

# Panamática 8

## Guía del estudiante Trimestre I

$$\sqrt{5} \quad \pi$$

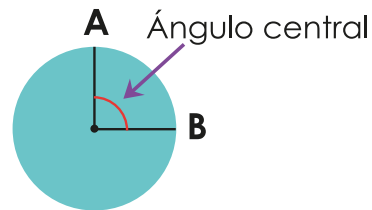
“R”  $(1\frac{1}{3})(-1) = -1$

Exponente  $\rightarrow m$

$n$

Coeficiente  $\rightarrow$

$$c^2 = (a^2) + (b^2)$$



$(+)(+) = +$	$+ \div + = +$
$(+) (-) = -$	$+ \div - = -$
$(-) (+) = -$	$- \div + = -$
$(-) (-) = +$	$- \div - = +$

Material para validación - 2022

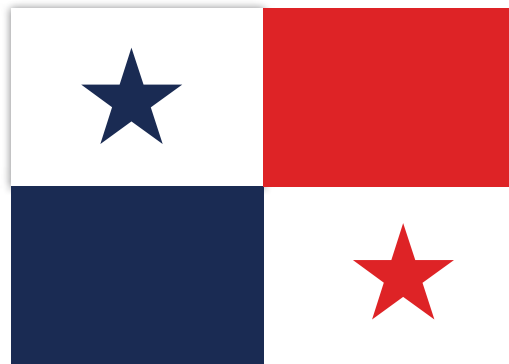


Mediante la Ley 34 de 1949, reformada con la Ley 2 de 2012, se estableció que Panamá adopta como Símbolos de la Nación: la Bandera, el Himno y el Escudo. A partir de dicha Ley se sustituyó la denominación de "símbolos patrios" por "Símbolos de la Nación". Asimismo, con la Ley se creó la Comisión Nacional de los Símbolos de la Nación (Conasina), cuya función principal es promover el uso adecuado de los Símbolos de la Nación.

Himno



Bandera



Escudo



### Autores

Letra: Jerónimo Ossa E.

Música: Santos Jorge A.

Confección: María Ossa de Amador

Diseño: Manuel Encarnación Amador

Concepto: Nicanor Villalaz L.

Diseño y pintura: Max Lemm B.

# Panamática 8

Guía del estudiante 2022

<b>Ministra de Educación</b>	Su Excelencia Maruja Gorday de Villalobos
<b>Viceministra Académica de Educación</b>	Su Excelencia Zonia Gallardo de Smith
<b>Viceministro Administrativo de Educación</b>	Su Excelencia José Pío Castillero
<b>Viceministro de Infraestructura de Educación</b>	Su Excelencia Ricardo Sánchez
<b>Secretario General</b>	Ricardo Alonso Vaz Wilky
<b>Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa</b>	Carmen Heredia Reyes Recuero <b>Directora Nacional</b> Yovany Guerra G. <b>Coordinador Nacional de Matemática</b>
<b>Dirección Nacional de Formación y Perfeccionamiento Docente</b>	Anabella Yepes Martínez <b>Directora Nacional</b>
<b>Equipo de contextualizadores</b>	Jesús Domingo Chacón Pinto Daniel Edil Herrera Muñoz Manuel Antonio Herrera Herrera Guillermo Castillo
<b>Evaluación técnica</b>	Yovany Guerra G.
<b>Coordinación editorial</b>	Esteban Ureña Salazar
<b>Edición</b>	Yorlyn Calderón Quesada y Marilyn Alvarado Vargas
<b>Corrección de estilo</b>	Matilde H. de Loo
<b>Diagramación</b>	Tannia Brenes, Diana Campos y Rosa Cerdas
<b>Conceptualización de portada</b>	Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa Aracelly Agudo
<b>Coordinación del Proyecto</b>	Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)



La serie Panamática ha sido producida gracias a la colaboración del Ministerio de Educación del Gobierno de El Salvador, a través del proyecto ESMATE, material diseñado para Matemática con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Este material didáctico fue posible con el respaldo de los recursos aportados por el Programa Mejorando la Eficiencia y Calidad del Sector Educativo (PN-L1143), Contrato de Préstamo n.º 4357/OC-PN con el Banco Interamericano de Desarrollo, a través del componente Apoyo Pedagógico Integral y Continuo.

La serie ha sido distribuida a estudiantes panameños, en centros educativos oficiales del país. Derechos reservados. Prohibida su venta y su reproducción con fines comerciales por cualquier medio, sin previa autorización del MEDUCA.



## MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Estimados jóvenes:

Estamos contentos y complacidos de volver a verles junto a sus compañeros y profesores. Las clases interactivas, dinámicas, de manera cooperativa y colaborativa permitirán que todos podamos avanzar juntos y hacer del aprendizaje un espacio entretenido y enriquecedor.

La educación tiene el potencial de transformar sus vidas y permitirles más oportunidades para participar en la nueva sociedad del conocimiento y de las tecnologías de la información.

La comprensión lectora, junto con el desarrollo del pensamiento matemático y las habilidades de pensamiento abstracto, son factores clave para progresar en el desarrollo de todas las asignaturas y elegir el tipo de bachillerato que les gustaría estudiar cuando culminen sus estudios de Premedia.

Además, una educación de calidad es también más humana, más inclusiva y altruista; contribuye en la formación de ciudadanos íntegros, solidarios y comprometidos con el futuro de su familia, de su comunidad y de la sociedad. Les ofrece oportunidades, a todos, para mejorar sus competencias a su ritmo, con sus habilidades, sin dejar a nadie atrás; es permanente, equitativa e inclusiva.

Queridos jóvenes, el futuro los espera para que puedan concretar sus metas y alcanzar sus sueños de ser grandes hombres y mujeres, productivos y constructores de una mejor sociedad. Que este retorno a clases fortalezca todas sus competencias y les garantice una formación integral con calidad.

*Éxitos en el año escolar 2022.*

Maruja Gorday de Villalobos

**Ministra de Educación**

# Estructura del libro

## Secciones de la lección y las clases

### Título de la lección

#### Título de la clase

#### Problema

En este primer momento de cada clase, se solicita al estudiante que piense una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido por desarrollar.

#### Solución

En el segundo momento de la clase, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

#### Conclusión

En el tercer momento didáctico, se presenta el contenido de manera formal. Se relacionan los dos primeros momentos para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

#### Observa cómo se hace

Esta sección propone ejemplos de ejercicios resueltos para contribuir a la comprensión del procedimiento relativo a los contenidos de la **Conclusión**.

#### Práctica

En el último momento didáctico se incluyen ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

## Clases especiales

### Repasa tus conocimientos

Este programa aparece siempre como la primera clase de una lección. Propone ejercicios para activar conocimientos previos sobre los temas de la lección.

### Practica lo aprendido

Presenta ejercicios al final de cada lección, que integran los contenidos desarrollados en las clases.

## Distribución de las clases

Este primer tomo se propone para el primer trimestre del curso, y está compuesto por 5 unidades didácticas. Cada unidad está formada por lecciones, y cada lección, por clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección, y el segundo, la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 correspondiente a la lección 2 se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 Título de la clase

Indica el número de clase

## Secciones especiales



### Recuerda

Activa contenidos de clases, unidades o grados anteriores que son necesarios para comprender el tema desarrollado.



### ¿Qué pasaría?

Aborda casos particulares relacionados con el contenido de las secciones **Conclusión** y **Observa cómo se hace**.



### Trabajo colaborativo

Asigna tareas de investigación o ampliación de conocimientos con el fin de fomentar el trabajo en equipo.



### ¡Atención!

Presenta pistas, recomendaciones o información adicional para resolver los ejercicios propuestos o comprender los ejemplos desarrollados.



### Datos interesantes

Proporciona datos complementarios de diverso tipo (histórico, cultural, técnico), relacionados con los contenidos desarrollados durante la clase.



### Desarrollo sostenible

Propone textos informativos y acciones posibles en relación con el desarrollo sostenible, específicamente en cuanto al clima, la producción y el consumo responsables, el trabajo decente, el crecimiento económico, la igualdad de género, la salud y el bienestar.

## Inicios de unidad

Se indica el número de unidad así como el tema central que se desarrollará durante las siguientes lecciones.

Se presenta una introducción general al tema por estudiar, para contextualizarlo en la historia de la cultura y de la matemática.

Finalmente se incluyen las habilidades por desarrollar durante la unidad.



## Trabaja en tu cuaderno

Este ícono aparece en todas las clases de **Repasa tus conocimientos** y **Practica lo aprendido**, además de las secciones **Practica** de todas las clases. Su propósito es recordarle al estudiante que debe resolver todos los ejercicios en su cuaderno.

Trabaja en  
tu cuaderno



# Índice

## Unidad 1:

Números irracionales .....7

**Lección 1:** El conjunto de los números irracionales .....8

## Unidad 2:

Los números reales y la recta numérica .....17

**Lección 1:** Los números reales ..... 18

**Lección 2:** Los números reales en la recta numérica .....22

## Unidad 3:

Operaciones básicas con números reales .....29

**Lección 1:** Propiedades generales de la adición y la sustracción .....30

**Lección 2:** Adición con números reales .....32

**Lección 3:** Sustracción con números reales.....36

**Lección 4:** Propiedades generales de la multiplicación y la división .....38

**Lección 5:** Multiplicación con números reales .....40

**Lección 6:** División con números reales.....43

## Unidad 4:

Potenciación y radicación con números reales .....47

**Lección 1:** Potenciación .....48

**Lección 2:** Radicación .....52

**Lección 3:** Operaciones combinadas .....60

**Lección 4:** Origen y utilidad de la notación científica .....62

## Unidad 5:

Operaciones con expresiones algebraicas .....67

**Lección 1:** Operaciones básicas con expresiones algebraicas .....68

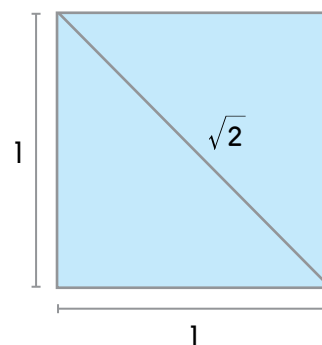
**Lección 2:** Potenciación y radicación con expresiones algebraicas .....88

## Números irracionales

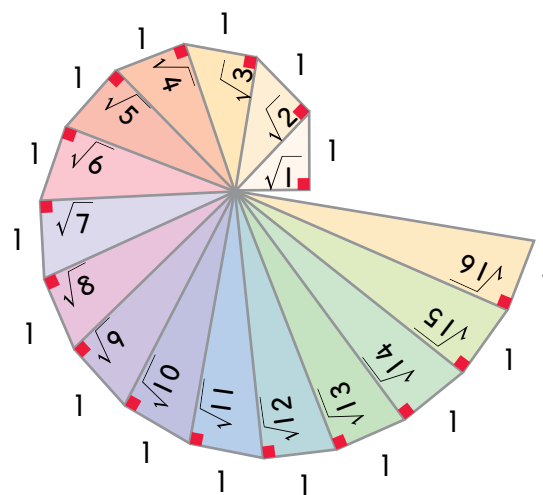
En la historia de la matemática, el descubrimiento de un nuevo conjunto numérico llegó, en ocasiones, a crear un conflicto en el mundo científico antiguo; tal como sucedió con los números irracionales. Alrededor del siglo V a. C., el matemático griego Hipasus (miembro de la Escuela pitagórica) demostró la existencia de este tipo de números, al determinar que la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 era un número que no puede expresarse como una fracción, esto causó indignación en su época.

Por otra parte, la expansión del conocimiento hasta los números reales y que existen números infinitos, permitió el desarrollo de áreas imprescindibles como el cálculo y la aritmética, además, una mayor precisión en las mediciones de los objetos; también potenció el desarrollo de la física y química, disciplinas que estudiamos en la actualidad. Uno de los números irracionales más importantes de la matemática es el que surge al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro, ese número es ( $\pi$ )  $\pi = 3,1415926535\dots$  seguido de infinitos decimales.

La diagonal de un cuadrado de lado 1 mide raíz cuadrada de 2.



Sucesión de raíces cuadradas obtenidas a través de triángulos rectángulos.



### En esta unidad aprenderás a...

- Explicar el origen y el concepto de los números irracionales.
- Identificar correctamente números irracionales.
- Aproximar los decimales de un número irracional, redondeando las cifras.
- Localizar números irracionales en la recta numérica.

# El conjunto de los números irracionales

## 1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno



Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

- ¿Cuál número corresponde a un número natural?
  - 3
  - 2,5
  - 526
  - $\sqrt{2}$
- ¿Cuál número corresponde a un entero negativo?
  - 15
  - $\sqrt{5}$
  - 8,35
  - 428
- El resultado de  $2,5 + 6$  es un número
  - natural
  - entero negativo
  - entero positivo
  - racional positivo
- ¿Cuál número decimal representa la fracción  $\frac{1}{2}$ ?
  - 0,3
  - 0,5
  - 2
  - 5
- Copia las rectas numéricas en tu cuaderno y complétalas.

a.



b.



c.



- Anota en tu cuaderno el número entero que está antes y después de cada número dado.

a.



b.



- Resuelve en el cuaderno el siguiente problema.

- Jairo comenta que el número  $\sqrt{25}$  es un número natural, por su parte, Andrés explica que también es un número racional. ¿Quién ha respondido correctamente?

## 1.2 El conjunto de los números irracionales

### Problema

- Representa los siguientes números como fracciones:
  - 7
  - 0,25
  - 2,3
- Utiliza la calculadora y determina el número decimal de cada número indicado. Luego, responde.
  - ¿Cuántas cifras decimales posee cada número?
  - ¿Cuáles de esos números no pueden representarse como fracción?
  - ¿Cuáles de esos números son racionales?
- Escribe el símbolo  $>$ ,  $<$  o  $=$  según corresponda. Usa la calculadora.
  - $\sqrt{12}$    $\sqrt{5}$
  - $3$    $\sqrt{10}$
  - $-\sqrt{11}$    $2$

### Solución

- Toda división entre uno da como resultado el mismo número, por lo tanto:  $7 = \frac{7}{1}$ .
  - 0,25 tiene dos cifras decimales, es decir,  $0,25 = \frac{25}{100}$  que al ser simplificada da como resultado  $\frac{1}{4}$ .
  - 2,3 tiene una cifra decimal, por tanto,  $-2,3 = -\frac{23}{10}$ .
- $$\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732050808\dots$$

$$\sqrt{15} \approx 3,872983346\dots$$

$$\sqrt{100} = 10$$
  - Todos los números, excepto  $\sqrt{100}$ , tienen infinitas cifras decimales.
  - Solamente  $\sqrt{100}$  puede expresarse como fracción:  $\sqrt{100} = 10 = \frac{10}{1}$
  - Un número es racional si puede expresarse como fracción, es decir, únicamente  $\sqrt{100}$  es un número racional.
- Al utilizar la calculadora se tiene que:
  - Como  $\sqrt{12} \approx 3,46\dots$  y  $\sqrt{5} \approx 2,23\dots$  y  $3,46 > 2,23$  entonces  $\sqrt{12}$    $\sqrt{5}$
  - $\sqrt{10} \approx 3,16\dots$  y  $3 < 3,16\dots$ , entonces  $3$    $\sqrt{10}$
  - $-\sqrt{11} \approx -3,31\dots$  y  $-3,31\dots < 2$ , entonces,  $-\sqrt{11}$    $2$

### Trabajo colaborativo

- En pareja, investiga qué tienen en común las caracolas y las flores de los girasoles.



### ¿Qué pasaría?

Al convertir un número decimal a fracción, se escribe en el numerador la cantidad sin la coma y, en el denominador, 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Ejemplo:

$$0,25 = \frac{25}{100}$$

$$-2,3 = -\frac{23}{10}$$



### Recuerda

El símbolo " $\approx$ " significa aproximadamente.



## Recuerda

La expansión decimal de un número puede ser finita (que tiene fin, como 0,56), infinita periódica (que se repite como 1,3535...) o infinita NO periódica (no tiene fin, como 5,35964...).



## Datos interesantes

$\pi$  y  $e$  son números irracionales importantes. El primero ( $\pi$ ) relaciona la longitud de la circunferencia con la medida de su diámetro:  $\pi = \frac{C}{d}$ .

El segundo ( $e$ ), es llamado número de Euler y es la base del logaritmo natural que será estudiado más adelante.

