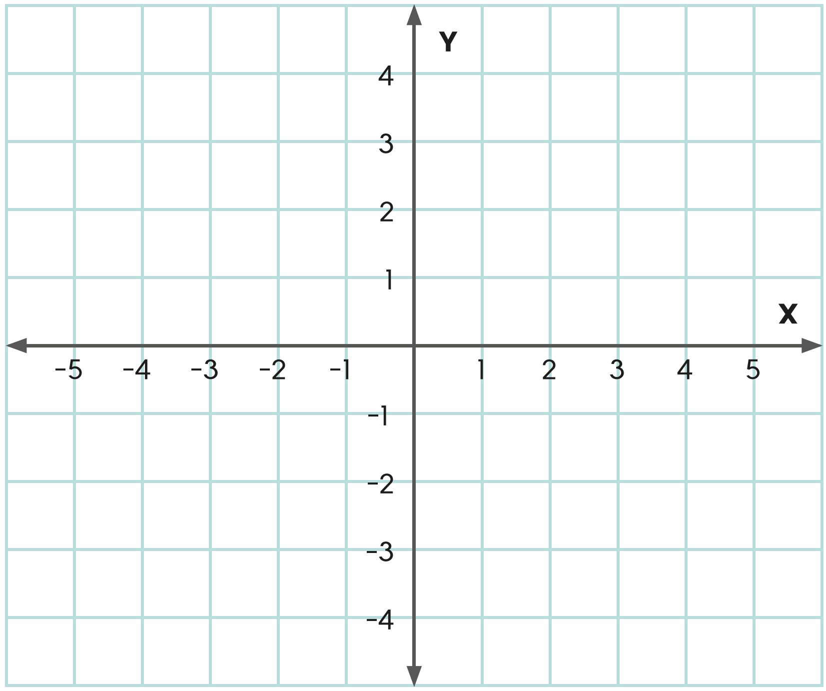
1. Observa el plano cartesiano y escribe en tu cuaderno los pares ordenados que corresponden a cada punto dibujado.

- A: ____________
- B: ____________
- C: ____________
- D: ____________
- E: ____________
- F: ____________
- G: ____________
- H: ____________



2. Dibuja en tu cuaderno un plano cartesiano como el de la figura y ubica los pares ordenados indicados.

a. P: (3, 4)
b. Q: (4, -1)
c. R: (2, 0)
d. S: (0, -4)
e. T: (3, -1)
f. U: (-5, 4)
g. V: (-1, 3)
h. W: (-2, -3)

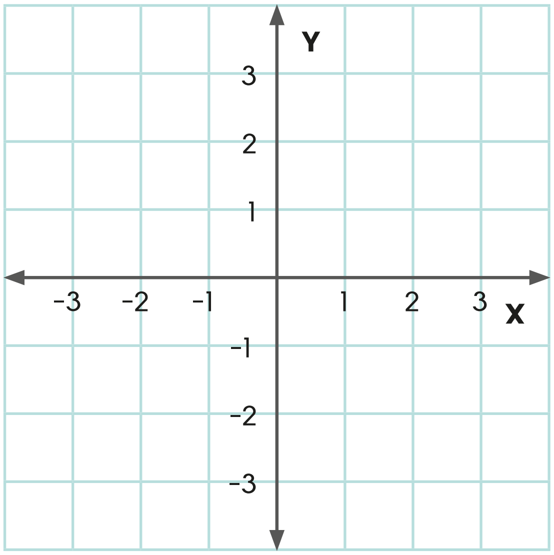


2.2 Representación gráfica de números complejos

Problema

En un plano cartesiano como el que se muestra a continuación, se requiere representar el número complejo 2 + 3i, por consiguiente se deben atender las siguientes instrucciones:

1. Se traza una línea vertical desde el número 2 colocado en el eje X.
2. Se traza una línea horizontal desde el número 3 colocado en el eje Y.
3. Se marca el punto de intersección de las líneas anteriores.

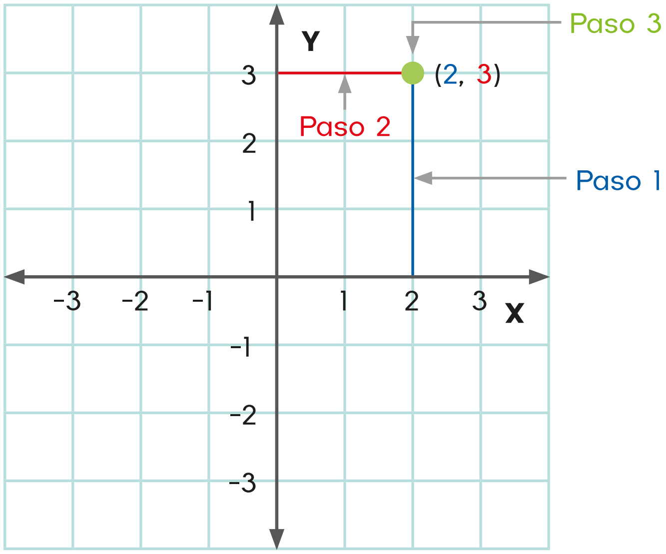


Datos interesantes

El francés René Descartes (1596-1650) le dio nombre al plano cartesiano y fue el primero en llamar "imaginarios" a los números complejos. Antes de él, las raíces cuadradas de números negativos se llamaron "ficticias", "absurdas", "falsas", o bien "sofisticadas" y "sutiles".

Solución

El número complejo 2 + 3i debe quedar representado en el plano cartesiano tal y como se indica.



Desarrollo sostenible

Leer detenidamente las indicaciones de tu docente, buscar el significado de las palabras que no comprendas y seguir los pasos que te solicita en un ejercicio, te permitirá interiorizar el tema en estudio.

El punto que marcaste en el plano cartesiano corresponde al número complejo **2 + 3i**. Donde en el eje **X** se ubica la parte real y en el **Y** la parte imaginaria.

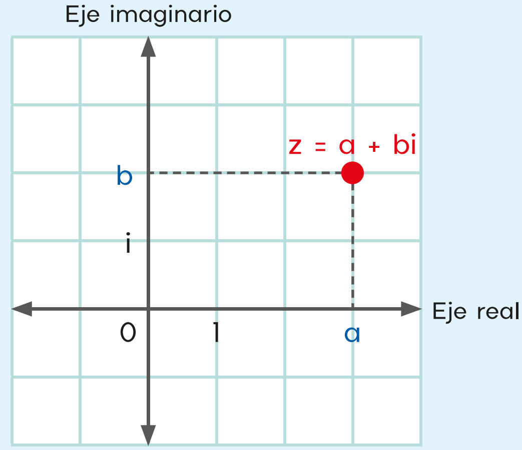
Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Diseñen el plano complejo en cartulina, papel periódico u otro material.
   b. Representen los siguientes puntos:
      - z = 4 + 3i
      - w = 3 - i
      - u = -6
      - v = -2 + i

Conclusión

Un número complejo **z = a + bi**, se puede representar en un plano cartesiano en donde la primera coordenada (eje X) corresponde a la parte real **(Re(z) = a)** del número **z**, y la segunda coordenada (eje Y) corresponde a la parte imaginaria (**Im(z) = b**) del número **z**.

El plano donde se ubican los números complejos se conoce como **plano complejo**. El eje horizontal se conoce como **eje real** y el eje vertical se conoce como **eje imaginario**.



Se define el **módulo del número complejo** z = a + bi, como la distancia de cada par ordenado al origen **O**(0,0) y al ser una distancia su valor siempre será positivo, se denota por |z|, y se calcula de la siguiente forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo: Determina el módulo del número z = 2 + 3i.

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$|z| = \sqrt{4 + 9}$$
$$|z| = \sqrt{13}$$

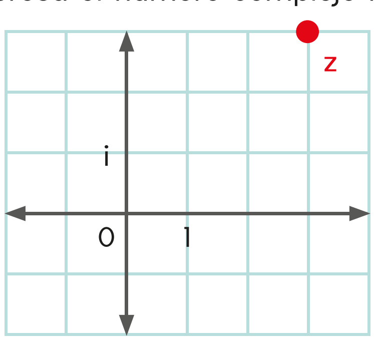
Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

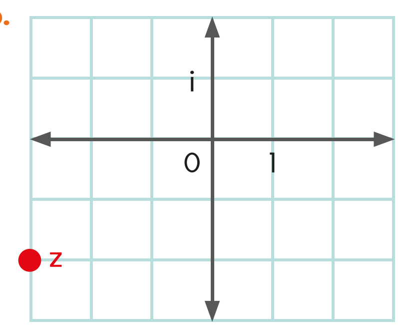
1. Represanta los siguientes números complejos como puntos en el plano complejo y determina su módulo.
   a. z = 7 + 3i
   b. z = 3 − i
   c. z = −4 − 2i
   d. z = 4
   e. z = −1 + 2i
   f. z = −4i

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

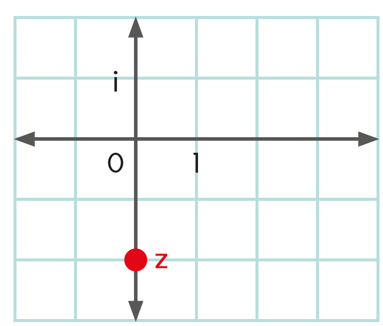
a.



b.



c.



2.3 Operaciones con números complejos en el plano complejo

Problema

Considerando los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 4i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

1. z **2.** w **3.** $w + z$ **4.** $w - z$ **5.** $2w$

Solución

1. $z = 2 + 2i$ se representa en el punto $(2, 2)$.
2. $w = 1 - 4i$ se representa en el punto $(1, -4)$.
3. Se calcula $w + z$:

   $(1 - 4i) + (2 + 2i) = 3 - 2i$

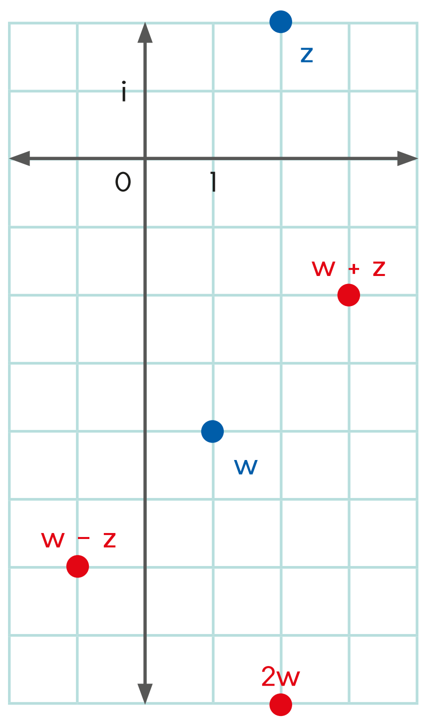
   Y se representa el punto $(3, -2)$.
4. Se calcula $w - z$:

   $(1 - 4i) - (2 + 2i) = -1 - 6i$

   Y se representa el punto $(-1, -6)$.
5. Se procede a calcular $2w$:

   $2(1 - 4i) = 2 - 8i$

   Ahora se representa el punto $(2, -8)$.



Conclusión

Dados dos números complejos $w = a + bi$ y $z = c + di$, se cumple que la **suma de números complejos** $w + z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Análogamente, la **resta de números complejos** $w - z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.

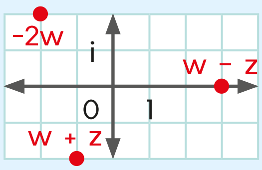
La **multiplicación de un número real por un número complejo** rw $(r \cdot w)$ equivale al número complejo representado por las coordenadas (ra, rb).

Ejemplo: Considerando $w = 1 - i$ y $z = -2 - i$, representa en el plano complejo los números:

a. $w + z = (1, -1) + (-2, -1) = (-1, -2)$

b. $w - z = (1, -1) - (-2, -1) = (3, 0)$

c. $-2w = (-2 \cdot 1, -2 \cdot -1) = (-2, 2)$

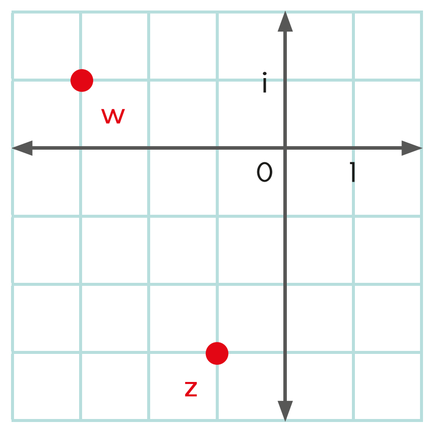


Observa cómo se hace

Observa los números complejos indicados en el plano de la derecha y calcula z + w, w − z y 4z.