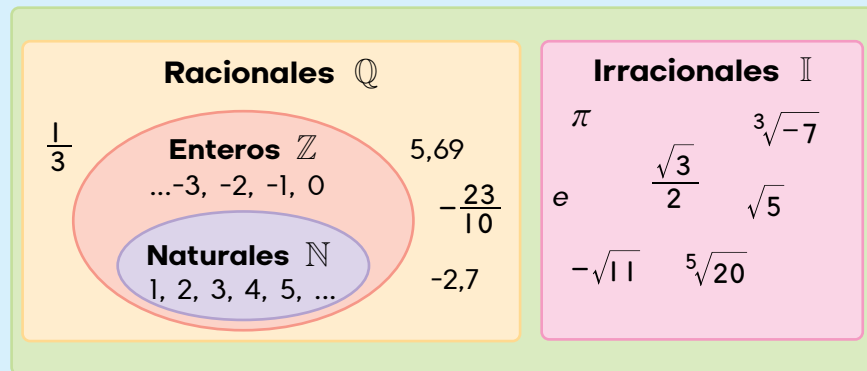
## Conclusión

El conjunto de los **números racionales** ( $\mathbb{Q}$ ) está formado por todas aquellos números que pueden representarse como una fracción de la forma  $\frac{a}{b}$  con  $a$  y  $b$  números enteros,  $b \neq 0$ . Además, al dividir  $a \div b$  su cociente es un número decimal finito o infinito periódico. Por ejemplo:

- $\frac{9}{4}$  es racional porque  $9 \div 4 = 2,25$  (expansión decimal finita).
- $\frac{1}{3}$  es racional pues  $1 \div 3 = 0,333\dots$  (expansión decimal infinita periódica).

El conjunto de los **números irracionales** ( $\mathbb{I}$ ) está formado por números que no son racionales, por lo tanto, poseen una expansión decimal infinita no periódica. Por ejemplo:

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  es irracional porque  $\sqrt{3} \div 2 \approx 0,8660254038\dots$
- $\pi$  es irracional porque  $\pi \approx 3,141592654\dots$
- $e$  es irracional porque  $e \approx 2,718281828\dots$
- $\sqrt[3]{7}$  es irracional porque  $\sqrt[3]{7} \approx 1,912931\dots$
- $\sqrt{5}$  es irracional porque  $\sqrt{5} \approx 2,236067\dots$



## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Representa cada fracción en su notación decimal. Luego, clasifica la expansión decimal en finita o infinita periódica.

a.  $\frac{4}{3}$

b.  $\frac{5}{8}$

c.  $\frac{5}{11}$

d.  $\frac{3}{5}$

2. Utiliza la calculadora para determinar el valor aproximado de cada raíz cuadrada. Identifica cuáles de ellas corresponden a números irracionales.

a.  $\sqrt{6}$

c.  $-\sqrt{100}$

e.  $\sqrt{\frac{e}{2}}$

g.  $\sqrt{\frac{25}{49}}$

b.  $\sqrt{91}$

d.  $\sqrt{\pi}$

f.  $\sqrt{121}$

h.  $\sqrt{4}$

3. Clasifica los números como racionales o irracionales según corresponda.

a. 8

c. -6,35

e.  $e + 2$

g. 9,3578...

b. -0,09

d.  $-\pi$

f. 7,55555...

h.  $\frac{25}{2}$

### 1.3 Valor aproximado

#### Problema

Determina la notación decimal de  $\frac{33}{7}$  a través de una división con la calculadora. Luego, aproxima los números según se indica:

1. Redondea el resultado a las unidades.
2. Redondea el resultado a las décimas.
3. Redondea el resultado a las centésimas.

#### Solución

Para determinar la notación de la fracción  $\frac{33}{7}$  se efectúa  $33 \div 7$  y se obtiene como resultado 4,714 con residuo 2.

Por calculadora se obtiene 4,714 285 714...

1. Al redondear a la unidad se observa la cifra de las décimas, como es 7 se suma 1 a la unidad. Es decir, 4,714... redondeado a la unidad más próxima es 5.
2. Al redondear a la décima se observa la cifra de las centésimas, como es 1 la décima no cambia. Por tanto, 4,714... redondeado a la décima más próxima es 4,7.
3. Al redondear a la centésima se observa la cifra de las milésimas, como es 4 la centésima no cambia. Es decir, 4,714... redondeado a la centésima más próxima es 4,71.

#### Conclusión

Al **redondear** un número, se obtiene un valor cercano al real, es decir, el número obtenido después de aplicar el redondeo es un **valor aproximado**. Obtener un valor aproximado es útil al realizar cálculos mentales.

Para calcular el valor aproximado se emplean las estrategias de redondeo aprendidas anteriormente. Es decir:

1. Se identifica la posición a aproximar.
2. Si la cifra a la derecha de la posición a aproximar es menor que 5, esa cifra y las que continúan se eliminan.
3. Si la cifra a la derecha de la posición a aproximar es mayor o igual a 5, se suma 1 a la cifra y todos los dígitos a su derecha se eliminan.



#### Recuerda

U	,	d	c	m
4	,	7	1	4

Donde:

**U:** unidades

**d:** décimas

**c:** centésimas

**m:** milésimas

$$33 \div 7 = 4,714$$

$$\begin{array}{r}
 33 \div 7 = 4,714 \\
 \underline{-28} \\
 50 \\
 \underline{-49} \\
 10 \\
 \underline{-7} \\
 30 \\
 \underline{-28} \\
 2
 \end{array}$$



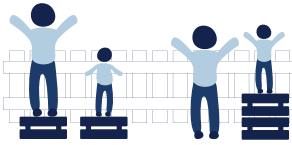
#### Trabajo colaborativo

Forma grupos y repasen la división de cantidades que contengan cocientes con más de 3 cifras decimales.



## Desarrollo sostenible

### Igualdad Equidad



Igualdad y equidad son conceptos distintos. La equidad reconoce las diferencias individuales y procura solventarlas, permitiendo el desarrollo pleno de la persona.

## Observa cómo se hace

Observa la forma en que se aproximan cantidades decimales.

- Al aproximar 5,076 125 a la centésima:
  - Identifica la posición (**centésima**): 5,07**6** 125
  - Observa la cifra a su derecha: **6**
  - Como  $6 > 5$ , se suma 1 a **7**:  $7 + 1 = 8$
  - Se escribe la cantidad eliminando las cifras: 5,0**8**
- Al aproximar -2,437 501 a la décima:
  - Identifica la posición (**décima**): -2,4**3**7 501
  - Observa la cifra a su derecha: **3**
  - Como  $3 < 5$ , se mantiene igual.
  - Se escribe la cantidad eliminando las cifras: -2,4

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Escribe en tu cuaderno el valor aproximado a la unidad.
 

a. 2,586 45	c. 0,953	e. -8,086 94	g. -3,450 001
b. -5,253 589	d. 15,098 987	f. 4,698 947	h. 10,589 601
- Encuentra el valor aproximado a la décima.
 

a. 8,492 581	c. 0,095 95	e. -1,235	g. -4,023 005
b. -1,395 689	d. 5,725 002	f. -6,051 360	h. 0,676 405
- Determina el valor aproximado a la centésima.
 

a. 2,586 45	c. 0,953	e. -8,086 94	g. -8,450 001
b. -5,253 589	d. 15,098 987	f. 4,698 947	h. 10,589 601
- Escribe el valor aproximado a la milésima.
 

a. 8,492 581	c. 0,095 95	e. -1,235 54	g. -4,023 005
b. -1,395 689	d. 5,725 002	f. -6,051 360	h. 0,676 405
- Sofía aproximó 15,235 879 y obtuvo como resultado 15,24. Hermes aproximó el mismo número, pero a otra posición y obtuvo 15,2. ¿A cuál posición aproximó las cantidades cada estudiante?
- La fórmula para calcular el área de un círculo es  $\pi \cdot r^2$ , con  $\pi \approx 3,1415\dots$ . Determina el área de un círculo de radio 2,4578 aproximando los valores a la centésima.
- Luis dispone de B/5 para adquirir su almuerzo. Antes de solicitarlo decide aproximar las cantidades del menú a la unidad para verificar que le alcance. ¿Cuáles alimentos de la tabla puede adquirir sin sobrepasar su presupuesto?

Producto	Precio	Producto	Precio
Ensalada	B/0,70	Porotos	B/0,90
Chuleta	B/2,50	Arroz	B/0,50
Pollo	B/1,70	Verduras	B/1,20

## 1.4 Los números irracionales en la recta numérica



Forma grupos e investiguen cuáles son las características de las rectas numéricas y de qué forma se emplean en la cotidianidad.

### Problema

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica.

- a. 0,556 758...    b.  $\sqrt{2}$     c.  $e$     d.  $\pi$



### Solución

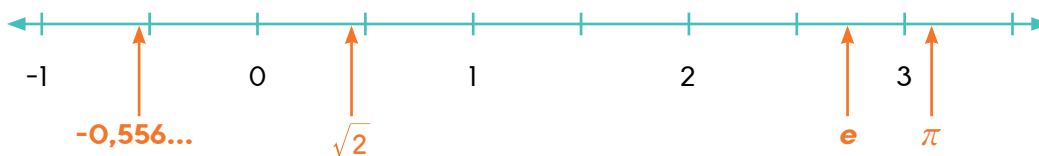
Expresa cada cantidad en su notación decimal de forma aproximada:

- a.  $-0,556\ 758... \approx -0,56$     c.  $e \approx 2,718\ 281... \approx 2,72$   
 b.  $\sqrt{2} \approx 1,414\ 213... \approx 1,41$     d.  $\pi \approx 3,141\ 592... \approx 3,14$

Identifica entre cuáles números enteros se ubica cada aproximación:

- a.  $-1 < -0,56 < 0$     c.  $2 < 2,72 < 3$   
 b.  $1 < 1,41 < 2$     d.  $3 < 3,14 < 4$

Ubica cada número de forma aproximada en la recta numérica.



### Conclusión

Los números irracionales se pueden representar en la recta numérica utilizando estos pasos:

1. Si no están expresados de forma decimal, se utiliza la calculadora para expresarlos en esa notación de forma aproximada.
2. Se identifican los números enteros más cercanos a la cantidad.
3. Se ubica el número en la recta numérica de forma aproximada.

En la recta numérica los números se encuentran ordenados del menor al mayor, de izquierda a derecha, por ello, todo número a la derecha de otro es mayor. Por ejemplo, en el problema inicial  $\pi > e$ .



Sin importar el tipo de redondeo que se realice (a las décimas, las centésimas o milésimas), la ubicación en la recta numérica de un número irracional siempre será una aproximación de su ubicación real.



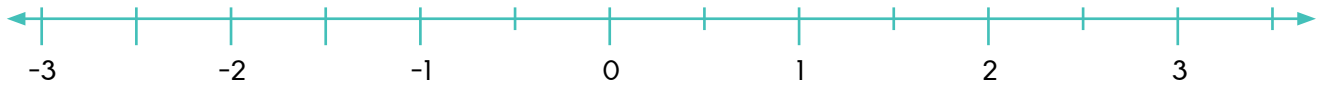
1. Determina la expansión decimal de los números y aproxímalos a la décima. Usa la calculadora.

a. $\frac{\sqrt{4}}{5}$	c. $\frac{8\sqrt{2}}{4}$	e. $-\frac{e^2}{3}$	g. $\frac{-2\sqrt{10}}{6}$
b. $\frac{\sqrt{\pi+e}}{2}$	d. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$	f. $\sqrt{7+\pi}$	h. $\frac{-5\sqrt{3}}{4}$

2. Escribe, en tu cuaderno, entre cuáles números enteros se encuentran las cantidades anteriores.

a. $\frac{\sqrt{4}}{5}$	c. $\frac{8\sqrt{2}}{4}$	e. $-\frac{e^2}{3}$	g. $\frac{-2\sqrt{10}}{6}$
b. $\frac{\sqrt{\pi+e}}{2}$	d. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$	f. $\sqrt{7+\pi}$	h. $\frac{-5\sqrt{3}}{4}$

3. Dibuja, en tu cuaderno, la recta numérica y representa los números anteriores en ella.



4. Representa las cantidades en la recta numérica.

a. -2,305 247...	c. -0,453 215...	e. -2,086 701...	g. 0,457 987...
b. -4,730 951...	d. 1,005 458...	f. 0,795 368...	h. -3,453 258...



5. Determina el símbolo (>, < o =) que une correctamente ambos números. Usa la recta numérica anterior.

a. -2,305 247... <input type="text"/>	-2,086 701...	d. 0,795 368... <input type="text"/>	0,457 987...
b. -3,453 258... <input type="text"/>	-4,730 951...	e. -3,453 258... <input type="text"/>	1,005 458...
c. -0,453 215... <input type="text"/>	0,795 368...	f. -2,086 701... <input type="text"/>	-0,453 215...

6. Encuentra un número irracional que cumpla con la desigualdad. Usa la recta numérica para guiarte.



a. $\sqrt{4+\pi} < \boxed{\phantom{000}} < \sqrt{20}$	d. $\frac{\sqrt{10}}{5} < \boxed{\phantom{000}} < \frac{7}{5}$
b. $2\sqrt{7} > \boxed{\phantom{000}} > 0$	e. $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} > \boxed{\phantom{000}} > \frac{\sqrt{12}}{7}$
c. $-\sqrt{2} > \boxed{\phantom{000}} > -\sqrt{3}$	f. $\frac{5e}{4} > \boxed{\phantom{000}} > \frac{\sqrt{4}}{2}$

## 1.5 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Identifica los números que presentan una expansión decimal infinita periódica.

-4,5666...     -2,5     2,357 812...     8,058 732

2. Identifica cuáles cantidades corresponden a un número irracional.

-4,5666...     -2,5     2,357 812...     8,058 732

3. Calcula la aproximación a la décima de  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .

1,6     1,7     1,69     1,697

4. Identifica la aproximación a la centésima de  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .

1,60     1,70     1,69     1,697

5. Determina un número irracional que se ubique antes y otro después del número indicado.

a. Antes                      Después

←  $\sqrt{5}$  →

b. Antes                      Después

←  $-\pi$  →

5. Copia la recta numérica en tu cuaderno y representa los números indicados.

a. -1,758...    b. -0,236...    c.  $\sqrt{6}$     d.  $\sqrt{3}$     e.  $\sqrt{2e}$     f.  $\sqrt{5\pi}$



6. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

- a. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de largo  $5\sqrt{3}$  y ancho  $4\sqrt{3}$ .

- Representa las medidas obtenidas en una recta numérica.

- b. Calcula el área y el perímetro de un triángulo equilátero de lado  $\sqrt{5}$  y altura  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

- Representa las medidas obtenidas en una recta numérica.

- c. Calcula el área y la medida de la circunferencia de un círculo de radio  $2\sqrt{2}$ .

- Representa las medidas obtenidas en una recta numérica.



## Recuerda

$$A_{\text{rectángulo}} = l \cdot a$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

$$C = 2\pi r$$

El perímetro del triángulo y del rectángulo es igual a la suma de todos los lados.

## Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Explico con interés el origen de los números irracionales.			
2. Explico con interés el concepto de los números irracionales.			
3. Identifico correctamente números irracionales.			
4. Clasifico números en racionales o irracionales.			
5. Aproximo los decimales de un número irracional tomando en cuenta el redondeo de cifras a la décima.			
6. Aproximo los decimales de un número irracional tomando en cuenta el redondeo de cifras a la centésima.			
7. Aproximo los decimales de un número irracional tomando en cuenta el redondeo de cifras a la milésima.			
8. Localizo con seguridad números irracionales en la recta numérica.			
9. Determino si un número irracional es mayor, menor o igual a otro número.			

## Los números reales y la recta numérica

Con la invención de la agricultura (15000-10000 a. C.) la humanidad tuvo que enfrentarse a la noción de número, que surgiría al contar las cabezas de ganado o al distribuir los distintos cultivos.

En la antigua Grecia, hacia el siglo VI a. C., el movimiento religioso y filosófico conocido como los pitagóricos, por ser seguidores de Pitágoras de Samos, atribuían un papel especial al número entero y definieron el número racional como la razón (o división) de las longitudes de dos segmentos conmensurables (uno está contenido un número entero de veces en el otro).

El descubrimiento de números no conmensurables dio origen a los números irracionales, pero no fue sino hasta el siglo XIX cuando el matemático francés Louis Cauchy ofreció la idea que un número irracional era la aproximación de varias fracciones racionales.

Desde las primeras nociones hasta la formalización matemática de los números reales en el siglo XIX, este conjunto numérico ha significado una herramienta indispensable para la comprensión y el estudio de la naturaleza y la realidad, partiendo de la continuidad que poseen fenómenos como el tiempo o la materia, de modo que a partir del uso de los números reales se ha podido modelar matemáticamente de manera más certera el universo que rodea al ser humano, y a partir de ello intentar describirlo y comprenderlo.



*El símbolo de "infinito" fue introducido por el matemático inglés John Wallis en el siglo XVII, y es uno de los conceptos básicos para la fundamentación de los números reales.*

### En esta unidad aprenderás a...

- Identificar cada conjunto numérico por su símbolo.
- Construir el conjunto de los números reales a través de los distintos conjuntos numéricos.
- Ubicar con seguridad números reales en la recta numérica.
- Reconocer la ubicación de números reales en la recta numérica.
- Utilizar los signos de relación para comparar números reales.
- Presentar de forma progresiva o regresiva los números reales.

# Los números reales

## 1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

a. ¿Cuál símbolo representa el conjunto de los números naturales?

  $\mathbb{R}$ 
  $\mathbb{Q}$ 
  $\mathbb{N}$ 
  $\mathbb{I}$ 

b. ¿Cuál símbolo representa el conjunto de los números irracionales?

  $\mathbb{R}$ 
  $\mathbb{Q}$ 
  $\mathbb{N}$ 
  $\mathbb{I}$ 

c. ¿Cuál símbolo representa el conjunto de los números racionales?

  $\mathbb{R}$ 
  $\mathbb{Q}$ 
  $\mathbb{N}$ 
  $\mathbb{I}$ 

d. ¿Cuál conjunto numérico es parte del conjunto de los números racionales?

  $\{0, 1, \sqrt{4}, 3, 4\}$ 
  $\{-1, 0, \frac{e}{2}, 1\}$ 
  $\{-2, -1, 2, 4\pi\}$ 
  $\{0, 1, 2, 3, 4, \sqrt{5}\}$ 

e. ¿Cuál conjunto numérico es parte del conjunto de los números irracionales?

  $\{-1, e, \pi, \sqrt{4}\}$ 
  $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ 
  $\{\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$ 
  $\{-e, \frac{2\pi}{3}, \sqrt{5}\}$ 

2. Copia la recta numérica en tu cuaderno y representa los números indicados.

a.  $-1,3598\dots$

b.  $0,55555\dots$

c.  $e$

d.  $\pi$

e.  $4,3756\dots$



3. Copia la recta numérica en tu cuaderno y representa los números indicados.

a.  $-2e$

b.  $\frac{2\pi}{3}$

c.  $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$

d.  $\sqrt{11}$

e.  $\frac{\sqrt{7}}{12}$



4. Marcia participa en una caminata en la montaña. En la primera hora avanzó  $\frac{1}{3}$  del total, la segunda hora subió pendientes y por ello caminó la mitad de lo avanzado en la primera hora.

a. ¿Qué fracción de la caminata le queda por recorrer?

b. Si la caminata constaba de 22 km, ¿cuántos kilómetros recorrió cada hora? ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

## 1.2 El conjunto de los números reales

### Problema

- Representa los siguientes números en su notación decimal.
 

a. $\frac{-8}{2}$	c. $\frac{2}{5}$	e. $\sqrt{3}$	g. $\pi$
b. $\frac{12}{6}$	d. $\sqrt{9}$	f. $2\sqrt{2}$	h. $-e$
- Clasifica los números anteriores en racionales o irracionales.
- Identifica los números naturales o enteros obtenidos anteriormente.

### Solución

- Se emplea la calculadora para determinar la notación decimal de cada cantidad.
 

a. $\frac{-8}{2} = -4$	c. $\frac{2}{5} = 0,4$	e. $\sqrt{3} \approx 1,73\dots$	g. $\pi \approx 3,141\dots$
b. $\frac{12}{6} = 2$	d. $\sqrt{9} = 3$	f. $2\sqrt{2} \approx 2,82\dots$	h. $-e \approx -2,718\dots$
- Se verifica el tipo de expansión decimal de cada número para clasificarlos en racionales o irracionales.
 

a. $\frac{-8}{2} = -4 \rightarrow$ racional	e. $\sqrt{3} \approx 1,73\dots \rightarrow$ irracional
b. $\frac{12}{6} = 2 \rightarrow$ racional	f. $2\sqrt{2} \approx 2,82\dots \rightarrow$ irracional
c. $\frac{2}{5} = 0,4 \rightarrow$ racional	g. $\pi \approx 3,141\dots \rightarrow$ irracional
d. $\sqrt{9} = 3 \rightarrow$ racional	h. $-e \approx -2,718\dots \rightarrow$ irracional
- Los números naturales y los números enteros son racionales, al identificarlos se debe recordar que:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty\}$$

Donde  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales y  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros. Por lo tanto:

- $\frac{-8}{2} = -4 \rightarrow$  entero
- $\frac{12}{6} = 2 \rightarrow$  natural y entero
- $\sqrt{9} = 3 \rightarrow$  natural y entero



### Recuerda

Los números racionales tienen una expansión decimal finita (que tiene fin) o infinita periódica (la totalidad o parte de su expansión decimal se repite infinitamente). Los números irracionales tienen una expansión decimal infinita NO periódica.

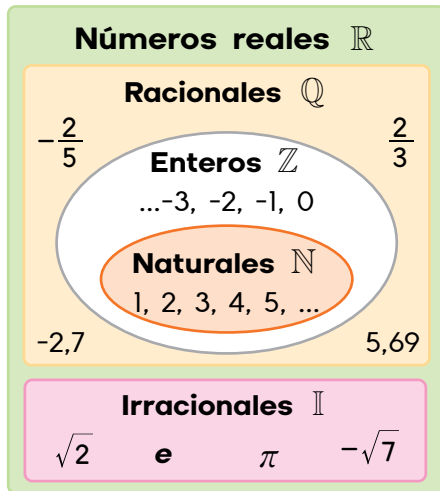


### Datos interesantes

El número  $e$  o número de Euler (o número neperiano) se puede aproximar mediante la expresión:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\dots$$

## Conclusión



El conjunto de los **números reales**, cuyo símbolo es  $\mathbb{R}$ , está formado por la unión del conjunto de **números racionales**  $\mathbb{Q}$  y el conjunto de los **números irracionales**  $\mathbb{I}$ .

Es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Por ejemplo:

- Los números naturales como 1 y 5 son reales porque pertenecen a  $\mathbb{Q}$ .
- Los números enteros como 0 y -3 son reales porque pertenecen a  $\mathbb{Q}$ .
- Números como  $e$  y  $\sqrt{2}$  son reales porque pertenecen a  $\mathbb{I}$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Identifica cuáles de los siguientes números pertenecen a  $\mathbb{N}$ . Usa la calculadora.
  - $\frac{\sqrt{4}}{2}$
  - $\frac{6\sqrt{e-e}}{2}$
  - $\frac{12}{4}$
  - $\frac{\sqrt{3}}{4}$
  - $-\frac{5}{3}$
  - $\sqrt{49}$
  - $-\frac{2}{6}$
  - $\frac{-10}{5}$
- Determina cuáles de los siguientes números pertenecen a  $\mathbb{Z}$ . Usa la calculadora.
  - $\frac{\sqrt{25}}{5}$
  - $\frac{\sqrt{\pi-e}}{2}$
  - $\frac{-8\sqrt{16}}{4}$
  - $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$
  - $-\frac{3^2}{3}$
  - $2\sqrt{7}$
  - $\frac{-2\sqrt{9}}{6}$
  - $\frac{-5\sqrt{3}}{4}$
- Explica por qué los siguientes números son reales o a cuál subconjunto de los reales pertenece.
  - $\frac{\sqrt{5}}{2}$
  - 10
  - $\frac{\sqrt{4}}{4}$
  - $\frac{\pi}{4}$
  - 0
  - 5
  - $\frac{-2}{6}$
  - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Copia la tabla e identifica el conjunto o conjuntos a los que pertenezca cada número.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$\frac{5}{4}$					
-8					
$\sqrt{100}$					
$e$					

## 1.3 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

a. El número que pertenece a  $\mathbb{N}$  corresponde a -7,666... -5 e 8

b. Un número entero negativo corresponde a

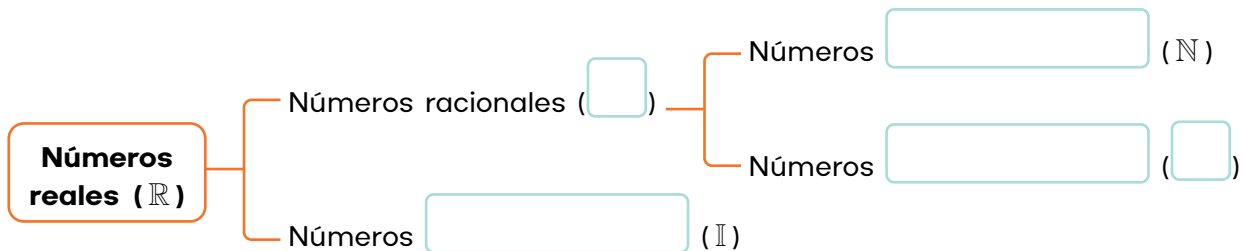
 -7,666... -5 e 8c. ¿Cuál número que pertenece a  $\mathbb{I}$ ? -4,333... 0 -e 8

d. ¿Cuál número es racional negativo?

 -4,333... 0 -e 8**Trabajo  
colaborativo**

Trabajen en pares e **inventen** una historia donde representen la importancia de los números reales en la sociedad actual.

2. Completa el esquema con los símbolos o nombres correspondientes.



3. Copia la tabla e identifica el conjunto o conjuntos a los que pertenezca cada número.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
0					
-2,59871...					
$\frac{3}{6}$					
$\sqrt{64}$					

**¡Atención!**

La operación inversa de la potenciación es la radicación, por ello, si:

$l^2 = 10\ 000$   
entonces,

$$l = \sqrt{10\ 000}$$

4. Ester necesita construir una mesa cuadrada de  $10\ 000\text{ cm}^2$ .

a. ¿Cuánto debe medir cada lado de la mesa?

b. ¿A cuáles conjuntos numéricos pertenece la longitud del lado?

c. Si le encargan otra mesa cuadrada cuya área sea de  $15\ 000\text{ cm}^2$ , ¿cuánto debe medir cada lado de la mesa aproximadamente? ¿a cuáles conjuntos numéricos pertenece la longitud del lado?

# Los números reales en la recta numérica

## 2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Lee las instrucciones e identifica la opción correcta.

a. Al aproximar 1,7357 a la unidad se obtiene como resultado

 1

 1,7

 1,8

 2

b. Al aproximar 1,7357 a la décima se obtiene como resultado

 1

 1,7

 1,8

 2

c. Al aproximar 1,7357 a la centésima se obtiene como resultado

 1,7

 1,73

 1,74

 1,8

d. La fracción  $\frac{-1}{2}$  se ubica entre los números

 0 y 1

 -1 y 0

 1 y 2

 -1 y -2

e. El conjunto de los números reales está conformado por la unión de estos conjuntos numéricos

  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$ 
  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}$ 
  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$ 
  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ 

2. Identifica los números que faltan en las rectas numéricas y anótalos en tu cuaderno.

a.



b.

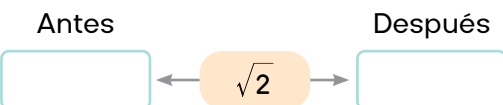


c.

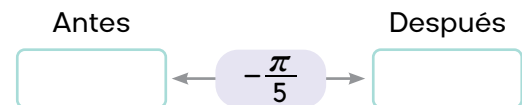


3. Anota un número irracional que está antes y otro después de cada número dado.

a.



b.



4. En la final de 100 m libres en natación, Adrián y Marco obtuvieron los mejores tiempos. Si el tiempo de Adrián fue de 1,283 minutos y el de Marco 1,293 minutos, ¿quién obtuvo la medalla de oro?

## 2.2 Ubicación de los números reales en la recta numérica

### Problema

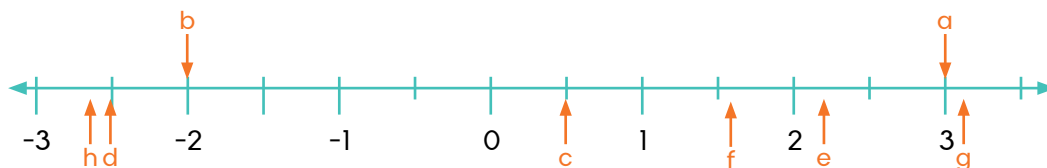
- Representa en una recta numérica los siguientes números.
 

a. 3	c. $\frac{1}{2}$	e. $\sqrt{5}$	g. $\pi$
b. -2	d. -2,5	f. $\phi$	h. -e
- Clasifica los números anteriores en racionales o irracionales.

### Solución

- Se utilizan los valores en decimales de los números anteriores, luego se aproximan y se ubican en la recta numérica.
 

a. 3	c. $\frac{1}{2} = 0,5$	e. $\sqrt{5} \approx 2,236\dots$	g. $\pi \approx 3,141\dots$
b. -2	d. -2,5	f. $\phi \approx 1,618\dots$	h. $-e \approx -2,718\dots$



- Se verifica la expansión decimal de los números para clasificarlos en racionales o irracionales.
 

a. 3 → racional	e. $\sqrt{5}$ → irracional
b. -2 → racional	f. $\phi$ → irracional
c. $\frac{1}{2}$ → racional	g. $\pi$ → irracional
d. -2,5 → racional	h. -e → irracional

### Conclusión

La recta numérica es una representación del conjunto de los números reales, porque a cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa.

Los números reales se pueden representar en la recta numérica siguiendo estos pasos:

- Si no están expresados de forma decimal, se utiliza la calculadora para expresarlos en esa notación.
- Se aproxima la cantidad a la décima o a la centésima.
- Se identifican los números enteros más cercanos a la cantidad.
- Se ubica el número en la recta numérica de forma aproximada.



### Datos interesantes

El número  $\phi$  o número áureo es una constante que aparece con frecuencia en la naturaleza: en el crecimiento de las hojas, en los esqueletos de mamíferos, en el arte y la música, porque representa la relación entre la belleza y la armonía.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$$



### Trabajo colaborativo

En grupo investiguen en cuáles obras de arte o musicales se percibe el número áureo.



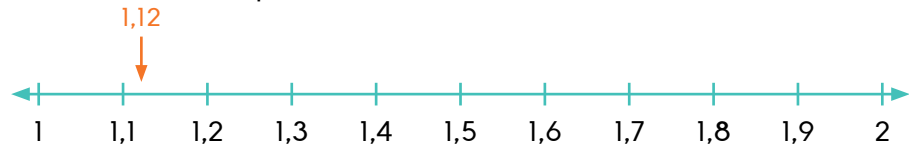
### Desarrollo sostenible

Se debe ser consciente al utilizar el agua, no solo por el ahorro económico que representa, sino porque protegemos el medio ambiente y nuestro futuro.

## Observa cómo se hace

Observa la forma en que se ubica el número real  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  en la recta numérica:

- Expresa de forma decimal:  $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,118\ 033\dots$
- Aproxima a la centésima.
  - Identifica la posición (**centésima**): 1,1**8** 033...
  - Observa la cifra a su derecha: **8**
  - Como **8** > 5, se suma 1 a **1**: **1** + 1 = **2**
  - Escribe la cantidad eliminando las cifras: 1,1**2**
- Establece los números enteros cercanos: 1,12 se ubica entre 1 y 2.
- Ubica de forma aproximada en la recta numérica.



## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Dibuja la recta numérica en el cuaderno y representa las siguientes cantidades.
 

a. -5,305 555...	c. 4,321 259...	e. 1,5	g. 6,999 999...
b. -3	d. 0,935 459...	f. -0,795 92...	h. -1,3

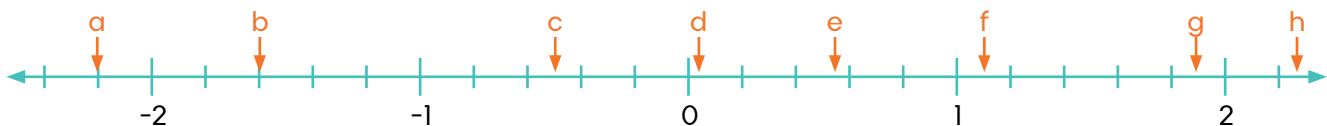


- Dibuja la recta numérica en el cuaderno y representa las siguientes cantidades.