Primero define los pares ordenados de los números complejos representados:

$$w = (-3, 1) \text{ y } z = (-1, -3)$$



a. Para calcular **z + w**, suma los pares ordenados de cada punto:

$$(-1 + (-3), -3 + 1) = (-4, -2)$$

b. Para calcular **z - w**, resta los pares ordenados de cada punto:

$$(-1 - (-3), -3 - 1) = (2, -4)$$

c. Para calcular **4z**, multiplica 4 por (-1, -3):

$$4(-1, -3) = (4 \cdot (-1), (4 \cdot (-3)) = (-4, -12)$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Considerando los números complejos z = 2 − i y w = 3 + 2i representa en un plano complejo cada valor solicitado.

a. z

b. w

c. w + z

d. w - z

e. z - w

f. 2z

g. -w

h. $\overline{z}$

i. $\overline{w}$

j. 2w − 3z

2. Utilizando los números complejos graficados en el plano complejo, calcula cada valor solicitado y anota el número complejo que representa.

a. w + z

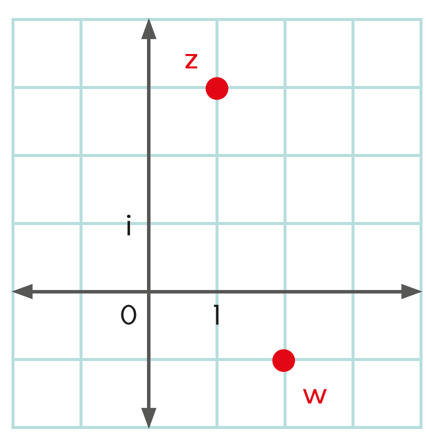
b. w − z

c. z − w

d. -w

e. $-\overline{w}$

f. 2w − z



2.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Representa los siguientes números complejos en el plano complejo y determina su módulo.

a. $z = -1 + 3i$

b. $z = -2i$

c. $z = -3$

d. $z = -3 - 7i$

e. $z = -10 - 7i$

f. $z = 4 + i$

g. $z = 7$

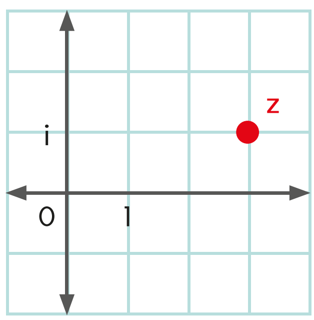
h. $z = 7 - 7i$

i. $z = 8$

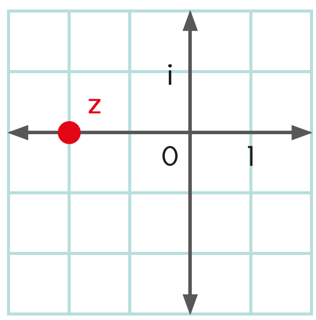
j. $z = 17 - 9i$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

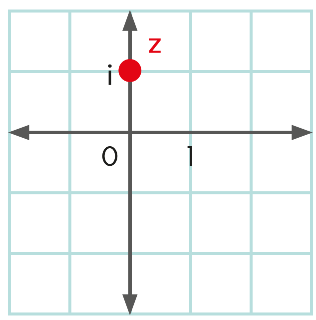
a.



b.



c.



3. Considerando los números complejos $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$ representa en un plano complejo cada valor solicitado.

a. z

b. w

c. $z + w$

d. $w - z$

e. $z - w$

f. $-3z$

g. $-10w$

h. $\overline{z}$

i. $\overline{w}$

j. $-w + 2z$

4. Utilizando los números complejos graficados en el plano complejo, calcula y ubica en el plano cada valor solicitado.

a. $z + 3w$

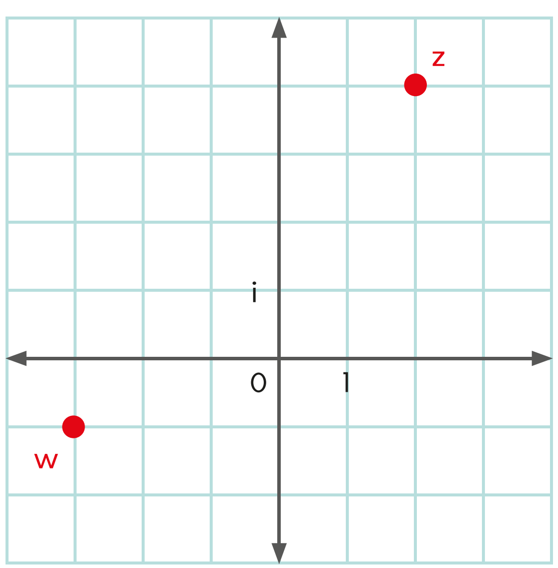
b. $6w - z$

c. $z - 4w$

d. $-3w$

e. $-7\overline{w}$

f. $9w - 5z$



Instrumento de Autoevaluación

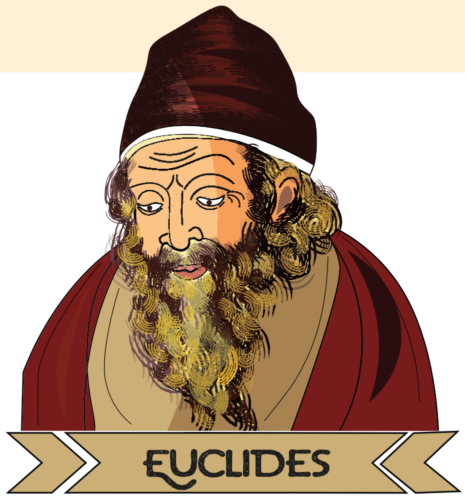
Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico las características de un número complejo.			
2. Represento simbólicamente el conjunto de los números complejos.			
3. Reconozco la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.			
4. Resuelvo sumas de números complejos.			
5. Calculo restas de números complejos.			
6. Determino el conjugado de un número complejo.			
7. Realizo divisiones de números complejos.			
8. Reconozco raíces de números negativos como equivalentes a números complejos.			
9. Construyo el plano complejo.			
10. Ubico puntos en el plano complejo con exactitud.			
11. Determino el módulo de un número complejo.			
12. Realizo operaciones de números complejos en el plano complejo.			

Unidad 2

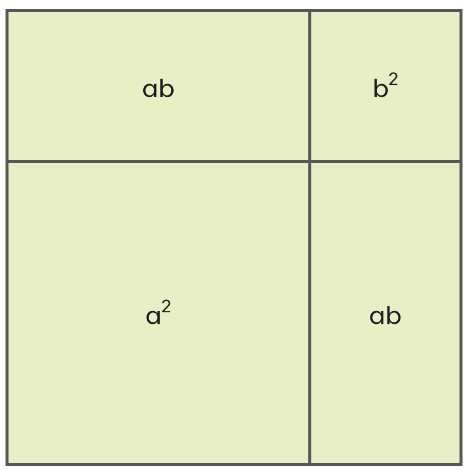
Álgebra

La palabra "álgebra" procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi (ca. 783 - ca. 850), matemático árabe. Sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, que significa "Ciencia de la transposición y la reducción", desde entonces el término *al-jabr* se convirtió en "álgebra", sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.



En el libro 2 de Los elementos, del matemático griego Euclides, se explora la llamada la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas. Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.

El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.



Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de ***Los elementos*** *de Euclides.*

En esta unidad aprenderás a...

- Comprender el concepto de factorización.
- Aplicar los distintos casos de factorización.
- Determinar el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de expresiones algebraicas.
- Determinar el máximo común divisor (m. c. d.) de expresiones algebraicas.

Factorización de polinomios

1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe el factor numérico y el factor literal de cada término algebraico.
   a. $-4x^7$
   b. wx^2
   c. $2xyz^6$
   d. -60

2. Anota la cantidad de términos que tiene cada expresión algebraica.
   a. $4x + 8x^3$
   b. $9a^3b^3c^3 - 6a^5c^2 + 4$
   c. $n - 6m$
   d. $-8abc$

3. Identifica monomios semejantes y escríbelos en tu cuaderno.
   a. $8y$, $-4y$
   b. a, b
   c. $3w$, $11w^2$
   d. $-4xy$, $3xy$

4. Resuelve las siguientes sumas y restas de monomios.
   a. $9a + 7a$
   b. $2x - y - 6x + 10y$
   c. $-2w - 8z + 8w + 3z$
   d. $-xy + 5xy$
   e. $9x + 30y + 7y + 7y - 5x$
   f. $4a + 5a - b + 20b - 4a$
   g. $45abc - 9abc$
   h. $8x^3yz^2 - 7z^2x^3y + (-x^3yz^2)$

5. Multiplica los siguientes monomios.
   a. $9a^3 \bullet 3b^7$
   b. $-2x^2y^6 \bullet 9y^9x^6$
   c. $7m^6n^8 \bullet (-7)$
   d. $-3w^4 \bullet (-6u^8)$
   e. $-2a^9b^6 \bullet 7ab$
   f. $2y \bullet 8y^4$
   g. $a^{27} \bullet -2a^{15}$
   h. $-9p^5qr^8 \bullet -3p^9r$

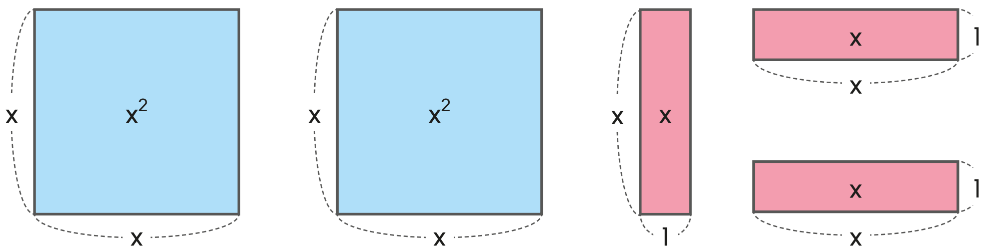
6. Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios.
   a. $(a^3 + 3a^2 + a + 5) + (-2a^3 + 4a^2 - 2a + 10)$
   b. $(-z^2w - 7zw + 9) + (z^3 - 9z^2w - 9zw + 3)$
   c. $(6x^3y^2 - 4y) + (8x^3y^2 + 6y - 11)$
   d. $(17z^5 + 2z^3 + 3z) + (8z^5 + z^3 - 2)$
   e. $(19a^3 + 70a^2 + 6a + 10) - (-7a^3 + 5a^2 - 3a + 15)$
   f. $(-5z^2w - 5zw + 5) - (3z^3 - 2z^2w - zw + 3)$
   g. $(4x^3y^2 - 2y) - (6x^3y^2 - 3y - 10)$
   h. $(12z^5 + z^3 + z) - (3z^5 + 5z^3 - 6)$

7. Resuelve las siguientes multiplicaciones.
   a. $5x(6x + 5xy)$
   b. $-2a^3b(2a^3b^2 - b^4)$
   c. $(8n + 7)(4n - 8)$
   d. $(9w - 9z)(2w^4 + z)$
   e. $2xy(-4x^3 + 7xy)$
   f. $(2x - 2y)(10x - 3y)$
   g. $-4a(-9a + b)$
   h. $7x^3y^3(4x^4 - 3y^4)$

1.2 Introducción a la factorización de polinomios

Problema

Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:



¡Atención!

Las piezas celestes son cuadrados de lado **x**; mientras que las piezas rosadas son rectángulos de altura **x** y base 1.

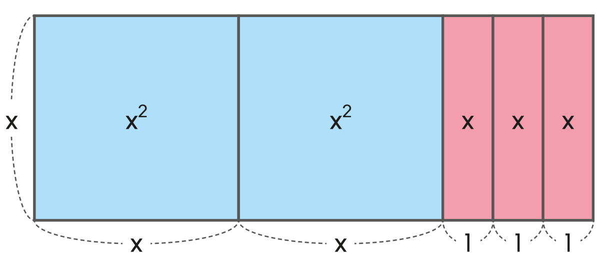
a. Construye el rectángulo que forman las piezas.

b. ¿Cuál es el área total?

c. ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido?

Solución

a. El lado de los cuadrados celestes es igual a la altura de los rectángulos rosados (ambos miden **x**). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b. El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea:

Área de cada cuadrado = $x \cdot x = x^2$

Área de cada rectángulo = $x \cdot 1 = x$

Área total = $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$

c. Las medidas de la altura y la base son:

Altura → x

Base → $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

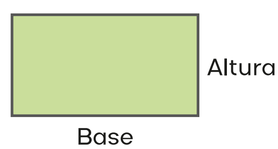
Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Recuerda

El área de un rectángulo se calcula con la fórmula:

A = Altura × Base



Recuerda

Para sumar monomios semejantes se suman los factores numéricos y se mantienen los factores literales.

Ejemplo:

$x^2 + x^2 =$
$= 1x^2 + 1x^2$
$= (1 + 1)x^2$
$= 2x^2$

Recuerda

Un número primo es un número que sólo se puede dividir entre él mismo y el uno.

Ejemplos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Recuerda

Los números naturales se pueden descomponer en factores primos.

Ejemplos:

a. $12 = 2^2 \cdot 3$

b. $96 = 2^5 \cdot 3$

c. $49 = 7^2$

d. $50 = 2 \cdot 5^2$

Conclusión

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**.

Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$. Cada uno de los polinomios **x** y **$2x + 3$** del producto se llaman **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de la multiplicación de polinomios:

Factorizar

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Multiplicar

Observa cómo se hace

Determina los factores del siguiente producto de polinomios:

$$-6x(-2x + 9)(-x + 4)$$

Los factores corresponden a cada polinomio que conforma la multiplicación dada:

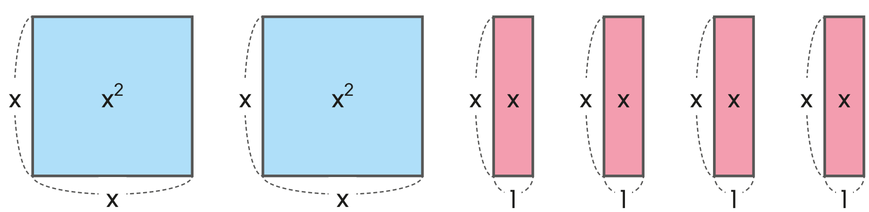
$$-6x,\ -2x + 9;\ -x + 4$$

Práctica

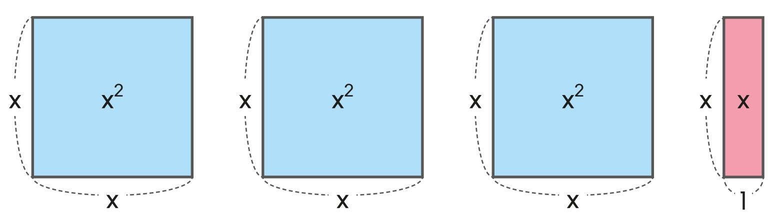
Trabaja en tu cuaderno

1. Forma un rectángulo en tu cuaderno con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a.



b.