- |                    |                   |                            |                           |
|--------------------|-------------------|----------------------------|---------------------------|
| a. $\frac{2}{5}$   | c. $\frac{7}{2}$  | e. $\frac{\pi}{2}$         | g. $\sqrt{\frac{19}{3}}$  |
| b. $-\frac{12}{5}$ | d. $-\frac{4}{7}$ | f. $-\frac{\sqrt{150}}{7}$ | h. $-\sqrt{\frac{2e}{3}}$ |



- Ana debe identificar los números reales representados en la recta numérica. Dibuja la recta numérica en el cuaderno y escribe en los recuadros el número real aproximado.



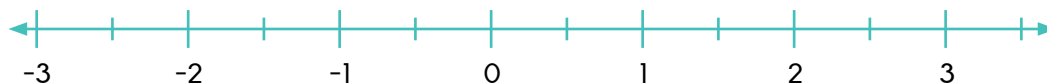
- |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a. <input type="text"/> | c. <input type="text"/> | e. <input type="text"/> | g. <input type="text"/> |
| b. <input type="text"/> | d. <input type="text"/> | f. <input type="text"/> | h. <input type="text"/> |

## 2.3 Comparación de números reales

### Problema

1. Representa en la recta numérica los siguientes números.

- a. -3                      c.  $\frac{3}{4}$                       e.  $-\sqrt{7}$                       g.  $\pi$   
 b. 0,75                      d. -1,666...                      f.  $\phi$                       h. e



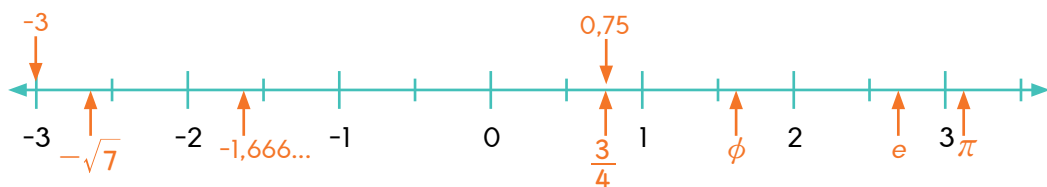
2. Escribe el símbolo  $>$ ,  $<$  o  $=$  según corresponda.

- a. -3  -1,666...                      d.  $-\sqrt{7}$    $\pi$   
 b.  $\phi$   e                      e. 0,75   $\frac{3}{4}$   
 c. e   $\frac{3}{4}$                       f. -1,666...   $-\sqrt{7}$

### Solución

1. Se utilizan los valores en decimales, se aproximan y ubican en la recta numérica.

- a. -3                      c.  $\frac{3}{4} = 0,75$                       e.  $-\sqrt{7} \approx -2,64...$                       g.  $\pi \approx 3,14...$   
 b. 0,75                      d. -1,666...                      f.  $\phi \approx 1,61...$                       h.  $e \approx 2,71...$



2. Se observa la ubicación de los números en la recta numérica y se escribe el símbolo correspondiente.

- a. -3  -1,666...                      d.  $-\sqrt{7}$    $\pi$   
 b.  $\phi$   e                      e. 0,75   $\frac{3}{4}$   
 c. e   $\frac{3}{4}$                       f. -1,666...   $-\sqrt{7}$

### Trabajo colaborativo

En grupo confeccionen 10 tarjetas en cartón reciclado y escriben diferentes números reales. Luego, se turnan para elegir 2 tarjetas y determinar si los números representados son iguales o cuál es mayor.



### Recuerda

Al comparar dos números ubicados en la recta numérica, siempre será mayor el que se encuentra a la derecha. Por ejemplo:  $a > b$ .



## Conclusión

Al comparar dos números reales  $a$  y  $b$ , se establecen estas relaciones de orden:

$$a > b$$

$$a < b$$

$$a = b$$

Por ejemplo:  $12 > e$

$$-4 < -3,5$$

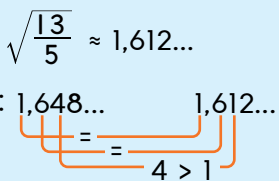
$$\frac{1}{2} = 0,5$$

Si la comparación se realiza en la recta numérica, siempre será mayor el que se ubica a la derecha. Si no se tiene la recta numérica, se establece la notación decimal de las cantidades y se comparan sus cifras de izquierda a derecha hasta obtener cifras distintas. Por ejemplo, al comparar  $\sqrt{e}$  y  $\sqrt{\frac{13}{5}}$ :

1. Se expresan de forma decimal:  $\sqrt{e} \approx 1,648\dots$  y  $\sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1,612\dots$

2. Se comparan sus cifras de izquierda a derecha:  $1,648\dots$  y  $1,612\dots$   
Como  $4 > 1$ , entonces  $1,648\dots > 1,612\dots$

$$\text{Por lo tanto } \sqrt{e} > \sqrt{\frac{13}{5}}$$



## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Identifica el símbolo ( $>$ ,  $<$  o  $=$ ) que une ambos números. Anota las respuestas en tu cuaderno.

a.  $-7$    $-2$

d.  $-168$    $-323$

b.  $-8,58$    $8,58$

e.  $3,258$    $2,458$

c.  $0,215\ 235\dots$    $0,215\ 238\dots$

f.  $7,777\dots$    $7,777$

2. Identifica el símbolo ( $>$ ,  $<$  o  $=$ ) que une correctamente ambos números.

a.  $\sqrt{\frac{1}{2}}$    $\frac{1}{2}$

d.  $-\sqrt{e}$    $-\sqrt{\pi}$

b.  $\frac{1}{4}$    $0,25$

e.  $\sqrt{\frac{3\pi}{4}}$    $\sqrt{25}$

c.  $-\frac{5}{6}$    $-\sqrt{\frac{3}{4}}$

f.  $\frac{7}{2}$    $\frac{14}{4}$

3. Identifica un número real que cumpla con la desigualdad. Anota las respuesta en tu cuaderno.

a.  $\sqrt{5\pi} <$    $< \sqrt{16}$

c.  $\frac{\sqrt{8}}{3} <$    $< \frac{8}{5}$

b.  $\sqrt{5} >$    $> 1,5$

d.  $-2,35 >$    $> -2,358$

4. Luis subirá un cerro en tres etapas. La primera etapa consta de  $\frac{1}{5}$  del trayecto, la segunda de  $\frac{1}{4}$  de lo que falta. ¿En cuál etapa hará el recorrido más largo?

## 2.4 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Identifica la opción correspondiente y anota las respuestas en tu cuaderno.

a. Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , con  $a = 2,75$  y  $b = 2,35$ . Se cumple con certeza que

$a < b$         $a > b$         $a \geq b$         $a = b$

b. Dados dos números reales  $m$  y  $n$ , tal que  $m > n$ . Entonces los posibles valores de  $m$  y  $n$  son

$m = -3$  y  $n = 5$         $m = 3$  y  $n = 5$         $m = -3$  y  $n = 0$         $m = -3$  y  $n = -5$

c. Al ubicar los números  $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$  y  $b = \frac{\sqrt{7}}{5}$  en la recta numérica se cumple con certeza que

$a$  se ubica a la derecha de  $b$ .        $a$  y  $b$  son el mismo punto.        $a$  se ubica a la izquierda de  $b$ .        $a$  se ubica en la misma posición de  $b$ .

d. Héctor representó los números  $m$ ,  $n$  y  $p$  en una recta numérica. Si  $p$  lo colocó a la derecha de  $m$  y  $n$  a la derecha de  $p$ , entonces, se cumple con certeza que

$m < n < p$         $p < m < n$         $n < p < m$         $m < p < n$

2. Determina los números naturales entre los que se ubica cada número indicado.

a. Antes      Después

$\leftarrow \sqrt{\pi} \rightarrow$

b. Antes      Después

$\leftarrow -\frac{3}{5} \rightarrow$

3. Representa en la recta numérica los números indicados.

a. -1,5      b. 3,25      c.  $-\sqrt{6}$       d.  $\sqrt{9}$       e.  $\frac{\sqrt{e}}{2}$       f.  $\frac{3}{2}$



4. ¿A cuáles conjuntos numéricos ( $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$  o  $\mathbb{R}$ ) pertenece cada uno de los siguientes números?

a. -1,5      b. 4,25      c.  $-\sqrt{6}$       d.  $\sqrt{9}$       e.  $\frac{\sqrt{e}}{2}$       f.  $-\frac{4}{2}$

5. Héctor representó los números  $p$ ,  $q$  y  $r$  en una recta numérica pero olvidó cuáles eran sus valores. Si sabe que los números representados son  $2\sqrt{7}$ ,  $4\sqrt{\frac{25}{16}}$  y  $\frac{1}{3}\sqrt{81}$ , además, en la recta numérica el número ubicado de primero a la izquierda es  $q$  y  $p$  se encuentra a la derecha de  $r$ .

¿Cuáles son los valores numéricos de  $p$ ,  $q$  y  $r$ ?

- Ubica los números en una recta numérica como guía.

## Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante el trimestre. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico cada conjunto numérico por su símbolo.			
2. Construyo el conjunto de los números reales a través de los distintos conjuntos numéricos.			
3. Ubico con seguridad números reales en la recta numérica.			
4. Reconozco la ubicación de números reales en la recta numérica.			
5. Utilizo los signos de relación de orden ( $>$ , $<$ o $=$ ) para comparar números reales.			
6. Resuelvo problemas que involucran la ubicación de números reales en la recta numérica.			
7. Resuelvo problemas que involucran la relación de orden de números reales.			

## Operaciones básicas con números reales

Los símbolos han sido parte de las matemáticas casi desde su inicio; sin embargo, han evolucionado a lo largo del tiempo. Ejemplo de ello es el símbolo para denotar la raíz cuadrada, pues en la antigua Babilonia se utilizaba el siguiente:  $\sqrt{\quad}$ .

No fue sino hasta los siglos XVI y XVII cuando surgieron algunos de los signos matemáticos utilizados en la actualidad.

### Los símbolos suma (+) y resta (-)

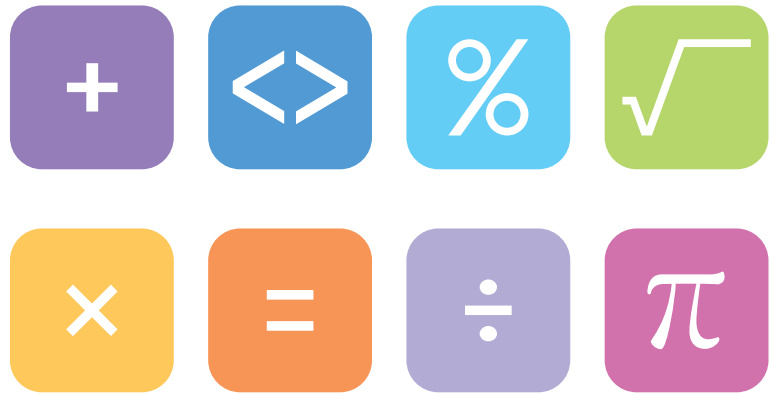
Muchos símbolos se emplearon para denotar esas operaciones a lo largo de la historia. Por ejemplo, en el papiro de Rhind (siglo XIX a. C.) se expresa la suma como un par de piernas caminando hacia adelante y, caminando hacia atrás, representan la operación resta.

En el siglo XV los matemáticos Nicolás Chuquet y Luca Pacioli emplearon **p** (plus) para sumas y **m** (minus) para restas.

Y a pesar de que desde el siglo XIV, Nicole d'Oresme usó el símbolo "+" como abreviación de "et" ("y" en latín), su uso se adoptó muchos años después.

### El símbolo igual (=)

Este símbolo se le atribuye al matemático inglés Robert Recorde, quien lo utilizó por primera vez en su libro, *La piedra de afilar de Witte* en 1557. Además, en este mismo libro utilizó el símbolo "+" para denotar la suma y "-" para la resta, lo que permitió su adopción en Inglaterra.



Los símbolos de operación, como el de suma (+), resta (-), multiplicación ( $\times$ ) o división ( $\div$ ), entre otros, no surgieron de la noche a la mañana sino que implicó un proceso de años y en algunos casos, siglos para que evolucionaran y se conocieran los utilizados actualmente.

### En esta unidad aprenderás a...

- Resolver ejercicios de adiciones y sustracciones con números reales y sus propiedades.
- Resolver situaciones de adición y sustracción con números reales aplicando los procedimientos.
- Resolver ejercicios de multiplicación y división con números reales y sus propiedades.
- Resolver situaciones con números reales que involucren multiplicación y división.

# Propiedades generales de la adición y la sustracción

## 1.1 Propiedades de la adición y la sustracción



### Recuerda

El nombre de los términos de la adición es:

$$\begin{array}{l} \text{Sumandos} \quad \text{Total} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ 25 + 10 = 35 \end{array}$$

El nombre de los términos de la sustracción es:

$$\begin{array}{l} \text{Minuendo} \quad \text{---} \quad \text{Sustraendo} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 18 - 12 = 6 \\ \text{Diferencia} \end{array}$$



### Trabajo colaborativo

Investiguen en parejas acerca de los siguientes temas:

- Cómo se leen los símbolos  $\in$ ,  $\forall$  y  $\exists$  y su significado. Luego, lean las expresiones de la sección **Conclusión** y explíquelas con sus propias palabras.
- Describan y ejemplifiquen algunos usos cotidianos de las propiedades de la adición.

### Problema

Sofía leyó en un libro de matemática que la suma tiene un elemento neutro y cualquier número sumado con este, da como resultado el mismo número.

- ¿Cuál es el elemento neutro de la suma? Compruébalo con dos ejemplos cambiando el orden del elemento neutro.
- ¿La resta tiene elemento neutro? Compruébalo.

### Solución

- El número que cumple con la definición para la suma es 0. Ejemplo:

$$5 + 0 = 5 \text{ y } 0 + 5 = 5$$

**R:** El elemento neutro de la adición es 0.

- La resta no tiene elemento neutro porque, aunque se cumple si 0 es el sustraendo, no sucede lo mismo al colocarlo como minuendo. Ejemplo:

$$7 - 0 = 7 \text{ y } 0 - 7 = -7$$

**R:** La resta no tiene elemento neutro.

### Conclusión

La **suma de números reales** tiene las siguientes propiedades.

**Propiedad interna:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a + b \in \mathbb{R}$  (el resultado de sumar dos números reales es otro número real). Por ejemplo:  $2, \pi \in \mathbb{R}$ , por ello  $2 + \pi \in \mathbb{R}$ .

**Propiedad asociativa:** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  entonces  $(a + b) + c = a + (b + c)$ , (el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado). Ejemplo:

$$-5, 1, \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \text{ entonces } (-5 + 1) + \frac{1}{2} = -5 + (1 + \frac{1}{2}).$$

**Propiedad conmutativa:** Si  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $a + b = b + a$  (el orden de los sumandos no afecta el resultado). Ejemplo:  $2 + 3 = 5$  y  $3 + 2 = 5$ .

**Propiedad del elemento neutro:**  $\forall a, a \in \mathbb{R}$ ,  $a + 0 = 0 + a = a$  (el cero es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da como resultado el mismo número). Ejemplo:  $10 + 0 = 0 + 10 = 10$ .

**Propiedad del elemento opuesto:**  $\forall a, a \in \mathbb{R}, \exists -a$ , tal que  $a + -a = 0$  (todo número real tiene un opuesto y si se suman el resultado es 0).

Ejemplo: el opuesto de 3 es -3 y  $3 + -3 = 0$ .



## Datos interesantes

El valor absoluto de un número  $m$  denotado  $|m|$  es el valor positivo de  $m$  sin importar su signo original.

Por ejemplo:

$$|3| = 3 \text{ y } |-5| = 5.$$

El valor absoluto está vinculado con las nociones de magnitud y distancia.

**La sustracción de números reales** se define como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo:  $a - b = a + (-b)$ . Ejemplo:

$$-3 - 5 = -3 + -5.$$

Al resolver una sustracción se puede emplear su definición y expresarla como una adición. Para resolverlas se siguen estas reglas:

1. Si tienen igual signo, se suman y mantienen el signo:  $-3 + -5 = -8$ .
2. Si son de signo contrario se resta del número mayor en valor absoluto, el menor y el resultado mantiene el signo del mayor:  $3 + -5 = -2$ .

La resta no cumple con las propiedades de la suma. Observa.