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a. $2x(5x - 3)$

b. $-x(3x + 2)$

c. $5x(-10x - 3)$

d. $(x + 4)(2x - 3)$

e. $3x(x - 5)(2x - 1)$

f. $(-9x - 6)(x + 1)(2x - 9)$

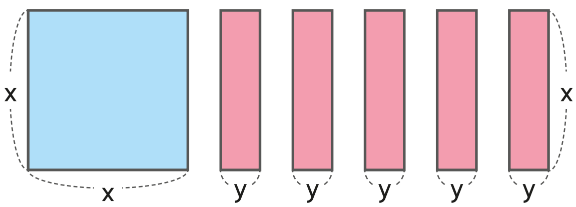
g. $-6x^3(2x + 5)^2$

h. $(x^3 - 1)(7x^2 + 3x - 9)$

1.3 Factor común

Problema

Observa las siguientes figuras geométricas:



1. Escribe en tu cuaderno el área descrita por el cuadrado y los rectángulos.
2. Forma un rectángulo con todas las figuras y escribe su área en términos de su altura y su base.

Solución

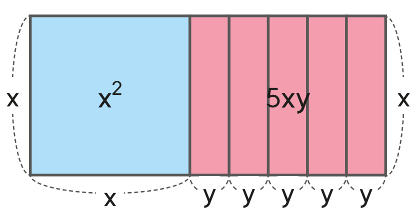
1. El área descrita por las figuras es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea:

   Área del cuadrado = $x \bullet x = x^2$

   Área de cada rectángulo = $x \bullet y = xy$

   Área total = $x^2 + xy + xy + xy + xy + xy = x^2 + 5xy$

2. El área del rectángulo es:



Altura → x

Base → $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Su área es: $x(x + 5y)$.

Para factorizar la expresión $x^2 + 5xy$, se debe escribir como producto de polinomios más simples. Observa:

$$x^2 = x \bullet x$$

$$5xy = x \bullet 5y$$

Ambos términos tienen en común el monomio **x**. Entonces:

$x^2 + 5xy = x \bullet x + x \bullet 5y$ → Se identifican términos comunes.

$= x(x + 5y)$ → Se aplica la propiedad distributiva.

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

Recuerda

El uso del signo de la multiplicación (•) en algunos casos se omite. Por ejemplo:

1. Cuando se escribe un número junto a una letra o entre dos o más letras:
   - **a.** $4a = 4 \bullet a$
   - **b.** $ab = a \bullet b$
   - **c.** $4ab = 4 \bullet a \bullet b$
2. Cuando se escribe un número, una letra o ambas junto a un paréntesis:
   - **a.** $4a(x + 7) = 4a \bullet (x + 7)$
3. Cuando se escriben dos paréntesis juntos:
   - **a.** $(3 - x)(1 + y) = (3 - x) \bullet (1 + y)$

Conclusión

Para factorizar por el método de factor común, existen dos casos:

1. Cuando el **factor común** es un monomio:
   a. Extraer el máximo común divisor (m. c. d.) de los coeficientes numéricos.
   b. De las letras repetidas en todos los términos, extraer la letra de menor exponente.
   c. Para determinar el polinomio que queda dentro del paréntesis, se divide cada término del polinomio inicial entre el factor común.
2. Cuando el **factor común** es un polinomio:
   a. Extraer las expresiones en paréntesis repetidas o la de menor exponente, según el caso.
   b. Las expresiones algebraicas que quedan fuera de cada paréntesis corresponden al otro factor de la factorización.

Ejemplos. Factoriza las expresiones algebraicas:

a. $10x^4y^6z^4 - 2x^3y^5 - 6xy^8z =$
$2xy^5(5x^3yz^4 - x^2 - 3y^3z)$

- El m. c. d. de 10, 2 y 6 es 2 y las letras repetidas son **x** y **y**, cada una con el menor exponente: x y y^5. El factor común del polinomio es $2xy^5$.
- Divide cada término entre el factor común para obtener el factor dentro del paréntesis.

b. $6x(y + 4) - 7(4 + y) =$
$(y + 4)(6x - 7)$

- Como la expresión $(y + 4)$ se repite, con exponente 1, ese es el factor común.
- Los factores 6x; -7 quedan fuera de los paréntesis, por lo tanto, forman el otro factor: $(6x - 7)$.

¡Atención!

Observa en el ejemplo **a**:

1. El m. c. d. de los coeficientes numéricos se determina dividiendo cada uno entre el mayor divisor común:

10	2	6	2
5	1	3	

2. Como la letra **z** no se repite en todos los términos, no es un factor literal común.
3. Para obtener el factor dentro del paréntesis se divide:
$10x^4y^6z^4 \div 2xy^5 = 5x^3yz^4$
$2x^3y^5 \div 2xy^5 = 1x^2y^0 = x^2y$
$6xy^8z \div 2xy^5 = 3y^3z$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Anota el factor común de cada polinomio.
   a. $2a^2b - 10a^8b^6 - 8a^9b^9$
   b. $9m^5(n^7 - m) - 27n^5(n^7 - m)$
   c. $10x^3y^3 - 7y^4 - 6x^6y^9$
   d. $8m^2n - 2m^6n^8$
   e. $2x^7(5y + 7) - 6x^3(7 + 5y)$
   f. $5p^2(q - 6) + 5p(q - 6)$
2. Factoriza los siguientes polinomios.
   a. $2x^2 + xy$
   b. $10x^2 - 5xy$
   c. $x^2n + xn$
   d. $2x^2y - 4xy$
   e. $2a^2b - 3ab + b$
   f. $3x^2 + 6w + 12xw$
   g. $x^2y + x^2 - x$
   h. $4xy - 6y$
   i. $7ab^2 - 49a^2b$
3. Realiza las siguientes factorizaciones.
   a. $3y(x + 3) + 7(x + 3)$
   b. $6a(b + 7) - 5(b + 7)^2$
   c. $z - 1 + 5y(z - 1)$
   d. $6a(9b + 5)^2 - 2(5 + 9b)^3$
   e. $7x(5y - 7) + 4(5y - 7)$
   f. $3(a + 9)^3 - (-9 - a)$

1.4 Factor común por agrupación de términos

Problema

Observa la siguiente expresión algebraica:

$$\boxed{3m^2x - 27m^2 + 2x - 18}$$

Realiza las siguientes actividades:

1. Analiza si posible determinar un factor común a todos los términos.
2. Elige dos pares de monomios de la expresión anterior que tengan factores comunes y determínalos.

Solución

1. No es posible determinar un factor común de todos los términos, porque no se puede establecer un m. c. d para los coeficientes numéricos y no hay ninguna letra que se repita en cada término.
2. Tomar pares de monomios para determinar su factor común, tenemos:
   - $3m^2x$; $27m^2$:
     $3m^2x = 3 \bullet m \bullet m \bullet x = 3m^2 \bullet x$
     $27m^2 = 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet m \bullet m = 3m^2 \bullet 9$

   Por lo tanto, el factor común de $3m^2x$; $27m^2x$ corresponde a $3m^2$.

   - $2x$; 18:
     $2x = 2 \bullet x$
     $18 = 2 \bullet 3 \bullet 3 = 2 \bullet 9$

   Por lo tanto, el factor común de $2x$; 18 corresponde a 2.

   Observa que, al determinar el factor común de los pares de monomios por separado, se puede expresar la factorización del polinomio de la siguiente forma:

   $3m^2x - 27m^2 + 2x - 18 =$ → Agrupa en paréntesis los monomios a los que les determinaste factor común.

   $(3m^2x - 27m^2) + (2x - 18) =$ → Determina el factor común de cada agrupación.

   $3m^2(x - 9) + 2(x - 9) =$ → Extrae como factor común polinomio, la expresión que se repite dentro de cada paréntesis.

   $(x - 9)(3m^2 + 2)$ → Finalmente se obtiene el otro factor en otro paréntesis.

   Por lo tanto, se puede expresar la siguiente equivalencia:

$$3m^2(x - 9) + 2(x - 9) = (x - 9)(3m^2 + 2)$$

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Investiguen sobre los tipos de factorización que hay, sus reglas y procedimientos.

Conclusión

Para factorizar polinomios por el método de **factor común por agrupación de términos** se siguen los pasos:

1. Forma grupos de igual número de términos y con alguna familiaridad entre ellos, o sea, que mantengan letras en común y que en lo posible los coeficientes numéricos puedan tener m. c. d., colocándolos entre paréntesis.
2. Extrae el factor común de cada agrupación.
3. Extrae el factor común de toda la expresión, sobre todo la que está encerrada entre los paréntesis.

Ejemplo: Factoriza el polinomio $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$.

$= (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n)$ → Agrupa términos con factor común.

$= 3m(m - 2n) + 4(m - 2n)$ → Determina el factor común de cada agrupación.

$= (m - 2n)(3m + 4)$ → Extrae el factor común de toda la expresión encerrada entre paréntesis.

Por lo tanto, $3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (m - 2n)(3m + 4)$.

Observa cómo se hace

Factoriza mediante el método de factor común la expresión algebraica:

$$9z^2 + 49w - 21wz - 21z$$

Realiza agrupaciones según se te facilite determinar sus factores comunes:

$9z^2 + 49w - 21wz - 21z =$ → Agrupa términos con factor común.

$(9z^2 - 21wz) + (49w - 21z) =$ → Determina el factor común de cada agrupación.

$3z(3z - 7w) + 7(7w - 3z) =$ → Extrae el factor común de toda la expresión.

$3z(3z - 7w) - 7(-7w + 3z) =$ → Extrae un signo (-) como factor común en el 2.° paréntesis, para que los factores de cada paréntesis queden iguales.

$(3z - 7w)(3z - 7)$

¡Atención!

Observa que:

Para agrupar términos, no hay un orden establecido. Tu decides según sea más fácil determinar sus factores comunes.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

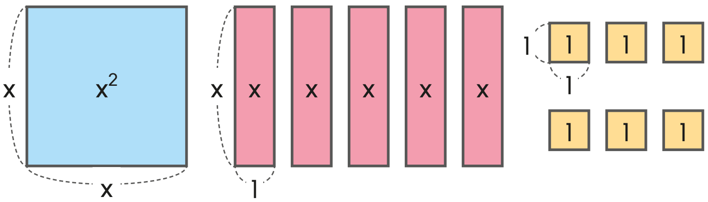
1. Factoriza cada polinomio.
   a. $2p^3 - 5p^2q + 4p - 10q$
   b. $4m^3 - 4m^2 - m + 1$
   c. $2xy - 18x^2 + zy - 9xz$
   d. $7km^2 - k^2 + 21m^2 - 3k$
   e. $27w^4x^9 - 63 - 21w^5x^9 + 49w$
   f. $16w^3 + 6w^2 + 8y^2w + 3y^2$
   g. $30xy + 21x - 20y - 14$
   h. $81pq - 63p + 72q^2 - 56q$
   i. $6w^3y + w^2z + 12w^2zy + 2wz^2$
   j. $16x^2y + 18xyz^2 + 64xyz + 72yz^3$

1.5 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Problema

Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

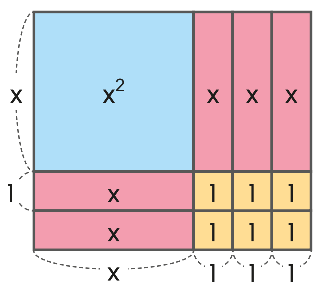
1. $x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes figuras geométricas:



2. Para factorizar $x^2 + 5x + 6$ debe encontrar la altura y la base del rectángulo. ¿Cómo se expresa la factorización?

Solución

1. El rectángulo formado con las piezas se muestra en la siguiente figura:



Altura → $x + 2$

Base → $x + 3$

2. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Por lo tanto:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \underbrace{(a + b)}_{\text{Suma de a y b}}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de a y b}}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números (**a** y **b**) cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6.

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
-1 y -6	+6	-7
2 y 3	+6	+5
-2 y -3	+6	-5

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

¿Qué pasaría?

Si se resuelve el producto de binomios se comprueba la igualdad. Así:

$$(x + 2)(x + 3) =$$
$$x^2 + 3x + 2x + 6 =$$
$$x^2 + 5x + 6$$

¡Atención!

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Es así, por la ley de los signos para la multiplicación:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$

Conclusión

Datos interesantes

Este tipo de factorizaciones fortalecen el cálculo mental, ejercicio que contribuye con tu capacidad de concentración.

Los pasos para **factorizar un trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$**, son los siguientes:

1. Se descompone el trinomio en una multiplicación de dos factores binomios (colocados entre paréntesis), cuyo primer término en ambos será la raíz cuadrada del termino x^2.
2. Se determina el signo en el medio del primer binomio (primer paréntesis) que corresponde al mismo signo que tiene el término **$(a + b)x$** y el signo en el medio del segundo binomio (segundo paréntesis) que es igual al signo del producto de los términos **$(a + b)x$** y de **ab**.
3. Si los signos para los segundos términos de los factores binomios son iguales, entonces se buscan dos números cuya **suma** sea igual al valor del coeficiente **$a + b$** en **$(a + b)x$** y cuyo producto sea igual al valor del término independiente **ab**.
4. Si los signos para los segundos términos de los factores binomios son diferentes, entonces se buscan dos números cuya **resta** sea igual al valor del coeficiente **$a + b$** en **$(a + b)x$** y cuyo producto sea igual al valor del término independiente **ab**.

De los segundos términos de los factores binomios, el de mayor valor absoluto será el segundo término del primer factor binomio, y el menor, el segundo término del segundo factor binomio.

Ejemplo: Factoriza $y^2 + 7y - 30$.

1. Se descompone el trinomio en el producto de dos binomios cuyo primer término es $\sqrt{y^2} = y$.
2. Como el coeficiente de y es +7, el signo en el medio del primer binomio es "+"; y como 7 • -30 da resultado negativo, el signo en el medio del segundo binomio es "–".
3. Como 10 – 3 = 7 y 10 • 3 = 30 los términos de los binomios son 10 y 3.

Por lo tanto, a = 10, b = 3 y la factorización corresponde a:

$$y^2 + 7y - 30 = (y + 10)(y - 3)$$

¡Atención!

Observa que al calcular los valores absolutos de **a** y **b** se obtiene:

$|3| = 3$ y $|10| = 10$

Como, 10 > 3 el binomio que contiene a 10 se coloca en el primer binomio en la factorización.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Factoriza los siguientes trinomios:

   a. $x^2 + 3x + 2$
   b. $x^2 + x - 20$
   c. $y^2 + 4y - 12$
   d. $y^2 - 11y + 30$
   e. $x^4 - 6x^2 - 40$
   f. $y^2 - 9y + 20$
   g. $y^6 + 12y^3 + 11$
   h. $x^4 + 10x^2 + 16$
   i. $x^2 - 3x - 54$
   j. $y^2 + 11y + 18$
   k. $x^2 - 7x + 12$
   l. $x^2 + 10x - 11$
   m. $y^6 + 10y^3 + 24$
   n. $y^2 + 16y + 63$

1.6 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, parte 1

Problema

Factoriza el polinomio $12x^2 + 11x + 2$.

1. Determina todos los factores cuyo producto sea $\mathbf{ax^2 = +12x^2}$.
2. Establece todos los factores cuyo producto sea $\mathbf{c = +2}$.
3. Comprueba cuáles factores que determinan $\mathbf{ax^2}$ y **c** al multiplicarse en equis y sumar sus productos dan como resultado $\mathbf{bx = +11x}$.
4. Plantea la factorización que determinan los valores hallados en el punto 3.

Solución

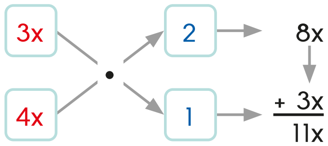
1. Los factores cuyo producto es $\mathbf{ax^2 = +12x^2}$ son los anotados en la tabla.

Pareja	Producto
$-1x$ y $-12x$	$+12x^2$
$1x$ y $12x$	$+12x^2$
$-2x$ y $-6x$	$+12x^2$
$2x$ y $6x$	$+12x^2$
$-3x$ y $-4x$	$+12x^2$
$3x$ y $4x$	$+12x^2$

2. Los factores cuyo producto es $\mathbf{c = +2}$ son los anotados en la tabla.

Pareja	Producto
-1 y -2	$+2$
1 y 2	$+2$

3. Al analizar las opciones se obtiene que $3x \cdot 4x = 12x^2$ y $2 \cdot 1 = 2$. Ahora, observa el procedimiento:



4. Por lo tanto, la factorización de $12x^2 + 11x + 2$ se plantea sumando de forma horizontal los valores en los que se descompusieron los extremos.

$$12x^2 + 11x + 2 = (3x + 2)(4x + 1)$$

Conclusión

Para poder **factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$** sigue los pasos:

1. Descompón los extremos del trinomio ordenado, en dos factores.
2. Multiplica en equis los factores determinados.
3. Suma los productos obtenidos.
4. Comprueba que el total sea igual al segundo término del trinomio: **bx**. Si no lo es, debes buscar otros valores que cumplan el requisito u ordena los factores de otra forma.
5. Escribe los dos factores del trinomio formado sumando de forma horizontal los valores en los que se descompusieron los extremos.

Ejemplo: Factoriza el trinomio $15x^2 - 47x + 36$.

Como el coeficiente de **x** es un número negativo (**-47**), los factores en los que se descompone uno de los extremos del trinomio, deben tener números negativos:

$$15 = 3 \cdot 5$$
$$36 = -4 \cdot -9$$

Resuelve las operaciones:

$3x$	-4	$-20x$
$5x$	-9	$+\ -27x$
		$-47x$

Para expresar la factorización, coloca los valores sumando dentro de paréntesis, de forma horizontal. así:

$$15x^2 - 47x + 36 = (3x - 4)(5x - 9)$$

Recuerda

La multiplicación es conmutativa. Por lo tanto, la siguiente forma de escribir la factorización también es correcta:

$(5x - 9)(3x - 4)$

¿Qué pasaría?

Si ordenas los factores del ejemplo de diferente forma, no obtienes el coeficiente de **x**. Observa:

$3x$	$-9x$	$-45x$
$5x$	$-4x$	$+\ -12x$
		$-57x$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Observa cada expresión algebraica y anota en tu cuaderno cuál es la factorización correcta
   a. $15x^2 + 14x - 8$
      - ◯ $(3x + 4)(5x - 2)$
      - ◯ $(3x + 2)(5x - 4)$
   b. $4x^2 - 39x + 27$
      - ◯ $(x - 3)(4x - 9)$
      - ◯ $(x - 9)(4x - 3)$
   c. $8y^2 + 15y - 2$
      - ◯ $(8y - 2)(y + 1)$
      - ◯ $(8y - 1)(y + 2)$

2. Realiza las siguientes factorizaciones.
   a. $21x^2 + 23x + 6$
   b. $10x^2 - 27x + 14$
   c. $3x^2 - 17x - 28$
   d. $18y^2 + 9y - 5$
   e. $2y^2 + y - 1$
   f. $27x^2 + 30x - 25$
   g. $15x^2 + 14x - 16$
   h. $x^2 - 10x + 16$
   i. $4x^2 - 5x + 1$
   j. $50y^2 + 5y - 28$

1.7 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, parte 2

Problema

Factoriza el polinomio $12x^2 + 11x + 2$ aplicando este otro procedimiento:

1. Expresa la multiplicación de 12 por el trinomio dado.
2. Realiza la multiplicación en los extremos del polinomio formado y escribe la operación multiplicación del segundo término, cambiando el orden de los factores (sin resolver la operación).
3. Descompón el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término en ambos sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio formado en el paso 2.
4. Coloca en el segundo término del primer binomio el signo del coeficiente de **x** que se formó y en el segundo término del segundo binomio el signo del resultado de multiplicar el coeficiente de **x** y el término independiente obtenidos.
5. Busca dos números que sumados te dén 11 y multiplicados te dén el término independiente obtenido en el paso 2.
6. Completa los factores binomios formados en el paso 3 con los números obtenidos.
7. Divide el producto de binomios entre 12 de forma que se obtengan valores enteros.

Solución

1. Se expresa la multiplicación: $12(12x^2 + 11x + 2)$.
2. Resuelve:

$$12 \cdot 12x^2 + 12 \cdot 11x + 12 \cdot 2 =$$
$$144x^2 + 11(12)x + 24$$

3. Como $\sqrt{144x^2} = 12x$ se expresa la multiplicación de factores binomios:

$$(12x \qquad)(12x \qquad)$$

4. Como el signo de $11(12)x$ es "+" y el signo de multiplicar $11(12) \cdot 24$ también es "+" se colocan los signos así:

$$(12x + \qquad)(12x + \qquad)$$

5. Como el término independiente obtenido en el paso 2 es 24, dos números que sumados den 11 y multiplicados den 24 son: 8 y 3.
6. Finalmente se completan los factores binomios formados en el paso 3 con 8 y 3:

$$(12x + 8)(12x + 3)$$

7. Divide el producto de binomios entre 12 así:

$$\frac{(12x+8)(12x+3)}{12} = \frac{(12x+8)}{4} \cdot \frac{(12x+3)}{3} = (3x + 2)(4x + 1)$$

Por lo tanto la factorización es: $12x^2 + 11x + 2 = (3x + 2)(4x + 1)$

Desarrollo sostenible

Al igual que en la matemática hay diferentes formas para llegar a un mismo resultado, en la vida hay diferentes formas para resolver cualquier problema. Nunca te rindas.

¡Atención!

Toma en cuenta que como $12 = 4 \cdot 3$ se puede aplicar en la división de la siguiente forma:

$$\frac{(12x+8)(12x+3)}{12} = \frac{(12x+8)(12x+3)}{4 \cdot 3} = \frac{(12x+8)}{4} \cdot \frac{(12x+4)}{3} = \left(\frac{12x}{4} + \frac{8}{4}\right) \cdot \left(\frac{12x}{3} + \frac{3}{3}\right) = (3x + 2)(4x + 1)$$

Recuerda

Toda fracción cuyo numerador es igual al denominador equivale a 1. Por ejemplo:

$$\frac{12}{12} = 1$$

Conclusión

En el trinomio $ax^2 + bx + c$, el termino al cuadrado $\mathbf{x^2}$ se encuentra precedido por un coeficiente diferente de 1 que corresponde a la variable **a** (que debe ser positivo). Una de las formas de factorizar este trinomio es transformándolo a la forma del trinomio $x^2 + (a + b)x + ab$, sin que se altere. Para ello se siguen los siguientes pasos:

1. Multiplica el coeficiente a del término $a\mathbf{x^2}$ por cada término del trinomio, dejando la multiplicación indicada, así:
   a. El primer término elevado al cuadrado junto con al factor a, donde $a(ax^2) = (ax)^2$.
   b. Cambia el orden de los factores en la multiplicación del segundo término, o sea: $a(bx) = b(ax)$
   c. Multiplica a por **c** en el tercer término, o sea $a \bullet c = ac$

Dando forma similar al trinomio $x^2 + (a + b)x + c$

1. Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término en ambos binomios es la raíz cuadrada del termino $\mathbf{(ax)^2}$, la cual corresponde a **ax**.
2. Se determina el signo del segundo término, en el primer binomio será el mismo que tenga el término **b(ax)** y el signo del segundo término del segundo binomio será igual al que resulta de multiplicar los signos de los términos **b(ax)** por **ac**.
3. Si los signos de los segundos términos de los factores binomios son iguales, entonces se buscan dos números cuya **suma** sea igual al valor del coeficiente **b** en **b(ax)** y cuyo producto sea igual al valor del término independiente **ac**.
4. Si los signos de los segundos términos de los factores binomios son diferentes, entonces se buscan dos números cuya **resta** sea igual al valor del coeficiente **b** en **b(ax)** y cuyo producto sea igual al valor del término independiente **ac**.

De los segundos términos de los factores binomios el de mayor valor absoluto será el segundo término del primer factor binomio y el menor el segundo término del segundo factor binomio.

5. Se dividen los factores resultantes entre el factor **a**, con el fin de no variar el valor del trinomio original.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

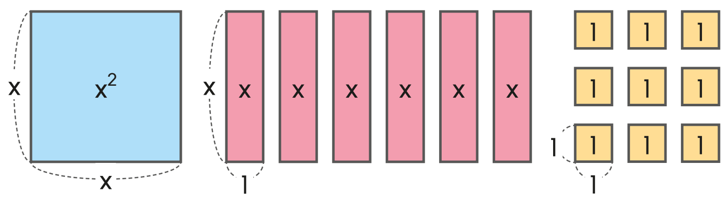
1. Factoriza los siguientes trinomios:
   a. $6x^2 + 17x + 12$
   b. $2x^2 - x - 3$
   c. $24y^2 + 11y - 18$
   d. $9y^2 - 31y + 12$
   e. $24x^4 + 34x^2 + 7$
   f. $7y^2 + 15y - 18$
   g. $20y^6 + 36y^3 + 9$
   h. $4x^4 - 7x^2 + 3$

1.8 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Problema

Realiza lo siguiente:

1. Escribe el área descrita por las siguientes figuras geométricas.



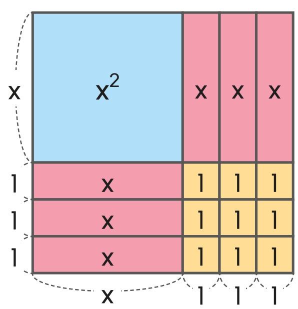
2. Dibuja en tu cuaderno un rectángulo con las figuras del punto 1.
3. Determina el área del rectángulo formado.

Solución

1. El área descrita por las figuras geométricas es:

$$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

2. El rectángulo formado por las figuras es:



Altura $\rightarrow$ $x + 3$

Base $\rightarrow$ $x + 3$

3. Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:

$$A = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Por lo tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Recuerda lo visto en clases anteriores para factorizar el trinomio:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

$\rightarrow$ Se buscan dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6.

Luego, se escribe la factorización de la siguiente forma:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Por lo tanto, para factorizar $x^2 + 6x + 9$, se convierte en el cuadrado de un binomio, buscando un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, el cual corresponde a 3 en este caso. Así:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Recuerda

Un cuadrado es un rectángulo cuya altura y base tienen igual medida.

¡Atención!

Observa que la figura que se forma corresponde a un cuadrado.

Recuerda

El cuadrado de un binomio es un producto notable que se desarrolla así:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Conclusión

El trinomio de la forma $\mathbf{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo con el signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \qquad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente **a** es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente **a** nunca es negativo.

Ejemplo: Factoriza $x^2 + 8x + 16$.

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 16 es el cuadrado de 4 ($4^2 = 16$); además el doble de 4 es 8 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado **x**. Entonces:

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(4)x + 4^2 = (x + 4)^2$$

¿Qué pasaría?

Si calculas la raíz del término independiente también obtienes el valor de **a**.

Ejemplo: Para factorizar $x^2 + 8x + 16$, se puede calcular el valor de a, así:

$$a = \sqrt{16} = 4$$

Observa cómo se hace

Factoriza el trinomio $x^2 - 10x + 25$.