- No es asociativa:
 
$$(12 - 5) - 4 \neq 12 - (5 - 4)$$

$$7 - 4 \neq 12 - 1$$

$$3 \neq 11$$
- No tiene elemento neutro:
 
$$2 - 0 \neq 0 - 2$$

$$2 \neq -2$$
- No es conmutativa  $5 - 4 \neq 4 - 5$ 

$$1 \neq -1$$

### Propiedad fundamental de la sustracción

$\forall a, b, c, m \in \mathbb{R}$ , si  $a - b = c$  entonces  $(a \pm m) - (b \pm m) = c$  (al sumar o restar el mismo número, se obtiene la misma diferencia).

Ejemplo:  $15 - 5 = 10$  y  $(15 + 2) - (5 + 2) = 17 - 7 = 10$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Construye en el cuaderno un mapa conceptual que resuma las propiedades de la suma y la resta de números reales.
2. Proponga un ejemplo para cada propiedad de la adición indicada.
  - a. Interna
  - b. Asociativa
  - c. Conmutativa
  - d. Elemento neutro
  - e. Elemento opuesto
3. Anota en el cuaderno la propiedad o definición que se ejemplifica.
  - a.  $5 + 4 = 9$
  - b.  $4 + 6 = 6 + 4$
  - c.  $5 + 0 = 0 + 5 = 5$
  - d.  $-4 + 4 = 0$
  - e.  $16 - 10 = 26 - 20 = 6$
  - f.  $(\sqrt{7} + \sqrt{2}) + \sqrt{5} = \sqrt{7} + (\sqrt{2} + \sqrt{5})$
  - g.  $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})$
  - h.  $\pi + 2\pi = 3\pi$
4. Transforma cada sustracción en suma y resuélvelas en el cuaderno.
  - a.  $10 - 6 =$
  - b.  $9 - 6 =$
  - c.  $23 - 22 =$
  - d.  $-5 - 4 =$
  - e.  $-8 - 5 =$
  - f.  $-1 - 4 =$
  - g.  $\frac{-1}{7} - \frac{13}{7} =$
  - h.  $\frac{3}{4} - \frac{6}{4} =$
  - i.  $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} =$
5. Comprueba con un ejemplo por qué la sustracción NO cumple con la propiedad indicada.
  - a. Asociativa
  - b. Conmutativa
  - c. Elemento neutro
6. Lucía compró una blusa de B/10,50 y una enagua de B/25,30. Pedro adquirió un saco de B/25,30 y unas medias de B/10,50. ¿Cuál de los jóvenes gastó más? ¿Cuál propiedad puede emplearse?



## Recuerda

Al sumar o restar fracciones homogéneas, se suman los numeradores y se mantiene el denominador.

# Adición con números reales

## 2.1 Adición con números reales aplicando las propiedades

### Problema

Tres amigas compararon su entrenamiento. Para hacerlo, midieron las distancias recorridas en kilómetros durante una semana y las resumieron en la siguiente tabla:



**Trabajo colaborativo**

En tríos inventen un problema que se resuelva a través de una suma de números reales. Lo intercambian con otro grupo y resuelven ambos problemas en el cuaderno.

	Lunes	Miércoles	Viernes	Sábado
Ana	4	7	8	12
Maribel	2,5	6,85	8	10,75
Natalia	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{50}{6}$	$\frac{72}{6}$

Responde las siguientes preguntas sin utilizar la calculadora:

1. ¿Cuántos kilómetros corrió en total cada joven esa semana?
2. ¿Cuál de las jóvenes corrió la mayor cantidad de kilómetros?

### Solución

1. Para determinar el total recorrido por cada amiga se suman las distancias:

- Para calcular el recorrido de Ana, se resuelve una adición de números naturales:  $4 + 7 + 8 + 12 = 31$ .

- En el caso de Maribel se debe efectuar una suma de números decimales:  $2,5 + 6,85 + 8 + 10,75$ .

Al hacerlo se colocan las cifras en el lugar correcto y se suman los dígitos correspondientes de derecha a izquierda como se muestra a la derecha.

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ 6,85 \\ 8 \\ + 10,75 \\ \hline 28,10 \end{array}$$

- Para Natalia se efectúa una suma de fracciones:

$$\frac{5}{2} + \frac{17}{2} + \frac{50}{6} + \frac{72}{6}$$

Al hacerlo, se unen las homogéneas (de igual denominador):

$$\frac{5}{2} + \frac{17}{2} = \frac{5+17}{2} = \frac{22}{2} \qquad \frac{50}{6} + \frac{72}{6} = \frac{50+72}{6} = \frac{122}{6} = \frac{61}{3}$$

Como los resultados obtenidos son fracciones heterogéneas se deben homogeneizar, multiplicando por 3 el numerador y el denominador de la primera fracción, y por 2 la segunda y sumarlas:

$$\frac{22}{2} = \frac{66}{6} \text{ y } \frac{61}{3} = \frac{122}{6}, \text{ luego, } \frac{22}{2} + \frac{61}{3} = \frac{66}{6} + \frac{122}{6} = \frac{188}{6} \approx 31,3$$

**R:** Ana corrió 31 km, Maribel 28,1 km y Natalia 31,3 km.

2. Al comparar las distancias recorridas se obtiene que:  $28,1 < 31 < 31,3$ .

**R:** Natalia corrió la mayor distancia.



### Recuerda

Al convertir una fracción a número decimal se divide el numerador entre el denominador. Ejemplo, para convertir  $\frac{188}{6}$  a su notación decimal se divide  $188 \div 6$ .

## Conclusión

Al sumar números reales se deben considerar sus diferentes notaciones o conjuntos:

### Adición de números enteros

Si tienen igual signo, se suman y mantienen el signo. Ejemplo:  $2 + 3 = 5$ ;  $-7 + -2 = -9$

### Adición de números en notación decimal

Se ubican las cifras correctamente de manera que la coma en las cantidades se encuentren alineadas y se suman los dígitos correspondientes de derecha a izquierda. Ejemplo, al sumar  $4,753 + 0,75 = 5,503$ .

$$\begin{array}{r} 4,753 \\ + 0,75 \\ \hline 5,503 \end{array}$$

Si ambas cantidades son negativas, se realiza la suma de forma análoga pero el resultado es negativo. Ejemplo:  $-1,3 + -2,4 = -3,7$

### Adición de números en notación fraccionaria

Si las fracciones son **homogéneas**, se suman los numeradores y se mantiene el denominador.

Luego, se simplifica de ser posible. Ejemplo:  $\frac{-1}{4} + \frac{-3}{4} = \frac{-1 + (-3)}{4} = \frac{-4}{4} = \frac{-1}{1} = -1$ .

Si las fracciones son **heterogéneas**, primero se homogeneizan para obtener una suma de fracciones homogéneas. Ejemplo, al homogeneizar  $\frac{5}{3} + \frac{6}{4}$  se dan estos pasos:

1. Se calcula el m. c. m. de los denominadores. El m. c. m.  $(3, 4) = 12$ .
2. Se divide el valor obtenido entre cada denominador y se multiplica por el numerador:  $12 \div 3 \cdot 5 = 20$  y  $12 \div 4 \cdot 6 = 18$ .

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 3 \\ 1 \ 4 \ 4 \\ 1 \ 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 3 \\ 1 \ 4 \ 4 \\ 1 \ 1 \end{array}} \right\} 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{5}{3} + \frac{6}{4} = \frac{20}{12} + \frac{18}{12}$$

Luego, se resuelve la suma de fracciones homogéneas y se simplifica:

$$\frac{5}{3} + \frac{6}{4} = \frac{20}{12} + \frac{18}{12} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}$$

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve, sin usar la calculadora, las siguientes adiciones de números enteros.
 

a. $8 + 5 =$	c. $-25 + -15 =$	e. $-4 + -12 =$	g. $23 + 18 =$
b. $-4 + -3 =$	d. $16 + 7 =$	f. $-10 + -15 =$	h. $-16 + -35 =$
2. Efectúa manualmente las siguientes adiciones de números en notación decimal.
 

a. $0,85 + 4,5 =$	c. $-0,785 + -4,215 =$	e. $-2,35 + -1,52 =$	g. $4,235 + 6,753 =$
b. $2,23 + 6 =$	d. $-41,16 + -5,71 =$	f. $1,59 + 3,15 =$	h. $-21,25 + -25,35 =$
3. Resuelve, sin usar la calculadora, las siguientes adiciones de números en notación fraccionaria.
 

a. $\frac{1}{4} + \frac{7}{4} =$	c. $\frac{-8}{3} + \frac{-5}{3} =$	e. $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} =$	g. $\frac{-6}{7} + \frac{-5}{6} =$
b. $\frac{11}{2} + \frac{6}{2} =$	d. $\frac{-8}{5} + \frac{-7}{5} =$	f. $\frac{2}{5} + \frac{8}{3} =$	h. $-\frac{11}{2} + \frac{-3}{5} =$
4. Emma tiene 7 m de cinta roja; 8,75 m de cinta azul y  $\frac{20}{3}$  m de cinta amarilla. ¿Cuántos metros de cinta tiene en total? (**Pista:** representa todas las cantidades en su notación decimal).

## 2.2 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Copia las operaciones en el cuaderno e identifica la opción correcta.

a. El resultado de la operación  $-5 - 3$  corresponde a

-8

-2

2

8

b. El resultado de la operación  $2,51 + 7,49$  corresponde a

-10

-4,98

4,98

10

c. El resultado de la operación  $-3,65 - 8,068$  corresponde a

-11,718

-4,418

4,418

11,718

d. El resultado de la operación  $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$  corresponde a

 $-\frac{5}{2}$ 


-1

1

 $\frac{5}{2}$ 

e. El resultado de la operación  $-\frac{8}{5} + \frac{-6}{5}$  corresponde a

 $-\frac{14}{5}$ 

 $-\frac{2}{5}$ 

 $\frac{2}{5}$ 

 $\frac{14}{5}$ 

f. El resultado de la operación  $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$  corresponde a

 $-\frac{19}{12}$ 

 $-\frac{1}{12}$ 

 $\frac{1}{12}$ 

 $\frac{19}{12}$ 

g. El resultado de la operación  $-\frac{2}{5} + \frac{-10}{2}$  corresponde a

 $-\frac{27}{5}$ 

 $-\frac{23}{5}$ 

 $\frac{23}{5}$ 

 $\frac{27}{5}$ 

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Marcela caminó 1,8 km hasta la farmacia, luego, 1675 m hasta el supermercado. ¿Cuántos metros caminó en total?

- **Pista:** representa ambas cantidades en la misma unidad de medida.

b. Óscar pinta la cerca de la propiedad de sus padres. Si el lunes pintó  $\frac{3}{15}$  del total, el martes  $\frac{2}{15}$  y el miércoles  $\frac{5}{15}$ , ¿qué fracción del total ha pintado?

c. Angélica tiene varias cuentas por pagar. Debe al banco B/1250, en una tarjeta de crédito adeuda B/395,60 y de una venta por catálogo B/8,75. ¿Cuánto dinero debe en total?

d. Si  $\frac{4}{10}$  partes del total de estudiantes viaja en autobús,  $\frac{4}{7}$  a pie y el resto lo recogen sus padres en automóvil, ¿qué fracción del total viaja con sus padres?

# Sustracción con números reales

3.1

## Sustracción con números reales aplicando las propiedades

### Problema

En una campaña de limpieza de playas, tres jóvenes eligieron metas diferentes que consistían en recoger cierta cantidad de kilogramos de basura. Al medio día realizaron un corte y pesaron los residuos recolectados para indagar cuántos kilogramos les faltaban.

Responde las siguientes preguntas sin utilizar la calculadora:

1. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

	Meta	Recolectado	Faltante
<b>Manuel</b>	35 kg	26 kg	
<b>José</b>	37,5 kg	23,3 kg	
<b>Daniela</b>	$\frac{127}{4}$ kg	$\frac{98}{5}$ kg	

2. ¿A cuál joven le falta la menor cantidad para cumplir con la meta que se propuso?

### Solución

1. Para determinar el faltante se resta de la meta lo recolectado:

- Al calcular lo que le falta a Manuel, se resuelve una resta de números naturales  $35 - 26 = 9$  kg.

- En el caso de José se debe efectuar una resta de números decimales  $37,5 - 23,3$ .

$$\begin{array}{r} 37,5 \\ - 23,3 \\ \hline 14,2 \end{array}$$

Al hacerlo se colocan correctamente las cifras y se restan los dígitos correspondientes de derecha a izquierda como se muestra al lado que son 14,2 kg.

- Al calcular lo que le falta a Daniela se efectúa una resta de fracciones:  $\frac{127}{4} - \frac{98}{5}$ .

Como son fracciones heterogéneas se homogeneizan para restarlas:

$$\frac{127}{4} = \frac{635}{20} \text{ y } \frac{98}{5} = \frac{392}{20}$$

$$\text{Luego: } \frac{127}{4} - \frac{98}{5} = \frac{635}{20} - \frac{392}{20} = \frac{243}{20} = 12,15 \text{ kg.}$$

**R:** A Manuel le falta recolectar 9 kg de basura; a José, 14,9 kg y a Daniela, 12,15 kg.

2. Al comparar las cantidades faltantes se obtiene que:  $9 < 12,15 < 14,2$ .

**R:** A Manuel le falta la menor cantidad para cumplir con su meta.



### Trabajo colaborativo

Formen grupos de 3 o 4 estudiantes y recorran la institución o la comunidad recogiendo la basura que encuentren. Al finalizar, pesen la basura de cada equipo y calculen la diferencia entre el equipo que recogió la mayor cantidad y el que recogió la menor cantidad.



### Desarrollo sostenible

Un lema dice: "La naturaleza no sabe qué hacer con la basura; nosotros, sí".

Lo que en la naturaleza puede tardar hasta 500 años, como degradar una botella plástica, nosotros podemos evitarlo. ¿Cómo? Reduciendo y rechazando productos como ese.

Generemos una conciencia ambiental responsable, iniciando con el manejo adecuado de nuestros residuos.

## Conclusión

Al restar números reales se deben considerar sus diferentes notaciones o conjuntos.

### Sustracción de números enteros

Si los números son de signo contrario, se resta del mayor en valor absoluto el menor, el resultado mantiene el signo del mayor. Por ejemplo,  $7 - 12 = 7 + (-12) = -5$ .

### Sustracción de números en notación decimal

Se ubican las cifras correctamente de manera que la coma en las cantidades se encuentren alineadas y se restan los dígitos correspondientes de derecha a izquierda. Ejemplo, al restar  $6,485 - 2,35 = 4,135$ .

$$\begin{array}{r} 6,485 \\ -2,35 \\ \hline 4,135 \end{array}$$

Si las cantidades tienen signo contrario, se resta del mayor en valor absoluto el menor y mantiene el signo del mayor en valor absoluto. Ejemplo:  $-2,8 + 1,6 = -1,2$ .

### Sustracción de números en notación fraccionaria

Si las fracciones son **homogéneas**, se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

Luego, se simplifica de ser posible. Ejemplo:  $\frac{10}{4} - \frac{7}{4} = \frac{10-7}{4} = \frac{3}{4}$ .

Si las fracciones son **heterogéneas**, primero se homogeneizan para obtener una resta de fracciones homogéneas. Ejemplo, al homogeneizar  $\frac{-3}{2} - \left(\frac{-1}{7}\right)$  se dan estos pasos:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \ 7 \ | \ 2 \\ 1 \ 7 \ | \ 7 \\ 1 \ 1 \end{array} \right\} 2 \cdot 7 = 14$$

1. Se calcula el m. c. m. de los denominadores. El m. c. m. (2, 7) = 14.

2. Se divide el valor obtenido entre cada denominador y se multiplica por el numerador:  $14 \div 2 \cdot -3 = -21$  y  $14 \div 7 \cdot 1 = 2$ .

$$\frac{-3}{2} - \left(\frac{-1}{7}\right) = \frac{-21}{14} + \frac{2}{14}$$

Luego, se resuelve la resta de fracciones homogéneas y se simplifica:

$$\frac{-3}{2} - \left(\frac{-1}{7}\right) = \frac{-21}{14} + \frac{2}{14} = \frac{-21+2}{14} = \frac{-19}{14}$$

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve en el cuaderno y sin usar la calculadora las siguientes sustracciones de números enteros.

a.  $9 - 10 =$

c.  $34 - 17 =$

e.  $-8 + 13 =$

g.  $16 + -17 =$

b.  $12 - 8 =$

d.  $51 + -45 =$

f.  $-21 + 17 =$

h.  $-1 + 12 =$

2. Efectúa manualmente las siguientes sustracciones de números en notación decimal.

a.  $6,72 - 2,35 =$

c.  $9,785 + -3,01 =$

e.  $-4,65 + 6,92 =$

g.  $7,21 + -10 =$

b.  $12,2 - 6,05 =$

d.  $23,86 + -12,7 =$

f.  $-0,59 + 2,23 =$

h.  $-6,256 + 4 =$

3. Resuelve en el cuaderno sin usar la calculadora las siguientes restas de fracciones.

a.  $\frac{13}{4} - \frac{11}{4} =$

c.  $\frac{-5}{3} + \frac{7}{3} =$

e.  $\frac{10}{4} - \frac{1}{2} =$

g.  $\frac{6}{7} + \frac{-7}{6} =$

b.  $\frac{13}{2} - \frac{7}{2} =$

d.  $\frac{-6}{5} + \frac{10}{5} =$

f.  $\frac{8}{5} - \frac{7}{3} =$

h.  $\frac{10}{2} + \frac{-6}{5} =$

4. Una carrera de relevos se divide en tres etapas. La primera consta de 12 km y la segunda de 14,5 km. Si la carrera consta de  $\frac{97}{2}$  km, ¿de cuántos kilómetros consta la tercera etapa?