Se determina que el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a. El término independiente es el cuadrado de 5:
25 es el cuadrado de 5 porque $5^2 = 25$, y se tiene que $a = 5$.

b. El coeficiente de **x** es el doble de 5:

$$2a = 2 \bullet 5 = 10$$

Como el segundo término es negativo, entonces la factorización:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Forma los trinomios que corresponden a cada factorización.

a. $(x - 6)^2$
b. $(x - 8)^2$
c. $(z + 10)^2$
d. $\left(y - \frac{1}{7}\right)^2$

2. Realiza las siguientes factorizaciones.

a. $x^2 + 4x + 4$
b. $y^2 - 18y + 81$
c. $x^2 + x + \frac{1}{4}$
d. $x^2 - 8x + 16$
e. $y^2 + 14y + 49$
f. $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
g. $z^2 - 8z + 16$
h. $x^2 + 30x + 225$
i. $x^2 + 10x + 25$
j. $y^2 + 14y + 49$

1.9 Factorización de trinomios cuadrados perfectos con coeficiente distinto de 1 en x^2

Problema

1. Factoriza las expresión algebraicas:

a. $9x^2 + 42x + 49$

b. $9x^2 - 42x + 49$

Solución

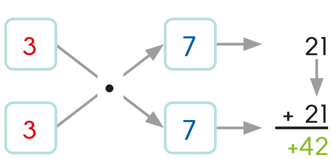
a. Se determinan los factores cuyo producto es **a = +9**:

Pareja	Producto
-1 y -9	+9
1 y 9	+9
-3 y -3	+9
3 y 3	+9

Luego, se determinan los factores cuyo producto es **c = +49**:

Pareja	Producto
-1 y -49	+49
1 y 49	+49
-7 y -7	+49
7 y 7	+49

Al analizar las opciones se obtiene que $3 \cdot 3 = 9$ y $7 \cdot 7 = 49$. Por lo que se multiplica en equis, así:



Por lo tanto, la factorización de $9x^2 + 42x + 7$ corresponde a:

$$9x^2 + 42x + 7 = (3x + 7)(3x + 7) = (3x + 7)^2$$

b. Observa que $9x^2 - 42x + 49$ se diferencia de la opción **a.** únicamente por el signo "–". Por lo tanto, se desarrolla de la misma forma y se obtiene el siguiente producto notable:

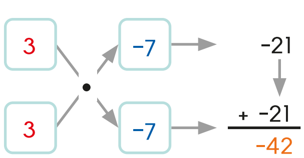
$$9x^2 - 42x + 7 = (3x - 7)(3x - 7) = (3x - 7)^2$$

Datos interesantes

A finales del siglo XVIII surgió la idea de crear una máquina capaz de realizar cálculos de manera automática, lo que llevó a un primer prototipo a inicios de siglo XIX por parte del matemático Charles Babbage. Este invento, llamado "máquina diferencial" y perfeccionado posteriormente, fue diseñado para realizar incluso cálculos con polinomios y era muy útil en los campos de la navegación y la astronomía.

¡Atención!

Toma en cuenta que $-7 \cdot -7 = 49$. Por lo tanto la multiplicación en equis en la actividad **b** es:



Recuerda

Un polinomio se dice que está ordenado si los monomios que lo conforman están escritos según su grado:

- De mayor a menor (descendente): $9x^2 - 12x^1 + 4$
- De menor a mayor (ascendente): $4 - 12x^1 + 9x^2$

¿Qué pasaría?

Si el polinomio no viene ordenado, se ordena antes de factorizar. Por ejemplo:

$$4 + 64x^4 - 32x^2 = 64x^4 - 32x^2 + 4$$

Conclusión

El trinomio de la forma $\mathbf{a^2x^2 \pm 2abx + b^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, sigue los pasos:

1. Determina si el coeficiente de $\mathbf{x^2}$ y el término independiente son cuadrados perfectos.
2. Comprueba que el coeficiente de **x** es el doble producto de las raíces cuadradas de los dos términos cuadrados perfectos (**2ab**).

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente distinto de 1 en $\mathbf{x^2}$, aplica los siguientes productos notables:

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2 \qquad a^2x^2 - 2abx + b^2 = (ax - b)^2$$

Para calcular los términos del binomio que resulta de factorizar el trinomio, verifica que esté ordenado en forma ascendente o descendente y determina la raíz cuadrada del primer y último términos del trinomio. El signo del binomio debe coincidir con el segundo término del trinomio siempre y cuando el coeficiente de $\mathbf{x^2}$ sea positivo.

Ejemplo: Factoriza $49x^2 + 14x + 1$.

Como el trinomio está ordenado en forma descendente se comprueba si el primero y el último término son cuadrados perfectos determinando sus raíces cuadradas:

$$\sqrt{49x^2} = 7x \quad \text{y} \quad \sqrt{1} = 1$$

Se comprueba también que el coeficiente de **x** sea el doble producto de las raíces determinadas: $2 \bullet 7x \bullet 1 = 14x$.

Por lo tanto la factorización es:

$$49x^2 + 14x + 1 = (7x + 1)^2$$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Identifica los trinomios cuadrados perfectos y anótalos en tu cuaderno.
   - a. $9x^2 + 60x + 100$
   - b. $25y^2 + 10y + 4$
   - c. $49x^2 + 42x + 9$
   - d. $36m^4 - 6m^2 + 1$
   - e. $25 - 90z + 81z^2$
   - f. $9x^2 - 18xy + 36y^2$
2. Realiza las siguientes factorizaciones.
   - a. $4m^2 - 28m + 49$
   - b. $9k^2 + 12k + 4$
   - c. $100 - 80t^2 + 16t^4$
   - d. $36x^2 - 84xy + 49y^2$
   - e. $25y^2 + 60xy + 36x^2$
   - f. $9m^6 - 30m^3 + 25$
   - g. $25x^2 - 10x + 1$
   - h. $1 + 8z^2 + 16z^4$
   - i. $81n^2 - 180n + 100$
   - j. $1 - 22z^5 + 121z^{10}$

1.10 Factorización de diferencia de cuadrados

Problema

Observa las siguientes figuras:

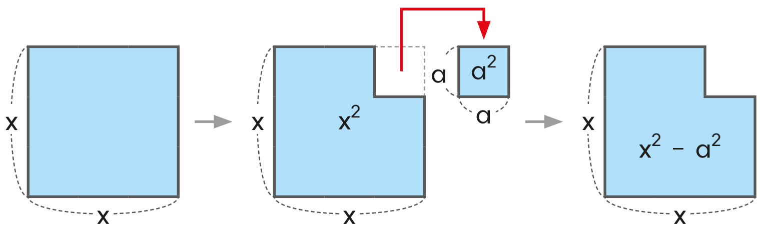


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

En la Figura 1, al cuadrado de lado **x** se le ha quitado un cuadrado de lado **a** (Figura 2); dando como resultado la Figura 3, cuya área es:

$$x^2 - a^2$$

Realiza un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

Solución

Se hace un corte y se reubican las figuras como se muestra a continuación:

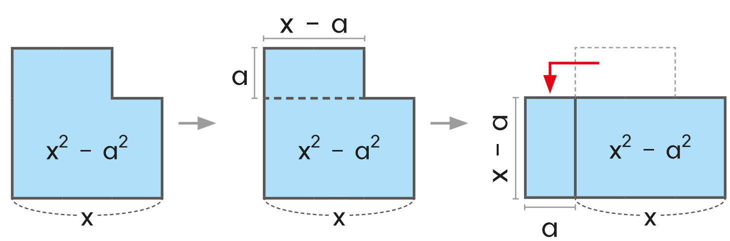


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

Observa que:

- El área de la figura 1 es:

$$x^2 - a^2$$

- El área de la figura 3 es:

$$(x + a)(x - a)$$

Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

¡Atención!

Para la solución se dividió el rectángulo en estas figuras; sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Recuerda

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio, al coeficiente se le extrae la raíz cuadrada normalmente y a las letras, su exponente se divide entre 2.

Ejemplo:

$$\sqrt{4x^4y^{14}z^8} = 2x^2y^7z^4$$

Conclusión

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza con el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Para factorizar un binomio cuadrado perfecto, sus términos deben ser cuadrados perfectos y deben restarse entre sí. Los pasos a seguir para realizar la factorización son:

1. Se extrae la raíz cuadrada de cada término.
2. Se abren dos grupos de paréntesis como producto.
3. Las raíces cuadradas que se obtuvieron de cada término se anotan dentro de cada paréntesis: en el primero van sumando y en el segundo van restando o viceversa.

Ejemplo: Factoriza $4x^2 - 9y^2$.

1. Extrae la raíz cuadrada de cada término, así:

$$\sqrt{4x^2} = 2x \quad \text{y} \quad \sqrt{9y^2} = 3y$$

2. Abre dos grupos de paréntesis como producto:

$$(\qquad)(\qquad)$$

3. Anota las raíces obtenidas dentro de cada paréntesis: uno sumando y el otro restando:

$$(2x + 3y)(2x - 3y)$$

Por lo tanto: $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Copia en tu cuaderno la tabla y desarrolla cada actividad.

Binomio cuadrado perfecto	Raíz cuadrada del primer término	Raíz cuadrada del segundo término	Factorización
$9w^2 - 4$			
$81 - x^2$			
$49x^8 - 100y^2$			
$\frac{1}{9} - \frac{z^2}{16}$			

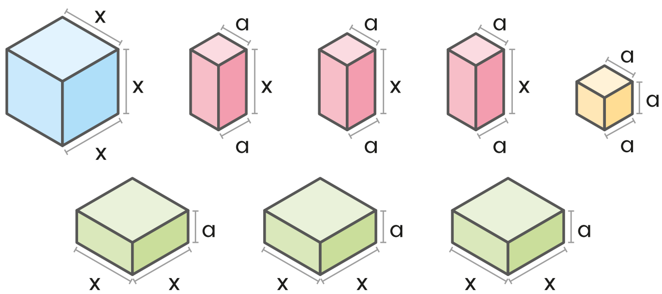
2. Realiza las siguientes factorizaciones.

a. $x^2 - 1$
b. $x^2 - y^2$
c. $x^2 - 16$
d. $y^2 - \frac{1}{4}$
e. $y^2 - 25$
f. $x^2 - \frac{1}{9}$
g. $y^{14} - 16z^6$
h. $x^{10}y^6z^{12} - 81$
i. $(a - 7)^2 - 4$
j. $36 - w^6$

1.11 Factorización por cubo perfecto de binomios

Problema

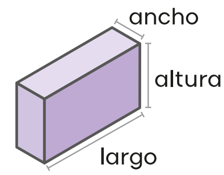
Observa los siguientes sólidos geométricos:



1. Indica cómo se plantea el volumen de cada tipo de figura.
2. Expresa el volumen de la figura que forman todos los sólidos juntos.
3. Relaciona el resultado anterior con la suma del volumen de todos los sólidos por separado.

Recuerda

Para calcular el volumen (V) de un prisma se multiplican el largo (ℓ), el ancho (a) y la altura (h) entre sí.



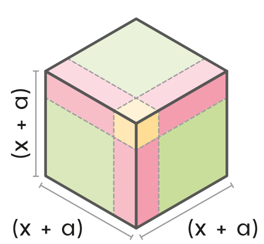
$V = \ell \bullet a \bullet h$

Solución

1. El volumen de cada figura se plantea así:

$V = x \bullet x \bullet x = x^3$ | $V = a \bullet a \bullet x = a^2x$ | $V = a \bullet x \bullet x = ax^2$ | $V = a \bullet a \bullet a = a^3$

2. El volumen de la figura que forman todos los sólidos (que corresponde a un cubo) se expresa de la siguiente forma:



$$V = (x + a)(x + a)(x + a)$$
$$V = (x + a)^3$$

3. La suma de todos los sólidos por separado se calcula así:

$$x^3 + a^2x + a^2x + a^2x + ax^2 + ax^2 + ax^2 + a^3 =$$
$$x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^3$$

Por lo tanto, el volumen de las figuras juntas o separadas es equivalente y se escribe así:

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

¡Atención!

Toma en cuenta la cantidad de figuras dibujadas al inicio del problema.

Datos interesantes

Los cubos perfectos de un binomio también reciben el nombre de cuadrinomio cubo perfecto.

Datos interesantes

En factorizaciones como:

$8x^6 - 12x^4y + 6x^2y^2 - y^3 = (2x^2 - y)^3$

los factores obtenidos son:

$(2x^2 - y)(2x^2 - y)(2x^2 - y)$, porque:

$(2x^2 - y)(2x^2 - y)(2x^2 - y) = (2x^2 - y)^3$

Conclusión

Los binomios elevados al cubo se conocen como **cubos perfectos de un binomio**, y corresponden a los siguientes productos notables:

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $\quad$ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Para factorizar un cubo perfecto de un binomio, sigue estos pasos:

1. Ordena los términos de forma descendente o ascendente respecto a una variable.
2. Verifica que el primer y cuarto término sean cubos perfectos, calculando la raíz cúbica de ambos.
3. Confirma si el segundo término es igual a 3 veces el producto del cuadrado de la primera raíz por la segunda.
4. Comprueba si el tercer término es igual a 3 veces el producto de la primera raíz por el cuadrado de la segunda.
5. Coloca las raíces obtenidas en un paréntesis elevado a la 3, sumando si todos los términos son positivos o restando si el segundo y cuarto término son negativos.

Ejemplo: Factoriza $8x^6 - 12x^4y + 6x^2y^2 - y^3$.

Extrae la raíz cúbica del primer y cuarto término, así:

$$\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2 \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{y^3} = y$$

Como el segundo término es igual a tres veces el producto del cuadrado de la primera raíz por la segunda y el tercer término es igual a tres veces el producto de la primera raíz por el cuadrado de la segunda, el polinomio se factoriza como cubo perfecto de un binomio.

Para escribir la factorización, anota las raíces obtenidas dentro de un paréntesis elevado a la 3 y forma una resta.

$$(2x^2 - y)^3$$

Por lo tanto: $8x^6 - 12x^4y + 6x^2y^2 - y^2 = (2x^2 - y)^3$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina cuáles de las siguientes expresiones son cubos perfectos de un binomio y anótalas en el cuaderno.
   - a. $x^3 + 27x^2 + 243x + 729$
   - b. $36a^3 + 18a^2 + 49a + 343$
   - c. $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$
   - d. $125y^3 - 75y^2 + 64y - 512$

2. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.
   - a. $27m^3 - 135m^2 + 225m - 125$
   - b. $343 + 147a + 21a^2 + a^3$
   - c. $\frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{15} + \frac{x}{25} - \frac{1}{125}$
   - d. $8 + 12y + 6y^2 + y^3$
   - e. $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$
   - f. $a^3 + \frac{3a^2m}{7} + \frac{3am^2}{49} + \frac{m^3}{343}$

1.12 Factorización por suma o diferencia de cubos perfectos

Problema

Resuelve las siguientes multiplicaciones de polinomios e indica que observas en los resultados.

1. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ **2.** $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Solución

1. Se multiplica cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor y se suman los monomios semejantes. Así:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + b^3 =$$

$$a^3 + b^3$$

Por lo tanto, $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

El producto anterior corresponde al sexto producto notable:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Observa que, al calcular la raíz cúbica de los términos del binomio que forma la suma de cubos perfectos, se obtienen los valores con los que se desarrolla el producto equivalente:

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad y \quad \sqrt[3]{b^3} = b$$

2. Se multiplica cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor y se suman los monomios semejantes. Así:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$

$$a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3 =$$

$$a^3 - b^3$$

Por lo tanto, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

El producto anterior corresponde al séptimo producto notable:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

De igual forma que en el punto 1, se observa que al calcular la raíz cúbica de los términos del binomio que forma la resta de cubos perfectos, se obtienen los valores con los que se desarrolla el producto equivalente:

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad y \quad \sqrt[3]{b^3} = b$$

Datos interesantes

Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático de la antigua Grecia, que nació aproximadamente en el año 569 a. C. y utilizó diversos productos notables para resolver el triángulo rectángulo. Así creó el famoso teorema que lleva su nombre y es tan utilizado para resolver problemas con dicho triángulo.

Recuerda

Los productos notables son los siguientes:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Conclusión

Para factorizar **sumas y diferencias de cubos**, los términos del binomio deben ser cubos perfectos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar un cubo perfecto de un binomio, sigue estos pasos:

1. Calcula la raíz cúbica de los términos del binomio.
2. Aplica el patrón del producto notable según sea suma o diferencia de cubos.

Ejemplo: Factoriza $x^3 - 8y^3$.

Extrae la raíz cúbica de los términos del binomio:

$$\sqrt[3]{x^3} = x \quad y \quad \sqrt[3]{8y^3} = 2y$$

Aplica el patrón del producto notable que corresponde a la diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$x^3 - 8y^3 = (x - 2y)[x^2 + x \bullet 2y + (2y)^2]$$
$$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

Por lo tanto: $x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

Observa cómo se hace

Ejemplo: Factoriza $343n^3 + 27m^6$.

Extrae la raíz cúbica de los términos del binomio:

$$\sqrt[3]{343n^3} = 7n \quad y \quad \sqrt[3]{27m^6} = 3m^2$$

Aplica el el producto notable que corresponde a la suma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$343n^3 + 27m^6 = (7n + 3m^2)[(7n)^2 - 7n \bullet 3m^2 + (3m^2)^2]$$
$$(7n + 3m^2)(49n^2 - 21nm^2 + 9m^4)$$

Por lo tanto: $343n^3 + 27m^6 = (7n + 3m^2)(49n^2 - 21nm^2 + 9m^4)$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.
   a. $27m^3 - 125$
   b. $\frac{1}{343} + a^3$
   c. $27x^3 - 1$
   d. $8 + y^3$
   e. $a^3 + \frac{b^3}{64}$
   f. $125 + a^3$
   g. $a^3 + 343m^3$
   h. $y^6 - \frac{w^9}{8}$
   i. $729y^{12} - 27w^3$
   j. $a^{24} + 216$

1.13 Factorizaciones sucesivas

Problema

Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

1. ¿Se puede utilizar alguno de los métodos vistos en las clases anteriores?
2. ¿Cuál procedimiento se desarrolla primero?

Solución

1. Sí, pero existen expresiones algebraicas que requieren más de un método para factorizarlas.
2. Como todos los términos son divisibles entre 2, lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$2x^2 + 2x - 12 =$$
$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2 \cdot 6 =$$
$$2(x^2 + x - 6)$$

Observa que, el trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$:

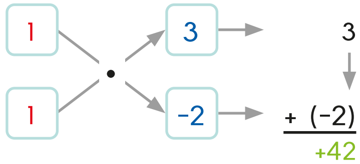
- Los factores cuyo producto es **+1**, como el coeficiente de $\mathbf{x^2}$ son los anotados en la tabla.

Pareja	Producto
-1 y -1	+1
1 y 1	+1

- Los factores cuyo producto es **-6** son los anotados en la tabla.

Pareja	Producto
-1 y 6	-6
1 y -6	-6
-2 y 3	-6
2 y -3	-6

- Los dos números o factores de -6; uno debe ser positivo y el otro negativo, además su suma es +1, por lo tanto los factores que funcionan son:



Se obtiene que $2(x^2 + x - 6) = 2(x + 3)(x - 2)$.

Por lo tanto:

$$2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$$

Recuerda

Para determinar el factor común de los coeficientes numéricos se extrae el máximo común divisor (m. c. d.) de ellos.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Elaboren un organizador gráfico por grupo que resuma los casos de factorización, sus reglas y procedimientos.
   b. Expongan el organizador gráfico elaborado.

¡Atención!

Observa que, al ser negativo el primer término, se extrae un factor común negativo, por lo que al trinomio que queda dentro del paréntesis se le cambian los signos.

Conclusión

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un factor común; si es así, se realiza la factorización aplicando el método de factor común; luego se factoriza el segundo factor obtenido del procedimiento anterior, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Ejemplo: Factoriza el siguiente polinomio $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$:

$$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x^2 - 4x + 4)$$

Como el trinomio que queda dentro del paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto, se aplica el método aprendido para este caso:

$$-2y(x^2 - 4x + 4) = -2y(x - 2)^2$$

Por lo tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Observa cómo se hace

Ejemplo: Realiza la siguiente factorización $9x^3y - 9xy$.

Como el binomio tiene factor común ($9xy$) se extrae:

$$9x^3y - 9xy = 9xy(x^2 - 1)$$

El binomio $x^2 - 1$ corresponde a una diferencia de cuadrados por lo que se aplica el procedimiento aprendido en clases anteriores:

$$9xy(x^2 - 1) = 9xy(x + 1)(x - 1)$$

Por lo tanto: $9x^3y - 9xy = 9xy(x + 1)(x - 1)$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Determina el factor común en cada polinomio.

a. $2x^2 + 18x + 40$

b. $-6x^2 - 12x - 6$

c. $8x^2 - 64x + 96$

d. $-5y^3 - 20xy - 15y$

e. $3x^2 - 6x + 3$

f. $7xy^2 - 28xy + 28x$

g. $-6x^2 + 150$

h. $9x^2 - 81$

2. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

a. $-2x^2 + 10x - 8$

b. $2x^2 + 32x + 30$

c. $3x^2 + 12x + 12$

d. $5xy^2 - 25xy + 30x$

e. $2x^2 - 18$

f. $-3y^2 + 300$

g. $-2x^2y + 8xy - 8y$

h. $2x^2y - 12xy + 18y$

1.14 Combinación de factorizaciones

Problema

Factoriza la expresión algebraica: $3x^4 - 48y^4$.

Solución

Primero se extrae el factor común que es 3:

$$3x^4 - 48y^4 = 3 \cdot x^4 - 3 \cdot 16y^4$$
$$= 3(x^4 - 16y^4)$$

La expresión $x^4 - 16y^4$ representa una diferencia de cuadrados, por lo que se factoriza calculando las raíces cuadradas de los términos y aplicando el producto notable:

$$3x^4 - 48y^4 = 3(x^4 - 16y^4)$$
$$= 3(x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$$

La expresión resultante $x^2 - 4y^2$ representa otra diferencia de cuadrados, por lo que se factoriza nuevamente:

$$3x^4 - 48y^4 = 3(x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$$
$$= 3(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$$

Conclusión

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un factor común. De ser así, se aplica este método de factorización y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un factor común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de los factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Ejemplo: Factoriza el polinomio $72 + 12y + 12x + 2xy$.

Primero se verifica sí la expresión tiene factor común y se extrae, luego se aplican los métodos de factor común:

$72 + 12y + 12x + 2xy = 2(36 + 6y + 6x + xy)$ → Se extrae factor común 2.

$= 2[(36 + 6y) + (6x + xy)]$ → Se agrupa.

$= \mathbf{2[6(6 + y) + x(6 + y)]}$ → Se extrae el factor común de cada agrupación.

$= 2(6 + x)(6 + y)$

Por lo tanto, $72 + 12y + 12x + 2xy = 2(6 + x)(6 + y)$

¡Atención!

Observa que dentro del paréntesis cuadrado en la expresión:

$$\mathbf{2[6(6 + y) + x(6 + y)]}$$

se tiene como factor común el binomio $(6 + y)$ y el otro factor que se obtiene, es el binomio que queda al extraer ese factor común. Así:

$$2[6(6 + y) + x(6 + y)] =$$
$$2(6 + y)(6 + x)$$

Observa cómo se hace

Ejemplo: Factoriza la siguiente expresión algebraica $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Primero se verifica si la expresión algebraica tiene factor común, que en este caso no tiene, por lo que se buscan otros métodos:

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 =$

$(x^3 - 3x^2) + (-4x + 12) =$

$x^2(x - 3) - 4(x - 3) =$

$(x - 3)(x^2 - 4) =$

$(x - 3)(x + 2)(x - 2)$

Por lo tanto, $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Extrae el factor común en cada polinomio.
   - **a.** $20xy^2 - 5xy - 10x^3y$
   - **b.** $144ym^2 - 240ym - 100y$
   - **c.** $x^4n^4 - 16x^4$
   - **d.** $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x$
   - **e.** $7w^3 - 7w$
   - **f.** $21xy - 63y + 3y^2x - 9y^2$

2. Anota en tu cuaderno cuál de las expresiones algebraicas corresponde a la factorización de cada polinomio.
   - **a.** $2z^4 - 32$
     - ◯ $2(z^2 + 4)(z + 2)(z - 2)$
     - ◯ $2(z + 4)(z + 2)(z - 2)$
     - ◯ $2(z^2 + 4)(z - 2)$
   - **b.** $36x^2 + 36x + 9$
     - ◯ $9(2x + 1)^2$
     - ◯ $9(2x + 1)$
     - ◯ $9(x + 2)$
   - **c.** $xy + 2xy^2 + xy^3$
     - ◯ $x(1 + y)^2$
     - ◯ $xy(1 + y)^2$
     - ◯ $xy(1 + y)$
   - **d.** $x^4y + xy^4$
     - ◯ $xy(x + y)^3$
     - ◯ $xy(x + y)(x - y)$
     - ◯ $xy(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

3. Factoriza los siguientes polinomios.
   - **a.** $-18x^2y^2 + 32$
   - **b.** $3x^2z - 12y^2z$
   - **c.** $18mn^2 + 6mn - 4m$
   - **d.** $27m^2 - 75n^2$
   - **e.** $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
   - **f.** $36mn^2 + 24mn + 4m$
   - **g.** $6x^5y - 6xy^5$
   - **h.** $2qp^3 - 16q$
   - **i.** $16xy - 96x + 8y - 48$
   - **j.** $w^4 - 2w^4x + w^4x^2 - 16 + 32x - 16x^2$

1.15 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica cuáles son los factores que tienen los siguientes productos de polinomios y anótalos.
   a. $5x(x - 1)$
   b. $(x + y)(5x - y)$
   c. $2x(3x + 4)(y + 1)$
   d. $-2x(x + 10)$
   e. $x(x - 5)(2x + 3)$
   f. $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

2. Anota el factor común de cada polinomio.
   a. $4a^9b^3 - 9a^8b^6 - 9a^5b$
   b. $m(n - 4m) - 8n^4(n - 4m)$
   c. $3x^2y^7 - 6y^5 - 12x^4y^9$
   d. $30m^9n^6 - 14m^6n^7$
   e. $5x^3(6y + 1) - 8y^6(6y + 1)$
   f. $3p^5(7q - 4) + 5(7q - 4)$

3. Extrae el factor común de cada polinomio y anota la factorización completa.
   a. $6x^8 + 6xy^3$
   b. $7x - 7xy$
   c. $x^2n + x^4n^2$
   d. $3x^6y^3 - 9xy$
   e. $10a^4b^7 - 30a^5b^8 + 4b$
   f. $12x^7 + 28w^2 + 4x^3w^4$
   g. $x^5y^{10} + xy^8 - xy^9$
   h. $50xy^7 - 5y^7$

4. Extrae el factor común de cada expresión algebraica y anota la factorización completa.
   a. $7y(x - 4) - (x - 4)$
   b. $8a^3(7b^4 + 3) - 3(7b^4 + 3)$
   c. $12n(4m - 9) - 5m^9(4m - 9)$
   d. $6z^7 - 6 + y^9(z^7 - 1)$
   e. $4a^3(3b^6 + 20) - 9(3b^6 + 20)$
   f. $3x^6(5y - 9) - (9 - 5y)$
   g. $-(5a - 1) + 7a(1 - 5a)$
   h. $4x^2(3w^8 - x^9) + 6(3w^8 - x^9)$

5. Factoriza cada polinomio por agrupación.
   a. $7p^3 - 28p^2q + 4p - 16q$
   b. $9m^3 - 9m^2 - m + 1$
   c. $4xy - 4x^2 + 8zy - 8xz$
   d. $4mk - 10k^2 + 16m - 40k$
   e. $9w^8x - 63w + 3w^7x - 21$
   f. $35w^3 + 45w^2 + 7y^2w + 9y^2$
   g. $63xy + 70x - 9y - 10$
   h. $3pq - 18p^2 + 3q^2 - 18pq$
   i. $w^5y + w^4z + 4wzy + 4z^2$
   j. $81x^2y + 36xyz^2 + 72xyz^2 + 32yz^4$

6. Analiza el trinomio.

$$\boxed{x^2 - 11x + 18}$$

   a. Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es -11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta.
   b. Factoriza el trinomio.

7. Factoriza los siguientes trinomios:
   a. $x^2 + 5x + 4$
   b. $x^2 + 8x - 9$
   c. $y^2 - 15y + 56$
   d. $y^2 - 8y + 7$
   e. $x^2 + 12x + 27$
   f. $y^2 + 12y + 35$
   g. $y^2 + y - 6$
   h. $x^2 - 8x + 12$
   i. $y^2 - 3y - 4$
   j. $y^2 - 9y - 22$

8. Factoriza los siguientes trinomios.

a. $10x^2 + 9x + 2$
b. $25x^2 - 85x + 72$
c. $3x^2 - 2x - 21$
d. $16y^2 - 46y - 35$
e. $7y^2 - 24y + 9$
f. $16x^2 - 66x + 35$
g. $6x^2 - 5x - 6$
h. $12x^2 - 28x - 5$
i. $8x^2 - 14x + 5$
j. $28y^2 - 24y + 5$

9. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a. $x^2 + 6x + 9$
b. $y^2 + 24y + 144$
c. $m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{16}$
d. $k^2 - 16k + 64$
e. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
f. $36m^2 + 60m + 25$
g. $4k^2 - 12k + 9$
h. $25m^2 - 10m + 1$
i. $16x^2 + 8xy + y^2$
j. $4k^2 + 4k + 1$

10. Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $x^2 - 4$
b. $64x^2 - 25y^2$
c. $x^2 - 49$
d. $y^2 - \frac{1}{25}$
e. $(y - 1)^2 - 64$
f. $y^2 - 81$
g. $x^2 - \frac{1}{100}$
h. $y^{18} - 36z^{10}$
i. $49 - m^8n^2$
j. $9 - (w + 8)^2$

11. Factoriza los siguientes cubos perfectos de un binomio.

a. $m^3 - 24m^2 + 192m - 512$
b. $64 + 48a + 12a^2 + a^3$
c. $343x^3 - 147x^2 + 21x - 1$
d. $27 + 27y + 9y^2 + y^3$
e. $125a^9 + 75a^6b + 15a^3b^2 + b^3$
f. $a^3 - 27a^2 + 243a - 729$
g. $n^3 + 18n^2m + 108nm^2 + 216m^3$
h. $64y^3 - 144y^2w + 108yw^2 - 27w^3$

12. Factoriza las siguientes sumas y diferencias de cubos.

a. $125m^3 - 1$
b. $64 + a^3$
c. $8x^3 - 1$
d. $64x^3 + 27$
e. $a^3 + 729b^3$
f. $512 + b^3$
g. $z^3 - 27w^6$
h. $216 - 8y^9$

13. Factoriza los siguientes polinomios.

a. $10x^2 + 6xy$
b. $-x^3 + 10x^2y - 21xy^2$
c. $x^3 - 11x^2 + 28x$
d. $7xy - 21y^2$
e. $9x^3y - 66x^2y^2 + 105xy^3$
f. $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$
g. $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$
h. $5xy^2 + 5xy - 550x$
i. $128zx^4 - 8zy^4$
j. $56y^4 + 161y^3 - 21y^2$

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor en expresiones algebraicas

2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en tu cuaderno

1. Anota los seis primeros múltiplos de cada número.

a. 2
b. 4
c. 7
d. 6
e. 14
f. 3
g. 9
h. 10
i. 5
j. 8
k. 13
l. 17

2. Dibuja la tabla en tu cuaderno y completa la información que se solicita.

Monomio	Factor numérico	Factor literal
$6x^8$		
$3m^6n^9$		
$-4x^9yz^2$		
$-9x^7z^8$		
a^3b^3c		
$7x^9m^2$		

3. Identifica el grado del factor literal que se resalta en cada monomio. Anótalo en el cuaderno.

a. $4\mathbf{x}^2y^6z^8$

2 4 6 8

b. $x^7\mathbf{y}^7$

0 1 7 14

c. $8\mathbf{a}^2b^4c^9$

2 4 8 9

d. $-9a^4b^4\mathbf{c}^8$

4 8 9 12

e. $-x\mathbf{y}^6z^6$

-1 1 6 12

f. $4a^3b^7\mathbf{c}^4$

3 4 7 8

4. Resuelve las siguientes divisiones de monomios.

a. $x^6y \div x$

b. $\frac{6x^5}{6x^3}$

c. $x^2 \div x$

d. $16a^9b^8 \div 2a^2b^5$

e. $9a^7b^7 \div a^4b^4$

f. $-10a^9bc^6 \div 5a^8c^3$

g. $3a^7c^9 \div -3a^2c^5$

h. $\frac{4x^9y^7z^8}{-2x^2y^3z^8}$

i. $36x^4y^3z^2 \div 4x^3y^3z$

j. $18a^2b^8c^8 \div 6b^4c^3$

5. Identifica por cuáles números en los recuadros es divisible el número ofrecido en cada literal.

a. 9

2 3 5 7

b. 52

2 3 5 7

c. 14

2 3 5 7

d. 20

2 3 5 7

e. 92

2 3 5 7

f. 27

2 3 5 7

6. Anota todos los divisores de cada número.

a. 9
b. 50
c. 20
d. 6
e. 75
f. 58
g. 38
h. 70
i. 22
j. 15
k. 14
l. 30

7. Identifica la factorización de cada polinomio. Escríbela en tu cuaderno.

a. $2x + 6x^9$

$2x(1 + 3x^8)$	$6x^9(3x^8 + 1)$

b. $x^2 - 2x + 1$

$(x - 1)^2$	$(x + 1)^2$

c. $11(m - 7) - 7x(m - 7)$

$4x(m - 7)$	$(m - 7)(11 - 7x)$

d. $x^2 - 4$

$(x - 2)^2$	$(x + 2)(x - 2)$

e. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

$(x - 3)^3$	$x^3 - 27$

f. $x^3 + 8$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2.2 Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Problema

Observa los siguientes monomios.

$8x^4y^8$ $12x^3y^2z^4$

1. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de los coeficientes numéricos de los monomios?
2. ¿Cuál expresión algebraica se forma con los factores literales de mayor grado que tienen esos monomios?
3. ¿Cuál monomio se forma con el mínimo común múltiplo obtenido en el punto 1 y la expresión obtenida en el punto 2?
4. ¿Es divisible la expresión obtenida en el punto 3 entre cada monomio?

Solución

1. Se determina el m. c. m. de 8 y 12:

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

→ El mínimo común múltiplo de 8 y 12 se calcula:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

El m. c. m. de 8 y 12 es 24.

2. Los factores literales de mayor grado que tienen los monomios $\mathbf{8x^4y^8}$, $\mathbf{12x^3y^2z^4}$, son los siguientes:
   - En la letra **x** el exponente de mayor grado es 4: x^4.
   - En la letra **y** el exponente de mayor grado es 8: y^8.
   - La letra **z** solo se observa en el segundo término, por lo tanto se toma: z^4.

   Al unirlas se forma la expresión algebraica:

$$x^4y^8z^4$$

3. Al juntar el mínimo común múltiplo obtenido en el punto 1 y la expresión obtenida en el punto 2 se forma el siguiente monomio:

$$24x^4y^8z^4$$

4. Se realizan las siguientes divisiones:
   - $\dfrac{24x^4y^8z^4}{8x^4y^8} = 3z^4$
   - $\dfrac{24x^4y^8z^4}{12x^3y^2z^4} = 2xy^6$

   Por lo tanto, la expresión $24x^4y^8z^4$ sí es divisible entre cada monomio.

Recuerda

El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números, corresponde al menor múltiplo común diferente de cero de esos números.

Ejemplo:

Algunos múltiplos de 6 y 3 diferentes de cero son:

- Múltiplos de 6: **6**, **12**, 18, 24, ...
- Múltiplos de 3: 3, **6**, 9, **12**, 15, ...

Dos múltiplos comunes que se observan son **6** y **12**. Como el menor múltiplo común es **6**, ese es el m. c. m. de 6 y 3.

Datos interesantes

La Real Academia Española, señala el uso de las abreviaturas m. c. m. para mínimo común múltiplo y m. c. d. para máximo común divisor.

Recuerda

Cuando se dividen monomios se restan los exponentes de los factores literales iguales entre sí.

Ejemplo:

$m^6n^3z^2 \div mn^3 =$

$m^{(6-1)}n^{(3-3)}z^2 =$

m^5z^2

Conclusión

Para calcular el **mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más monomios** se determina el m. c. m. de los coeficientes numéricos y los factores literales de mayor exponente (comunes y no comunes en todos los términos; o sea, de cualquier letra que se repita o no).

Para calcular el **mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más polinomios** se factoriza cada uno por separado y se determinan factores comunes y no comunes de mayor exponente.

El mínimo común múltiplo debe ser divisible entre las expresiones algebraicas que lo determinan.

Ejemplos:

1. Calcula el mínimo común múltiplo de $8a^9$, $10a^4b^9$ y a^3b^2.

   Al calcular el m. c. m. de 8, 10 y 1 se obtiene 40.

   Se eligen los factores literales de mayor exponente: a^9b^9.

   Por lo tanto el m. c. m. de $8a^9$, $10a^4b^9$ y a^3b^2 es $40a^9b^9$.

2. Calcula el mínimo común múltiplo de $a^3 + 2a^2b$, $a^3c - 4ab^2c$ y $a^2c^2 + 4abc^2 + 4b^2c^2$.

   Se factoriza cada expresión algebraica por separado:

   - $a^3 + 2a^2b = a^2(a + 2b)$
   - $a^3c - 4ab^2c = ac(a^2 - 4b^2) = ac(a + 2b)(a - 2b)$
   - $a^2c^2 + 4abc^2 + 4b^2c^2 = c^2(a^2 + 4ab + 4b^2) = c^2(a + 2b)^2$

   El m. c. m. es $a^2c^2(a + 2b)^2(a - 2b)$.

¡Atención!

Observa que en el segundo ejemplo el m. c. m. corresponde a los factores comunes y no comunes de mayor exponente.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina el mínimo común múltiplo de cada grupo de monomios.
   - a. $8a$, $6a^4$
   - b. $2x^2$, $7x^2y^2$, $2x^9y^6$
   - c. $4x^3n^9$, $9x^2$, $6n^4$
   - d. $5x^9y^4$, $6x^8y^6$, $4xy^7$
   - e. $4w^8z^2$, w^8, $16w^3z^8$
   - f. $12x^4y^8$, y^5, $6y^8x^6$, $9x^4$
   - g. $9a^8b^2$, a^8b^2, $2b^4$
   - h. $7y^5z^3$, $3y$, $x^4y^7z^4$
   - i. m^2n^2, $2m^7n^3$, $7n^4m^7$
   - j. $3x^8y^8z^9$, $4x^5y^4z^4$, $6x^4y^6z^7$

2. Determina el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.
   - a. $x^2 - 5x - 6$, $x^2 - 36$
   - b. $y^2 + 6y + 9$, $y^2 - 9$
   - c. $a^3 - 4a$, $a^2 - a - 6$
   - d. $b^2 + 12b + 35$, $b^2 + 3b - 28$
   - e. $y^2 + y - 6$, $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$
   - f. $2x^2 - 10x - 72$, $x^2 - 81$, $4x^2 + 32x + 64$
   - g. $m^3 - mn^2 + m^2n - n^3$, $m^3 - mn^2 - m^2n + n^3$
   - h. $8x + 16$, $9x^2 - 36$, $x - 2$
   - i. $a + 6$, $a^3 + 216$, $a^2 - 36$
   - j. $x^2 + 3x - 4$, $x^2 - 1$, $x^2 - 16$
   - k. $w^2 + 4w + 4$, $w^2 - 7w - 18$
   - l. $8y^3 - 16y^2 + 8y$, $y^2 - 1$

2.3 Máximo común divisor de expresiones algebraicas

Problema

Observa los siguientes monomios.

$28b^2c^4$ $42b^3c^2d$

1. ¿Cuál es el máximo común divisor de los coeficientes numéricos de los monomios?
2. ¿Cuál expresión algebraica se forma con los factores literales de menor grado que tienen en común esos monomios?
3. ¿Cuál monomio se forma con el máximo común divisor obtenido en el punto 1 y la expresión obtenida en el punto 2?
4. ¿Es divisible cada monomio entre la expresión obtenida en el punto 3?

Solución

1. Calcula el m. c. d. de 28 y 42:

28	42	2
14	21	7
1	3	

→ El máximo común divisor de 28 y 42 se calcula:

$2 \cdot 7 = 14$

El m. c. d. de 28 y 42 corresponde a 14.

2. Los factores literales de menor grado que tienen en común los monomios $28b^2c^4$ y $42b^3c^2d$ son:
   - En la letra **b** el exponente de menor grado es 2: b^2.
   - En la letra **c** el exponente de menor grado es 2: c^2.
   - La letra **d** solo corresponde al segundo monomio; por lo tanto no hay factor literal en común para esta letra.

   Al unirlas se forma la expresión:

$$b^2c^2$$

3. Al juntar el máximo común divisor obtenido en el punto 1 y la expresión obtenida en el punto 2 se forma el siguiente monomio:

$$14b^2c^2$$

4. Se realizan las siguientes divisiones:
   - $\dfrac{28b^2c^4}{14b^2c^2} = 2c^2$
   - $\dfrac{42b^3c^2d}{14b^2c^2} = 3bd$

   Por lo tanto, cada monomio sí es divisible entre la expresión $14b^2c^2$.

Recuerda

El máximo común divisor (m. c. d.) de dos o más números. corresponde al mayor divisor en común de esos números.

Ejemplo:

Los divisores de 20 y 16 son:

- Divisores de 20: **1**, **2**, **4**, 5, 10 y 20.
- Divisores de 16: **1**, **2**, **4**, 8 y 16.

Los divisores comunes que se observan son **1**, **2** y **4**. Como el mayor divisor común es **4**, ese es el m. c. d. de 20 y 16.

Conclusión

Para calcular el **máximo común divisor (m. c. d.) de dos o más monomios** se determina el menor divisor común de los coeficientes numéricos y los factores literales comunes de menor exponente.