- **Pista:** represente todas las cantidades en su notación decimal.

## 3.2 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Copia las operaciones en el cuaderno y selecciona la opción que completa correctamente el enunciado.
- a. El resultado de la operación  $8 - 5$  corresponde a
- 12       -3       3       12
- b. El resultado de la operación  $4,36 - 9,73$  corresponde a
- 14,09       -5,37       5,37       14,09
- c. El resultado de la operación  $-9,075 + 7,58$  corresponde a
- 16,655       -1,495       1,495       16,655
- d. El resultado de la operación  $\frac{6}{4} - \frac{9}{4}$  corresponde a
- $\frac{-3}{4}$         $\frac{-15}{4}$         $\frac{15}{4}$         $\frac{3}{4}$
- e. El resultado de la operación  $\frac{-6}{5} + \frac{8}{5}$  corresponde a
- $\frac{-14}{5}$         $\frac{-2}{5}$         $\frac{2}{5}$         $\frac{14}{5}$
- f. El resultado de la operación  $\frac{51}{3} - \frac{32}{4}$  corresponde a
- 25       -9       9       25
- g. El resultado de la operación  $\frac{-7}{5} + \frac{15}{2}$  corresponde a
- $\frac{-89}{10}$         $\frac{-61}{10}$         $\frac{61}{10}$         $\frac{89}{10}$
2. Resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.
- a. Diego camina todos los días 4500 m. Si ha caminado 3,25 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para terminar?
- **Pista:** Representa ambas cantidades en la misma unidad de medida.
- b. Marta tiene un lote y decidió sembrar  $\frac{9}{20}$  partes del total con árboles. Si sembró  $\frac{4}{20}$  con árboles maderables y el resto con árboles frutales, ¿qué fracción sembró con árboles frutales?
- c. Ana abonó a una deuda B/3839,90. ¿Cuánto quedó debiendo si la cuenta original era de B/5725,36?
- d. Del total de su presupuesto, Kattia guarda  $\frac{8}{15}$  partes para la compra de las frutas y verduras. Si gastó en verduras  $\frac{4}{10}$  del presupuesto guardado, ¿qué fracción le queda para las frutas?

# Propiedades generales de la multiplicación y la división

## 4.1 Propiedades de la multiplicación y la división



### Recuerda

El nombre de los términos de la multiplicación es:

$$\begin{array}{l} \text{Factores} \quad \text{Producto} \\ -3 \cdot 10 = -30 \end{array}$$

El nombre de los términos de la división es:

$$\begin{array}{l} \text{Dividendo} \quad \text{Divisor} \\ 47 \div 5 = 9 \\ \text{Residuo } -2 \quad \text{Cociente} \end{array}$$



### Datos interesantes

El conjunto de los números reales es denso, es decir, entre dos números reales siempre hay otro número real.



### Trabajo colaborativo

En parejas comparen las propiedades de la adición con las de la multiplicación y realicen un resumen sobre sus semejanzas y diferencias.

### Problema

Andrea aprendió que el elemento neutro de la suma es el cero y quiere verificar si la multiplicación y la división tienen elemento neutro.

1. ¿Cuál es el elemento neutro de la multiplicación? Compruébalo con dos ejemplos intercambiando el orden del elemento neutro.
2. ¿La división tiene elemento neutro? Compruébalo.

### Solución

1. El número neutro de la multiplicación es aquel que al operarse con un número da como resultado el mismo número; el número 1 cumple con esa definición, ejemplo:  $7 \cdot 1 = 7$  y  $1 \cdot 7 = 7$ .

**R:** El elemento neutro de la multiplicación es 1.

2. La división no tiene elemento neutro porque, aunque se cumple si 1 es el divisor, no sucede lo mismo al colocarlo como dividendo. Ejemplo:

$$2 \div 1 = 2 \text{ y } 1 \div 2 = 0,5$$

**R:** La división no tiene elemento neutro.

### Conclusión

#### Propiedades de la multiplicación de números reales

**Propiedad interna:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$  (el resultado de multiplicar dos números reales es otro número real). Por ejemplo:

$2, \pi \in \mathbb{R}$ , por ello  $2 \cdot \pi \in \mathbb{R}$ .

**Propiedad asociativa:** Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$  entonces  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , (el modo de agrupar los factores no varía el resultado). Ejemplo:

$$-1, 3, \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \text{ entonces } (-1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \text{ y } -1 \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}.$$

**Propiedad conmutativa:** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $a \cdot b = b \cdot a$  (el orden de los factores no afecta el resultado). Ejemplo:  $12 \cdot -3 = -3 \cdot 12 = -36$ .

**Propiedad del elemento neutro:**  $\forall a, a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  (1 es el elemento neutro de la multiplicación). Ejemplo:  $4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$ .

**Propiedad del elemento inverso:**  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \frac{1}{a}$  tal que  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$  (todo número real tiene un inverso y si se multiplican el resultado es 1). Ejemplo: el inverso de  $-8$  es  $-\frac{1}{8}$ , además  $-8 \cdot -\frac{1}{8} = 1$ .

**Propiedad distributiva sobre la suma y la resta:** Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$  entonces  $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$  (el producto de un número por una suma o una resta es igual a la suma o resta de dicho número por cada término). Ejemplo:  $-7 \cdot (-4 + \pi) = -7 \cdot -4 + -7 \cdot \pi$ .

**Propiedad absorbente del cero:**  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  (toda multiplicación por cero da como resultado 0). Ejemplo:  $7 \cdot 0 = 0$ .

### Propiedades de la división de números reales

- La división no es asociativa:  $(16 \div 4) \div 2 \neq 16 \div (4 \div 2)$   
 $4 \div 2 \neq 16 \div 2$   
 $2 \neq 8$
- No tiene elemento neutro:  $4 \div 1 \neq 1 \div 4$   
 $4 \neq 0,25$
- No es conmutativa  $15 \div 5 \neq 5 \div 15$   
 $3 \neq \frac{1}{3}$
- Cero entre cualquier número es 0, pero, 0 no puede ser divisor de ningún número. Ejemplo:  $0 \div -9 = 0$ , pero  $5 \div 0$  no está definido en  $\mathbb{R}$ .
- **Algoritmo de la división:** Si  $a \div b = c$  es una división exacta, entonces  $a = b \cdot c$ . Ejemplo:  $15 \div 5 = 3$ , por lo tanto  $15 = 5 \cdot 3$ . Si  $a \div b = c$  es una división inexacta y su residuo es  $r$ , entonces  $a = b \cdot c + r$ . Ejemplo:  $19 \div 3 = 6$  y  $r = 1$ , por lo tanto  $19 = 3 \cdot 6 + 1$ .



### ¿Qué pasaría?

Si se multiplica o se divide tanto el dividendo como el divisor por un mismo número, el cociente no varía. Ejemplo:

$$12 \div 4 = 3$$

Multipliquemos por 2:

$$12 \cdot 2 = 24$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$24 \div 8 = 3$$

Dividamos entre 2:

$$12 \div 2 = 6$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$6 \div 2 = 3$$

Al proceso de multiplicar ambos términos se le conoce como **amplificación** y al de dividir, **simplificación**.

## Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Construye en el cuaderno un mapa conceptual con las propiedades de la multiplicación y la división.
2. Presenta un ejemplo para cada propiedad de la multiplicación indicada.
 

a. Interna	d. Elemento neutro	g. Distributividad en la resta
b. Asociativa	e. Elemento inverso	
c. Conmutativa	f. Distributividad en la suma	
3. Anota el nombre de la propiedad de la multiplicación que se ejemplifica.
 

a. $3 \cdot -5 = -15$	d. $-6 \cdot \frac{-1}{6} = 1$	g. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
b. $7 \cdot (6 \cdot \frac{3}{4}) = (7 \cdot 6) \cdot \frac{3}{4}$	e. $6 \cdot (7 + \pi) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot \pi$	h. $4 \cdot (\sqrt{3} - 7) = 4 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot 7$
c. $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$	f. $5\pi \cdot 0 = 0$	i. $0 \cdot e = 0$
4. Usa las propiedades de la división para resolver los siguientes ejercicios mentalmente.
 

a. $-6 \div 1 =$	b. $0 \div 5,27 =$	c. $-3,259 \div 1 =$	d. $\frac{3}{4} \div 0 =$	e. $\frac{8}{5} \div 1 =$
------------------	--------------------	----------------------	---------------------------	---------------------------
5. Comprueba con un ejemplo por qué la división NO cumple con la propiedad indicada.
 

a. Asociativa	b. Conmutativa	c. Elemento neutro
---------------	----------------	--------------------
6. Ana realizó 14 paquetes de 6 bolas de tenis y las sobrantes las colocó en una caja. Si originalmente eran 89 bolas, ¿cuántas colocó en la caja? (**Pista:** Usa las propiedades de la división.)

# Multiplicación con números reales

5.1

## Multiplicación con números reales aplicando las propiedades

### Problema



### Trabajo colaborativo

En grupos realicen una lista de situaciones donde deben emplear la multiplicación de números reales en sus diferentes notaciones y las resuelven.

Resuelve las siguientes situaciones:

1. Ester debe resolver la siguiente multiplicación  $-8 \cdot 5$ , pero no está segura del signo del resultado. Ayúdala a resolverla.
2. Luis fue a un almacén que vende todos los artículos a B/1,25. Si compró un cuaderno, una pelota, un par de medias y una caja de lápices de colores, ¿cuánto tuvo que pagar en total?
3. Ana debe preparar 18 vasos de jugo para una actividad. Si en cada vaso cabe  $\frac{1}{8}$  L, ¿cuántos litros de jugo preparará?

### Solución

1. Para calcular el resultado de  $-8 \cdot 5$ , se resuelve una multiplicación de números enteros donde se efectúa la multiplicación y el signo del resultado. Dado que son factores de diferente signo, el resultado es negativo. Por lo tanto:  $-8 \cdot 5 = -40$ .

**R:** El resultado de la multiplicación es -40.

2. En el almacén todos los artículos tienen el mismo precio: B/1,25 y compró 4 artículos (el cuaderno, la pelota, las medias y los lápices). Para calcular el total a pagar se debe efectuar la multiplicación  $1,25 \cdot 4$ . Al hacerlo se multiplica el segundo factor por cada cifra del primer factor (sin considerar la coma decimal), tal cual se observa a la derecha.
 

1 2 5	
× 4	
5 0 0	

 Luego, se coloca la coma según la cantidad de cifras decimales de los factores: 1,25 tiene 2 cifras decimales, por lo tanto, el resultado también:  $1,25 \cdot 4 = 5,00$ .

**R:** Pagó en total B/5.

3. Ana debe preparar 18 vasos de  $\frac{1}{8}$  L cada uno. Para calcular la cantidad de refresco en litros se efectúa una multiplicación:  $18 \cdot \frac{1}{8}$ .

Al hacerlo, se coloca 1 como denominador de 18 y se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, al finalizar se simplifica si es posible:

$$18 \cdot \frac{1}{8} = \frac{18}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{18 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

**R:** Ana preparó  $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$  L de refresco.



### Recuerda

Al multiplicar números de igual signo, el resultado es positivo.

Si son signos opuestos, el resultado es negativo.

En resumen:

- + · + = +
- · - = +
- + · - = -
- · + = -

## Conclusión

Al multiplicar números reales se deben considerar sus diferentes notaciones:

### Multiplicación de números enteros

Se multiplican los números y se analiza el signo del resultado según la ley de signos. Por ejemplo:

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$-3 \cdot -9 = -27$$

$$-8 \cdot 5 = -40.$$

### Multiplicación de números en notación decimal

Se multiplican las cantidades sin considerar la coma decimal. Al finalizar se suman las cifras decimales de los factores y esa cantidad debe coincidir con la cantidad de cifras decimales del resultado.

Por ejemplo, al multiplicar  $-6,723 \cdot 1,4$  se multiplica cada cifra del segundo factor por el primer factor, luego, se suman los resultados parciales y se determina el signo del resultado. Entre  $-6,723$  y  $1,4$  se tienen 4 cifras decimales, el resultado también las tendrá, es decir:  $-6,723 \cdot 1,4 = -9,4122$ .

$$\begin{array}{r} 6,723 \\ \times 1,4 \\ \hline 26892 \\ + 6723 \\ \hline 9,4122 \end{array}$$

### Multiplicación de números en notación fraccionaria

Las fracciones se multiplican en línea: numerador por numerador y denominador por denominador, se analiza el signo del resultado y se simplifica de ser posible. Ejemplo:

$$\frac{-5}{4} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{-5 \cdot (-2)}{4 \cdot 5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Si una de las fracciones es un número entero, se coloca 1 como denominador y se efectúa la multiplicación. Ejemplo:  $7 \cdot \frac{-5}{14} = \frac{7}{1} \cdot \frac{-5}{14} = \frac{7 \cdot (-5)}{1 \cdot 14} = \frac{-35}{14} = \frac{-5}{2}.$

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Resuelve las siguientes multiplicaciones en tu cuaderno, sin usar la calculadora.
 

a. $3 \cdot 7 =$	c. $-20 \cdot -12 =$	e. $-6 \cdot -10 =$	g. $280 \cdot 18 =$
b. $-2 \cdot -8 =$	d. $18 \cdot 7 =$	f. $-30 \cdot 0 =$	h. $-46 \cdot 27 =$
- Efectúa manualmente, en el cuaderno, las siguientes multiplicaciones.
 

a. $6,55 \cdot 2,5 =$	c. $-2,159 \cdot 5,21 =$	e. $-5,29 \cdot -7,36 =$	g. $6,05 \cdot 7,21 =$
b. $5,25 \cdot 7 =$	d. $52,98 \cdot -4,75 =$	f. $12,354 \cdot 8,5 =$	h. $-35,7 \cdot 24,1 =$
- Resuelve, sin usar la calculadora, las siguientes multiplicaciones con fracciones.
 

a. $\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5} =$	c. $3 \cdot \frac{-5}{6} =$	e. $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} =$	g. $\frac{-4}{5} \cdot \frac{-10}{7} =$
b. $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} =$	d. $-8 \cdot \frac{-2}{24} =$	f. $\frac{-6}{9} \cdot \frac{9}{6} =$	h. $\frac{-15}{6} \cdot \frac{9}{20} =$
- Adrián compró en la carnicería 2,5 kg de pollo a B/4,75 cada kilogramo y 1,5 kg de carne de res a B/6,99 cada kilogramo. ¿Cuánto dinero pagó por su compra?
- Daniela pintará  $\frac{3}{4}$  de la cerca de su propiedad de color blanco. Si ha pintado  $\frac{2}{9}$ , ¿cuánto le falta por pintar de ese color?