Para calcular el **máximo común divisor (m. c. d.) de dos o más polinomios** se factoriza cada uno por separado y se determinan los factores comunes de menor exponente.

Las expresiones algebraicas que determinan el máximo común divisor deben ser divisibles entre él.

Ejemplos:

1. Calcula el máximo común divisor de $10a^8$, $6a^9b^7$ y $14a^3b^2$.

   Al calcular el m. c. d. de 10, 6 y 14 se obtiene **2**.

   Se determinan los factores literales comunes de menor exponente: $\mathbf{a^3}$.

   Por lo tanto el m. c. d. de $10a^8$, $6a^9b^7$ y $14a^3b^2$ es $2a^3$.

2. Calcula el máximo común divisor de $a^2 + 10a + 25$, $a^3 + 125$ y $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$.

   Se factoriza cada expresión algebraica por separado:

   - $a^2 + 10a + 25 = \mathbf{(a + 5)}^2$
   - $a^3 + 125 = \mathbf{(a + 5)}(a^2 - 5a + 25)$
   - $a^3 + 15a^2 + 75a + 125 = \mathbf{(a + 5)}^3$

   El m. c. d. es $(a + 5)$.

¡Atención!

Observa que en el segundo ejemplo el m. c. d. corresponde al factor común de menor exponente:

$(a + 5) = (a + 5)^1$

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Determina el máximo común divisor de cada grupo de monomios.

   a. $8a$, $6a^4$
   b. $2x^2$, $7x^2y^2$, $2x^9y^6$
   c. $9x^3n^9$, $9x^2n^9$, $6x^9n^4$
   d. $40x^9y^4$, $48x^8y^6$, $32xy^7$
   e. $4w^8z^2$, w^8z^8, $16w^3z^8$
   f. $12x^4y^8$, $9x^4y^5$, $6y^8x^6$, $9x^4y^3$
   g. $9a^8b^2$, a^8b^2, $2b^4$
   h. $42x^9y^5z^3$, $18x^6y$, $6x^4y^7z^4$
   i. $2m^2n^2$, $2m^7n^3$, $14n^4m^7$
   j. $21x^8y^8z^9$, $28x^5y^4z^4$, $42x^4y^6z^7$

2. Determina el máximo común divisor de los siguientes polinomios.

   a. $y^2 + 4y - 12$, $y^2 - 36$
   b. $y^2 + 6y + 9$, $y^2 - 9$
   c. $a^3 - 4a$, $a^2 - a - 6$
   d. $b^2 + 12b + 35$, $b^2 + 3b - 28$
   e. $y^2 + y - 6$, $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$
   f. $2x^2 - 10x - 72$, $x^2 - 81$
   g. $m^3 - mn^2 + m^2n - n^3$, $m^3 - mn^2 - m^2n + n^3$
   h. $16 - 8x$, $9x^2 - 36$, $x - 2$
   i. $a + 6$, $a^3 + 216$, $a^2 - 36$
   j. $x^2 + 3x - 4$, $x^2 - 1$, $x^2 - 2x + 1$
   k. $w^2 + 4w + 4$, $w^2 - 7w - 18$, $w^2 - 4$
   l. $8y^3 - 16y^2 + 8y$, $y^2 - 1$

2.4 Practico lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Identifica el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de cada expresión algebraica.

a. $2x^4z^5$, $2x^5z^9$, $6x^7y^4z^6$

$6x^7y^4z^9$	$6x^7z^9$	$2x^4z^5$

b. $x^2 - 15x + 54$, $x^2 - 81$, $x^2 - 7x - 18$

$(x - 9)(x - 6)(x + 9)(x + 2)$
$(x - 9)^2(x - 6)(x + 2)$
$(x - 9)$

c. $8x^3y^2$, x^5y^3, $5x^3y^4$

x^3y^2	$40x^5y^4$	$40x^3y^2$

d. $a^3 + 13a^2 - 14a$, $9a^3 - 9a^2$

$9a^2(a - 1)(a + 14)$
$a(a - 1)$
$9a^2(a - 1)$

2. Determina el mínimo común múltiplo de cada grupo de monomios.

a. a^6, $3a^7$

b. $6x^7$, $6x^4y^9$, $9x^4y^5$

c. $10x^9y^9z^2$, $5x^9yz^7$, $4x^2y^8z^8$

d. $6x^4y^8$, $8x^9y^4$, $8x^3y^2$

e. $2w^4z^2$, $2w^7z^2$, $5w^6z^9$

f. $3x^9y^3$, $9y^6$, $3x^{10}$, $3x^7$

g. $7a^7b^5$, $8a^3b^8$, $2a^7b^7$

h. $3y^7z^5$, $6y^4$, $2x^7y^8z$

i. $9m^8n^4$, $6m^5n^4$, $2n^4m^{10}$

j. $7x^9yz^3$, $4y^8z^3$, $7x^2y^6z^7$

3. Determina el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a. $x^2 + 4x - 12$, $x^2 - 4$

b. $y^2 - 2y + 1$, $y^2 - 1$

c. $a^2 - 5a$, $a^2 + 2a - 35$

d. $b^2 - 6b + 8$, $b^2 - 8b + 16$

e. $y^2 - y - 2$, $-8y^2 - 8y + y + 1$

f. $x^2 - 16$, $9x^2 + 72x + 144$

g. $6x + 6$, $6x^2 - 6$, $x - 1$

h. $4m^3 - 324m$, $m^3 - 27$

4. Determina el máximo común divisor de cada grupo de monomios.

a. $6a^4$, $2a^7$, $14a^7$

b. $12x^5$, $9x^5y^9$, $12x^9y^6$

c. $2x^2n^{10}$, $10x^8n^2$, $8x^9n^5$

d. $49x^5y^3$, $7x^9y$, $49x^4y^3$

e. $5w^8z^8$, $5w^4z^3$, $20w^9z^5$

f. $4x^3y$, $36x^3y$, $24y^2x^4$, $6x^7y^2$

g. $5a^3b^3$, $2a^6b^4$, $10b^9$

h. $7x^6yz^9$, $14x^4z^5$, $35x^2y^8z$

i. $6mn^7$, $2n^9$, $8n^2m$

j. $16x^9y^2z^5$, $4x^6y$, $12x^4y^4z^4$

5. Determina el máximo común divisor de los siguientes polinomios.

a. $y^2 - 5y + 6$, $y^2 - 4$

b. $y^2 - 8y + 16$, $y^2 - 16$

c. $2z^3 - 72z$, $2z^2 + 18z + 36$

d. $w^2 - 17w + 72$, $w^2 - w - 56$

e. $y^2 - 3y - 18$, $7y^3 + 21y^2 - 6y - 18$

f. $9x^2 - 18x - 72$, $x^2 - 4$

g. $z^2 - 49$, $z^2 - 14z + 49$

h. $-6x - 54$, $2x^2 - 162$, $x + 9$

i. $w - 2$, $w^3 - 8$, $w^2 - 4$

j. $x^2 + 2x - 35$, $x^2 - 25$, $x^2 - 10x + 25$

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Reconozco la factorización como el proceso que expresa un polinomio como el producto de expresiones algebraicas más simples.			
2. Identifico factores en productos de expresiones algebraicas.			
3. Determino el factor común en un polinomio.			
4. Realizo factorizaciones de polinomios aplicando el método del factor común.			
5. Efectúo factorizaciones de polinomios aplicando el método de la agrupación de términos.			
6. Determino la factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$.			
7. Realizo factorizaciones de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.			
8. Efectúo la factorización de trinomios cuadrados perfectos.			
9. Determino la factorización de binomios que corresponden a una diferencia de cuadrados.			
10. Factorizo polinomios aplicando el método de los cubos perfectos de un binomio.			
11. Resuelvo factorizaciones por el método de suma o diferencia de cubos perfectos.			
12. Realizo factorizaciones sucesivas.			
13. Factorizo polinomios aplicando la combinación de factorizaciones.			
14. Determino el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de monomios y polinomios.			
15. Determino el máximo común divisor (m. c. d.) de monomios y polinomios.			

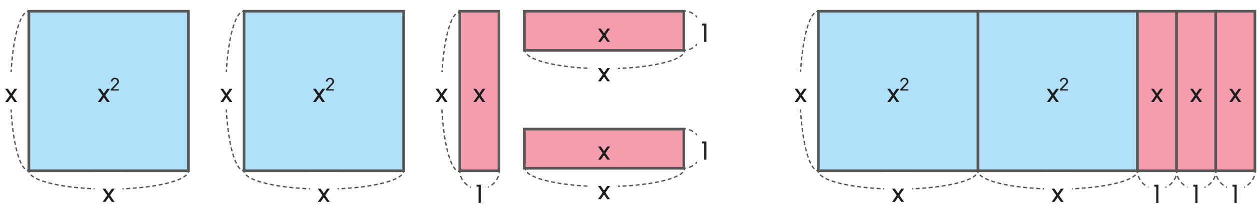
Anexo:
Material complementario

Se presenta el siguiente recurso para que pueda servir como apoyo en algunas clases de este libro. Este material no es para recortar, sino para sacar fotocopias en caso de que sea necesario.

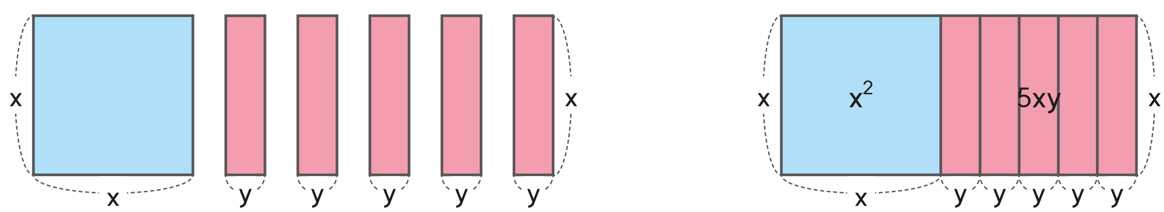
UNIDAD 2: Álgebra

Figuras que se pueden utilizar para las siguientes clases: 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 1.10

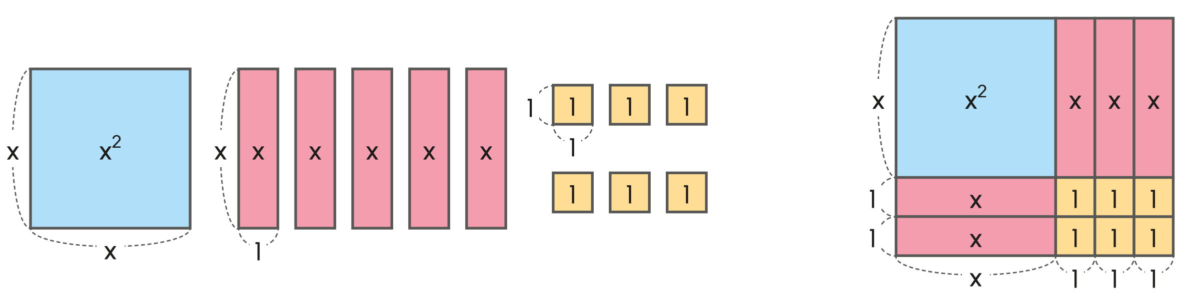
Clase 1.2



Clase 1.3



Clase 1.5



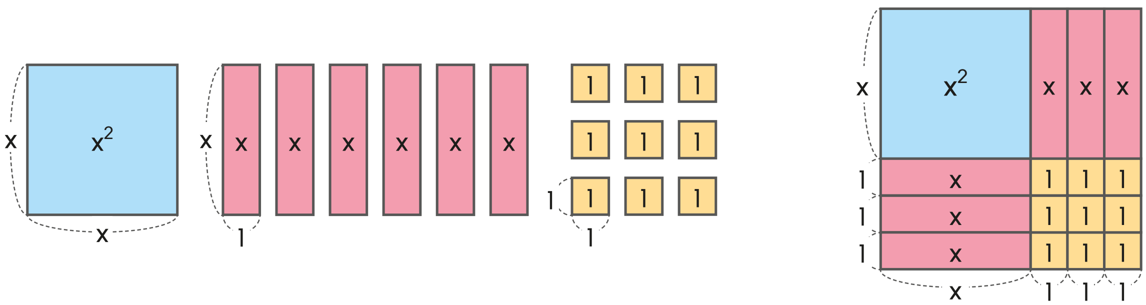
Anexo:
Material complementario

Se presenta el siguiente recurso para que pueda servir como apoyo en algunas clases de este libro. Este material no es para recortar, sino para sacar fotocopias en caso de que sea necesario.

UNIDAD 2: Álgebra

Figuras que se pueden utilizar para las siguientes clases: 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 1.10

Clase 1.8



Clase 1.10

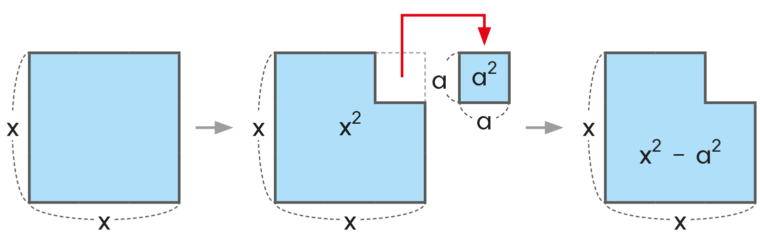


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

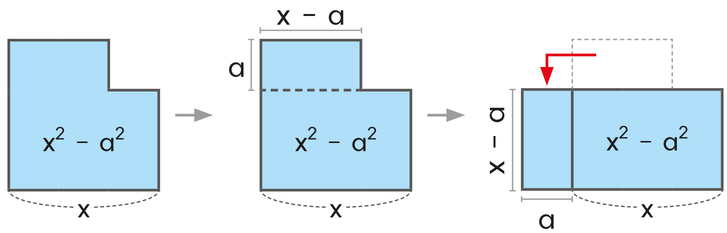


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 9

Guía del estudiante
Trimestre I

2022

De la mano con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)