## 5.2 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Copia las operaciones en el cuaderno y selecciona la opción que completa correctamente el enunciado.
  - a. El resultado de la operación  $3 \cdot 7$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -21	<input type="checkbox"/> -20	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 21
------------------------------	------------------------------	-----------------------------	-----------------------------
  - b. El resultado de la operación  $2,68 \cdot 7,26$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -194 568	<input type="checkbox"/> -19,4568	<input type="checkbox"/> 19,4568	<input type="checkbox"/> 194 568
-----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------
  - c. El resultado de la operación  $-6,35 \cdot 5,2$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -33 020	<input type="checkbox"/> -33,02	<input type="checkbox"/> -330,20	<input type="checkbox"/> 33,02
----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	--------------------------------
  - d. El resultado de la operación  $\frac{3}{9} \cdot \frac{9}{6}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-1}{2}$	<input type="checkbox"/> $\frac{11}{6}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-7}{6}$	<input type="checkbox"/> 0,5
---	---	---	------------------------------
  - e. El resultado de la operación  $\frac{-8}{5} \cdot \frac{10}{3}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-16}{3}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-74}{15}$	<input type="checkbox"/> $\frac{26}{15}$	<input type="checkbox"/> $\frac{16}{3}$
--	---	--	---
  - f. El resultado de la operación  $\frac{-5}{3} \cdot \frac{-6}{10}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -2,26...	<input type="checkbox"/> -1,06...	<input type="checkbox"/> -1	<input type="checkbox"/> 1
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------	----------------------------
  - g. El resultado de la operación  $\frac{-10}{7} \cdot \frac{14}{20}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-51}{70}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-149}{70}$	<input type="checkbox"/> -1	<input type="checkbox"/> 1
---	--	-----------------------------	----------------------------
2. Sin emplear la calculadora, resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.
  - a. Determina la medida del perímetro de un cuadrado de lado 6,785 cm.
  - b. Para una fiesta, Daniela calcula que cada invitado tomará  $\frac{1}{2}$  L de refresco. Si asisten 24 personas, ¿cuántos litros de refresco debe preparar?
  - c. Mariana compró  $\frac{5}{2}$  kg de carne molida. Si utilizó  $\frac{1}{4}$  de la carne adquirida en un picadillo, ¿cuántos kilogramos de carne le quedarían?
  - d. En el supermercado Javier adquirió 3 artículos de B/7; 4 artículos de B/2,50 y  $\frac{1}{2}$  kg de carne de B/3,75 el kilogramo. ¿Cuánto dinero gastó en total?
  - e. Determina el perímetro y el área de un rectángulo cuyos lados miden  $\frac{3}{2}$  cm y 2,25 cm.

# División con números reales

6.1

**División con números reales aplicando las propiedades**

## Problema

Sin utilizar la calculadora, resuelve en el cuaderno las siguientes divisiones:

- $-198 \div -5$
- $12,65 \div -2,5$
- $\frac{15}{8} \div \frac{3}{2}$

## Solución

- Para calcular el resultado de  $-198 \div -5$ , se resuelve una división de números enteros donde se efectúa la división tal cual se muestra a la derecha. Luego se determina el signo del resultado a través de la ley de signos: dado que son factores de igual signo, el resultado es positivo. Por lo tanto,  $-198 \div -5 = 39,6$ .

$$\begin{array}{r}
 198 \div 5 = 39,6 \\
 \underline{-15} \\
 48 \\
 \underline{-45} \\
 30 \\
 \underline{-30} \\
 0
 \end{array}$$

- Para calcular el resultado de  $12,65 \div -2,5$  se multiplican por 100 ambos términos para eliminar los números decimales y obtener una división más fácil de efectuar:  
 $12,65 \cdot 100 = 1265$  y  $-2,5 \cdot 100 = -250$   
 Es decir:  $12,65 \div -2,5 = 1265 \div -250$ .  
 Luego, se realiza la división de números enteros como se muestra a la derecha.  
 Por lo tanto,  $12,65 \div -2,5 = 1265 \div -250 = -5,06$ .

$$\begin{array}{r}
 1265 \div -250 = -5,06 \\
 \underline{-1250} \\
 1500 \\
 \underline{-1500} \\
 0
 \end{array}$$

- Al efectuar la división  $\frac{15}{8} \div \frac{3}{2}$  se multiplica en cruz, al finalizar se simplifica si es posible:  
 $\frac{15}{8} \div \frac{3}{2} = \frac{15 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ .

## Conclusión

Al dividir números reales se deben considerar sus diferentes notaciones:

### División de números enteros

Se dividen los números y se analiza el signo del resultado. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l}
 -12 \div 6 = -2 \\
 -30 \div -2 = 15 \\
 80 \div 10 = 8.
 \end{array}$$

## Trabajo colaborativo

Resuelvan en parejas las divisiones propuestas en la sección **Problema**, de forma manual. Luego, intercámbienlas con otra pareja para comparar las respuestas obtenidas. En caso de dudas, empleen la calculadora para verificar los resultados y corregirlos.

## Recuerda

La ley de signos también se aplica en la división:

$$\begin{array}{l}
 + \div + = + \\
 - \div - = + \\
 + \div - = - \\
 - \div + = -
 \end{array}$$

### División de números en notación decimal

Al dividir números decimales, se elimina la expansión decimal. Para ello, se identifica el término con mayor cantidad de cifras decimales y si, por ejemplo, tuviera 3 cifras decimales, entonces se multiplican ambos términos por 1000; si tuviera 2 cifras decimales, por 100, y si tuviera una cifra decimal, por 10. Por ejemplo:

- $55,1 \div 2,755 = 55\ 100 \div 2755$   $\longrightarrow$  3 cifras decimales: se multiplican ambos términos por 1000.
- $249,4 \div 8,6 = 2494 \div 86$   $\longrightarrow$  1 cifra decimal: se multiplican ambos términos por 10.

Luego, se resuelve la división analizando el signo, según se indicó en el método anterior.

### División de números en notación fraccionaria

Al dividir fracciones se pueden emplear dos estrategias:

1. Se multiplica en cruz. Por ejemplo:  $\frac{9}{4} \div \frac{6}{10} = \frac{9 \cdot 10}{4 \cdot 6} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}$ .
2. Se transforma la división en una multiplicación invirtiendo el divisor. Ejemplo:  $\frac{15}{8} \div \frac{3}{2} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ .

Si alguna de las fracciones es un número entero, se coloca 1 como denominador y se efectúa la división con alguno de los métodos aprendidos. Ejemplo:  $-8 \div \frac{4}{3} = \frac{-8}{1} \div \frac{4}{3} = \frac{-8 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{-24}{4} = -6$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve en tu cuaderno, sin usar la calculadora, las siguientes divisiones de números enteros.
 

a. $16 \div 5 =$	c. $-24 \div -12 =$	e. $-685 \div -10 =$	g. $675 \div -50 =$
b. $-20 \div -8 =$	d. $257 \div 5 =$	f. $-8000 \div -400 =$	h. $-1089 \div 3 =$
2. Resuelve en tu cuaderno, sin usar la calculadora, las siguientes divisiones de números decimales.
 

a. $81,5 \div 10 =$	c. $-69,35 \div -5 =$	e. $-40 \div 2,5 =$	g. $42,5 \div -7,5 =$
b. $8,256 \div 3,6 =$	d. $-12,248 \div 4 =$	f. $-6,25 \div 5 =$	h. $16,25 \div -5,2 =$
3. Resuelve, sin usar la calculadora, las siguientes divisiones en notación fraccionaria.
 

a. $\frac{12}{5} \div \frac{6}{10} =$	c. $6 \div \frac{-6}{5} =$	e. $\frac{10}{4} \div \frac{2}{5} =$	g. $\frac{-2}{5} \div \frac{-20}{4} =$
b. $\frac{15}{24} \div \frac{25}{12} =$	d. $-63 \div \frac{-7}{2} =$	f. $\frac{-2}{3} \div \frac{2}{3} =$	h. $-\frac{5}{6} \div \frac{9}{2} =$
4. Determine la medida del lado de un cuadrado de área  $\frac{25}{4} \text{ m}^2$ .
5. ¿Cuánto mide el ancho de un rectángulo de largo 5,75 cm y perímetro 20 cm?
6. Andrea debe repartir  $\frac{162}{4}$  kg de porotos en paquetes de  $\frac{1}{2}$  kg. ¿Cuántos paquetes obtendrá?

## 6.2 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Copia las operaciones en el cuaderno y selecciona la opción que completa correctamente el enunciado.
  - a. El resultado de la operación  $12 \div -4$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -4	<input type="checkbox"/> -3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4
-----------------------------	-----------------------------	----------------------------	----------------------------
  - b. El resultado de la operación  $-81 \div -6,75$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -12	<input type="checkbox"/> -0,12	<input type="checkbox"/> 0,12	<input type="checkbox"/> 12
------------------------------	--------------------------------	-------------------------------	-----------------------------
  - c. El resultado de la operación  $-235,2 \div 3,2$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> -73	<input type="checkbox"/> -73,5	<input type="checkbox"/> 73	<input type="checkbox"/> 73,5
------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	-------------------------------
  - d. El resultado de la operación  $\frac{30}{5} \div \frac{9}{10}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-20}{3}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-27}{5}$	<input type="checkbox"/> $\frac{27}{5}$	<input type="checkbox"/> $\frac{20}{3}$
--	--	---	---
  - e. El resultado de la operación  $\frac{-12}{7} \div \frac{10}{14}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-12}{5}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-60}{49}$	<input type="checkbox"/> $\frac{60}{49}$	<input type="checkbox"/> $\frac{12}{5}$
--	---	--	---
  - f. El resultado de la operación  $\frac{-50}{30} \div \frac{-60}{80}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-5}{4}$	<input type="checkbox"/> $\frac{-20}{9}$	<input type="checkbox"/> $\frac{20}{9}$	<input type="checkbox"/> $\frac{5}{4}$
---	--	---	--
  - g. El resultado de la operación  $\frac{-12}{8} \div \frac{-3}{2}$  corresponde a
 

<input type="checkbox"/> $\frac{-9}{4}$	<input type="checkbox"/> -1	<input type="checkbox"/> $\frac{9}{4}$	<input type="checkbox"/> 1
---	-----------------------------	--	----------------------------
2. Sin emplear la calculadora, resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.
  - a. Determine el área de un cuadrado si su perímetro mide 29 cm.
  - b. ¿Cuánto mide el lado de un pentágono regular si su perímetro mide 12,25 m?
  - c. Fiorella tiene 5 refrescos de 3 litros para una actividad. Si los depositará en vasos de 0,6 L, ¿cuántos vasos necesita?
  - d. Diego compró en una tienda 5 camisas de igual precio. Si pagó en total B/41,75, ¿cuál es el precio de cada camisa?
  - e. Lucía tiene un terreno de 325,5 m<sup>2</sup> dividido en 7 partes iguales. Si utilizó  $\frac{2}{7}$  para construir una casa de una planta y en el terreno restante sembró diferentes árboles frutales, ¿cuánto mide su casa? ¿Cuánto mide el terreno que arborizó?

## Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Resuelvo ejercicios de adiciones con números reales y sus propiedades.			
2. Soluciono situaciones de adición con números reales aplicando los procedimientos.			
3. Resuelvo ejercicios de sustracciones con números reales y sus propiedades.			
4. Soluciono situaciones de sustracción con números reales aplicando los procedimientos.			
5. Resuelvo ejercicios de multiplicaciones con números reales y sus propiedades.			
6. Soluciono situaciones con números reales que involucren multiplicación.			
7. Resuelvo ejercicios de divisiones con números reales y sus propiedades.			
8. Soluciono situaciones con números reales que involucren la división de números reales.			

# Unidad 4

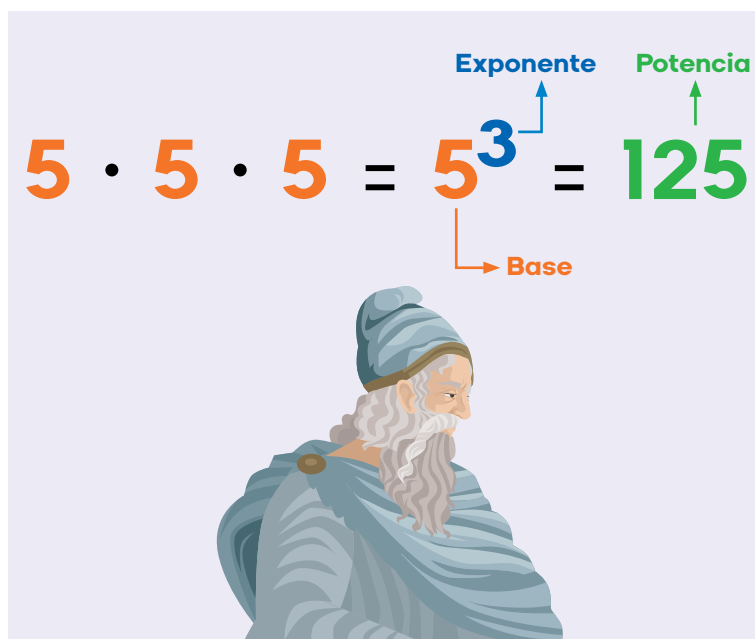
## Potenciación y radicación con números reales

La potenciación ha sido conocida desde la Antigüedad, dado que los babilonios la utilizaban como auxiliar de la multiplicación. Los griegos también la usaban, prefiriendo de ella los cuadrados y los cubos.

La idea de potenciación evolucionó gracias a la utilización de la notación científica, que utiliza potencias de base 10 y sirve para representar valores muy grandes o muy pequeños.

La utilización de la notación científica data del siglo III a. C. y fue descrita en la obra "El contador de arena". En este texto el matemático y filósofo griego Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a. C.), procura estimar la cantidad de granos de arena que se necesitan para llenar la Tierra. Por esa razón, Arquímedes es considerado el precursor de la potenciación, dado que se dio a la tarea de representar números excesivamente grandes, o excesivamente pequeños.

La radicación dio sus primeros indicios en la secta Pitagórica; pues al no poder calcular la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (su valor es  $\sqrt{2}$ ), provocó gran controversia y esta situación permitió años más tarde la creación de los números reales. Por su parte, la raíz cúbica nació de la necesidad de calcular la medida del lado de un



*Toda multiplicación de factores iguales se puede representar como una potencia. Para abreviarla, se escribe el factor que se repite y, en la parte superior derecha, se coloca la cantidad de veces que se repite el factor.*

cubo conociendo su volumen.

¿De dónde surgió su símbolo  $\sqrt{\quad}$ ? El símbolo tal cual lo conocemos, fue introducido en 1525 por el matemático alemán Christoph Rudolff, quien empleó una forma estilizada de la letra **r** de la palabra radical o raíz.

### En esta unidad aprenderás a...

- Aplicar las propiedades de la potenciación en la solución de ejercicios con números reales.
- Encontrar con precisión la raíz de un número real.
- Aplicar las propiedades de las raíces.
- Explicar el procedimiento para resolver operaciones combinadas con números reales.
- Resolver operaciones combinadas con números reales.

## Potenciación

## 1.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Identifica la opción correspondiente y anota las respuestas en tu cuaderno.

a. La representación equivalente de  $(4)^3$  corresponde a

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$    
   $3 + 3 + 3 + 3$    
   $4 \cdot 4 \cdot 4$    
   $4 + 4 + 4$

b. ¿Cuál es el valor de la potencia  $(-8)^2$ ?

-64   
  -16   
  16   
  64

c. ¿Cuál potenciación da como resultado 32?

$(-2)^5$    
   $2^5$    
   $5^2$    
   $16^2$

d. ¿Cuál es el resultado de la expresión  $-(-1)^9$ ?

-9   
  -1   
  1   
  9

e. El resultado de  $-(3^2)^3$  corresponde a

-729   
  -243   
  243   
  729

f. ¿Cuál expresión es equivalente a  $2^3 + 2^3$ ?

$2^2$    
   $2^6$    
   $4^2$    
   $4^6$

g. ¿Cuál expresión es equivalente a  $4^3 \div 4^2$ ?

$2^2$    
   $2^4$    
   $4^4$    
   $4^5$



**¡Atención!**

En los ejercicios **f** y **g** resuelve las potencias con las otras operaciones indicadas y determina cuáles resultados dan lo mismo que el de las potencias mostradas.

2. Representa cada situación a través de una potenciación y resuélvelas en el cuaderno sin utilizar la calculadora.

a. Determina el área de un cuadrado de lado 12 cm.

b. Susana tiene 5 cajas. En cada caja hay 5 bolsas con 5 balones cada una. ¿Cuántos balones hay en total?

c. ¿Cuántos libros hay en un bazar si tienen 4 muebles; cada mueble tiene 4 estantes, cada estante está dividido en 4 partes y en cada parte hay 4 libros?

d. En un laboratorio se determinó que un tipo de bacteria se duplica cada hora. Si originalmente se inicia con 2 bacterias, ¿Cuántas bacterias habrá al transcurrir 6 horas? ¿Y al transcurrir 12 horas?

## 1.2 Propiedades de la potenciación

### Problema

Mauricio leyó que para calcular el volumen de un cubo se utiliza la fórmula  $V = \ell^3$ , donde  $\ell$  corresponde a la medida del lado del cubo. Si calcula el volumen de un cubo de lado  $\frac{2}{3}$  m, ¿cuál resultado obtendrá?

### Solución

Se sustituye  $\frac{2}{3}$  m por  $\ell$  en la fórmula y se resuelve:

$$V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27} \text{ m}^3.$$

**R:** Obtendrá  $\frac{8}{27}$  m<sup>3</sup>.



### Datos interesantes

Se puede demostrar que  $3^0 = 1$  porque de la división de potencias de igual base se sabe que

$$\frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5} = 3^0.$$

También es verdad que

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{243}{243} = 1$$

Por lo tanto,  $\frac{3^5}{3^5} = 3^0 = 1$ .

### Conclusión

Toda potencia de base racional y exponente natural se puede representar de la forma  $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ , con  $\frac{a}{b}$  base y  $n$  exponente. Además:  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ .

#### Propiedades de la potenciación de números reales

- Potencia de exponente cero:** Da como resultado 1, es decir,  $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ . Por ejemplo:  $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$ .
- Multiplicación de potencias de igual base:** Se conserva la base y se suman los exponentes,  $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$ . Ejemplo,  $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$ .
- División de potencias de igual base:** Se conserva la base y se restan los exponentes,  $\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ . Por ejemplo,  $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \div \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{6-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ .
- Potencia de una potencia:** Se conserva la base y se multiplican los exponentes,  $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$ . Ejemplo,  $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{3 \cdot 4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{12}$ .
- Potencia con exponente negativo:** Para transformar el exponente a positivo se da vuelta a la fracción, es decir,  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ . Ejemplo,  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$ .
- Potencia de un producto (o de un cociente):** Se eleva cada base al exponente en común, es decir,  $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{c^n}{d^n}$  o  $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \div \frac{c^n}{d^n}$ . Por ejemplo,  $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} \cdot \frac{4^3}{7^3}$  y  $\left(\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{5^4} \div \frac{2^4}{3^4}$ .



1. Representa cada expresión como una potencia. Escribe en el cuaderno los resultados.

a.  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$       c.  $3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 =$       e.  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} =$       g.  $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} =$   
 b.  $-6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 =$       d.  $\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi =$       f.  $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} =$       h.  $3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} =$

2. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

Potenciación	$7^5$	$1^8$	$\left(\frac{11}{5}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$
Base					
Exponente					
Potencia					

3. Resuelve en el cuaderno cada potenciación. Usa las propiedades.

a.  $\left(\frac{2}{7}\right)^0 =$       c.  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 =$       e.  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$       g.  $\left(\frac{2}{5}\right)^1 =$   
 b.  $\left(\frac{5}{3}\right)^1 =$       d.  $\left(\frac{12}{7}\right)^0 =$       f.  $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}\right)^0 =$       h.  $2^3 =$

4. Escribe en el cuaderno cada expresión como una sola potencia. Usa las propiedades de la potenciación.

a.  $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 =$       d.  $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \div \left(\frac{10}{3}\right)^2 =$       g.  $\left(\frac{2}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$   
 b.  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 =$       e.  $\left(\frac{1}{7}\right)^6 \div \left(\frac{1}{7}\right)^2 =$       h.  $\left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^7 \div \left(\frac{6}{5}\right)^6 =$   
 c.  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$       f.  $\left(\frac{6}{5}\right)^7 \div \left(\frac{6}{5}\right) =$       i.  $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \div \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 =$

5. Transforma cada expresión a una potencia de exponente positivo. Escribe en el cuaderno las respuestas.

a.  $\left(\frac{12}{7}\right)^{-2} =$       b.  $10^{-3} =$       c.  $\left(\frac{6}{5}\right)^{-8} =$       d.  $4^{-7} =$

6. Resuelve en el cuaderno cada potenciación. Utiliza las propiedades.

a.  $\left(\frac{8}{7} \cdot \frac{5}{4}\right)^2 =$       b.  $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)^3 =$       c.  $\left(\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}\right)^2 =$       d.  $\left(\frac{2}{7} \div \frac{2}{3}\right)^2 =$

7. Soluciona en el cuaderno cada potenciación. Utiliza las propiedades.

a.  $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}\right)^0 =$       d.  $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^2 =$       g.  $\left(\frac{12}{5} \div \frac{4}{3}\right)^2 =$       j.  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} =$   
 b.  $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} =$       e.  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2} =$       h.  $2^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$       k.  $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^4 \div (5)^{-5} =$   
 c.  $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \div \left(\frac{10}{3}\right)^2 =$       f.  $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)^5 =$       i.  $\left(\left(\frac{5}{7}\right)^8\right)^{-1} \div \left(\frac{7^6}{5^6}\right) =$

### 1.3 Problemas usando las propiedades de la potenciación

#### Problema

Andrea tiene una báscula mal configurada y al pesar el pollo que tenía obtuvo  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$  kg. Si usó  $\left(\frac{2}{4}\right)^{-3}$  kg en un arroz y la mitad de lo que gastó en el arroz, en un picadillo, ¿cuánto pollo le quedó?

#### Solución

Para resolver el problema se utilizan las propiedades de la potenciación:

- Cantidad de pollo que tenía Andrea  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$  kg.
- En el arroz utilizó  $\left(\frac{2}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 8$  kg
- En el picadillo usó  $\frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$

**R:** Le quedaron  $16 - (8 + 4) = 16 - 12 = 4$  kg.

#### Conclusión

Se pueden emplear las propiedades de la potenciación para obtener valores más simples y fáciles de comprender al resolver problemas.

#### Práctica

- Resuelve en el cuaderno las siguientes situaciones. Utiliza las propiedades de la potenciación.
  - Jaime tiene  $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$  canicas. Si su hermana tiene el doble y su primo la mitad, ¿cuántas canicas tienen entre los tres?
  - Ángel dobló una sábana a la mitad; luego, la volvió a doblar a la mitad dos veces más. Al llegar su madre, notó que la sábana no cabía en el ropero, por lo que la dobló a la mitad una vez más. ¿Qué fracción de la sábana representa cada parte de la sábana doblada?
  - María resolvió una operación, pero olvidó cuál era el valor de un exponente. Si la operación es  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^?$  y obtuvo como resultado  $\frac{32}{243}$ , ¿cuál es el valor del segundo exponente?
  - Tengo  $\left(\left(\frac{10}{5}\right)^2\right)^3$  kg de porotos que empacaré en bolsas con  $2^{-1}$  kg, ¿cuántos paquetes obtendré?



#### Recuerda

Todo número entero puede representarse como una fracción, ejemplo:  $4 = \frac{4}{1}$ . Esto puede emplearse al utilizar las propiedades de la potenciación. Ejemplo:

$$(4)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$


#### Desarrollo sostenible

La riqueza de una sociedad multiétnica se basa en la valoración positiva de las diferencias que se manifiestan en los individuos.

Trabaja en  
tu cuaderno



## Radicación

## 2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Identifica la opción correspondiente y anota las respuestas en tu cuaderno.

a. En  $\sqrt[5]{32}$  el índice, el subradical y la raíz corresponden respectivamente a

- 2, 5 y 32     2, 32 y 5     5, 32 y 2     5, 2 y 32

b. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de área  $25 \text{ m}^2$ ?

- 2     3     5     32

c. ¿Cuánto mide el lado de un cubo de volumen  $216 \text{ m}^3$ ?

- 3     5     6     16,69

d. ¿Cuál es la expresión radical equivalente a  $2^4 = 16$ ?

- $4\sqrt{16} = 2$       $2\sqrt{16} = 4$       $4\sqrt{2} = 16$       $2\sqrt{4} = 16$

e. ¿Cuál es la expresión de potencia equivalente a  $\sqrt{25} = 5$ ?

- $(-2)^5 = 32$       $4^2 = 16$       $2^5 = 32$       $5^2 = 25$

f. ¿Cuál es la raíz de  $\sqrt{100}$ ?

- 2     3     5     10

g. ¿Cuál es la raíz de  $\sqrt[3]{64}$ ?

- 2     3     4     5

2. Representa cada situación a través de una potenciación y resuélvela en el cuaderno sin utilizar la calculadora.

a. Marcela tiene  $\sqrt{121}$  m de cinta roja y  $\sqrt[3]{343}$  m de cinta verde. ¿Cuántos metros de cinta tiene en total?b. Daniela debe expresar la potencia  $7^2$  en notación radical. Si presentó como resultado  $\sqrt[3]{49}$  y le indicaron que su resultado es incorrecto, ¿cuál es el correcto?, ¿en qué se equivocó?

c. ¿Cuál es el valor del subradical que en una raíz cúbica da como resultado 9?



## Recuerda

Al calcular la raíz de un número, como  $\sqrt[3]{8}$ , se factoriza el subradical y se extrae de la raíz de ser posible:

$$\left. \begin{array}{l} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \left. \right\} 2^3$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$



## ¡Atención!

Al transformar de notación radical a notación de potencia y viceversa, se aplica:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

## 2.2 Propiedades de la radicación

### Problema

Óscar leyó que los radicales, al igual que las potencias, tienen propiedades. Comprueba, mediante un ejemplo, las siguientes propiedades:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} / \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} / \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

### Solución

Para comprobar las propiedades, se prueba cada lado de la igualdad de forma individual. Por ejemplo:

- Como  $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$  y  $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2 \cdot 3 = 6$ , entonces,  $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$  y se cumple la propiedad.

- Como  $\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$  y  $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{4}{2} = 2$ , entonces  $\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$  y se cumple la propiedad.

### Conclusión

La **radicación** es la operación inversa de la **potenciación**, por ello, toda potencia puede expresarse como un radical y viceversa, es decir,  $b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $n > 1$ .

#### Propiedades de la radicación

$\forall a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$  se cumplen las siguientes propiedades:

- Raíz de un número:**  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ . Por ejemplo:  $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$ .
- Potencia de un radical:**  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ . Ejemplo:  $(\sqrt[5]{2})^{15} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$ .
- Multiplicación de radicales de igual índice:**  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ . Por ejemplo,  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ .
- División de radicales de igual índice:**  $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ,  $b \neq 0$ .  
Ejemplo:  $\sqrt[3]{8} \div \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}$ .
- Raíz de una raíz:**  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ . Ejemplo:  $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ .



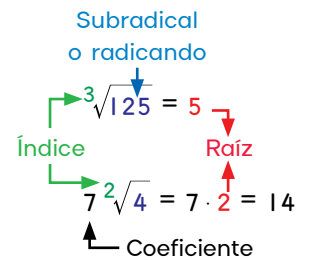
### Datos interesantes

El lenguaje matemático está conformado por muchos símbolos entre ellos  $\forall$  (para todo),  $\in$  (pertenece),  $/$  (tal que).



### Recuerda

Los términos de un radical son:



### ¿Qué pasaría?

El signo de la raíz depende del valor del índice y del signo del subradical.

- Índice impar, radicando positivo: raíz positiva.
- Índice impar, radicando negativo: raíz negativa.
- Índice par y radicando positivo: le corresponden dos raíces, una positiva y otra negativa.
- Índice par y radicando negativo: no tienen solución en  $\mathbb{R}$ .



1. Representa cada potencia en su notación radical. Escribe en el cuaderno los resultados.

a.  $2^5 = 32$

c.  $3^4 = 81$

e.  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

b.  $(-6)^3 = -216$

d.  $(-2)^3 = -8$

f.  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

2. Representa cada radical en su notación de potencia. Escribe en el cuaderno los resultados.

a.  $\sqrt{16} = 4$

c.  $\sqrt[4]{2401} = 7$

e.  $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

b.  $\sqrt[3]{-125} = -5$

d.  $\sqrt[5]{-243} = -3$

f.  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

3. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

Radicación	$\sqrt{81}$	$\sqrt[3]{-27}$	$\sqrt[4]{625}$	$\sqrt[5]{243}$	$\sqrt[6]{64}$
Índice					
Radicando					
Raíz					

4. Obtén la raíz de cada expresión. Aplica la propiedad  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

a.  $\sqrt{9} =$

c.  $\sqrt[3]{343} =$

e.  $\sqrt[5]{-32} =$

g.  $\sqrt[7]{-128} =$

b.  $\sqrt[3]{-125} =$

d.  $\sqrt{49} =$

f.  $\sqrt[4]{81} =$

h.  $\sqrt[4]{10\,000} =$

5. Soluciona en el cuaderno cada radicación. Aplica las propiedades.

a.  $(\sqrt{11})^4 =$

d.  $\sqrt[7]{32} \cdot \sqrt[7]{4} =$

g.  $\sqrt{16} \div \sqrt{4} =$

j.  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} =$

b.  $(\sqrt[3]{8})^6 =$

e.  $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9} =$

h.  $\sqrt[5]{-64} \div \sqrt[5]{2} =$

k.  $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

c.  $(\sqrt[6]{25})^3 =$

f.  $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{3} =$

i.  $\sqrt[6]{5^{13}} \div \sqrt[6]{5^7} =$

l.  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{4^9}} =$

6. Soluciona en el cuaderno las siguientes situaciones.

a. Luis quiere cercar un lote cuadrado. Si el área del lote es  $144 \text{ m}^2$  y colocará 6 líneas de alambre, ¿cuántos metros debe comprar?

b. Si el volumen de un cubo es de  $729 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es el área de una de sus caras?

- Pista:  $V = \ell^3$ .

## 2.3 Simplificación y racionalización de raíces cuadradas



### Desarrollo sostenible

La persona más importante en tu vida, eres tú mismo.

Ámate, cuidate, protégete e invierte en ti. Para hacerlo, estudia y esfuérate porque un gran futuro te espera, solo debes creer en ti y luchar hasta conseguirlo.

### Problema

- Simplifica los siguientes radicales.
  - $\sqrt{12}$
  - $\sqrt{\frac{5}{9}}$
- Determina una fracción equivalente a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  que no tenga raíz en el denominador.

### Solución

- Para resolver la actividad se utilizan las propiedades de la radicación:
  - Se expresa 12 en su descomposición prima  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3}$ . Luego, se emplea la propiedad de la multiplicación de radicales y se obtiene la raíz  $\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ . Por lo tanto:  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .
  - Se emplea la propiedad de la división de radicales  $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$  y se obtiene la raíz  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Es decir:  $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .
- Se puede emplear una fracción unitaria y la propiedad elemento neutro de la multiplicación para obtener una fracción equivalente:
 
$$1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ entonces } \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donde } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ son equivalentes: } \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071\dots \text{ y } \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071\dots$$

### Conclusión

#### Simplificación

Un radical está simplificado al máximo si los exponentes del subradical factorizado son menores que el índice; el índice y los exponentes del subradical no tienen divisores en común y el subradical es positivo.

Al simplificar una expresión como  $7\sqrt[4]{729}$  se realizan estos pasos:

$$\begin{aligned}
 7\sqrt[4]{729} &= 7\sqrt[4]{3^6} && \longrightarrow \text{Se factoriza el subradical.} \\
 &= 7\sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2} && \longrightarrow \text{Se expresa el subradical con una potencia de exponente igual al índice.} \\
 &= 7\sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^2} && \longrightarrow \text{Se usa la propiedad de la multiplicación de radicales y se extrae la raíz del primer radical.} \\
 &= 7 \cdot 3\sqrt[4]{3^2} \\
 &= 21\sqrt[2]{3^1} = 21\sqrt{3} && \longrightarrow \text{Se divide el índice y el exponente del subradical entre el mismo número tantas veces como sea posible.}
 \end{aligned}$$



#### Recuerda

Al extraer el subradical, el resultado multiplica al coeficiente. Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 7\sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^2} &= \\
 7 \cdot 3\sqrt[4]{3^2} &
 \end{aligned}$$

## ¿Qué pasaría?

Al racionalizar una expresión con radical en el denominador, se resuelve siguiendo el procedimiento aprendido. Ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \frac{9\sqrt{2 \cdot 3}}{3} \\ &= \frac{9\sqrt{6}}{3} \\ &= 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

## Racionalización

Para eliminar el radical de un denominador se utiliza el proceso denominado **racionalización**. Al racionalizar una fracción como  $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ,  $b > 0$  se realizan estos pasos:

1. Se multiplica la fracción por  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ .
2. Se resuelve la multiplicación y se simplifica:  $\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ .

Por ejemplo, al racionalizar  $\frac{3}{\sqrt{6}}$  se realizan estos pasos:

$$\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Simplifica las siguientes expresiones al máximo. Escribe los resultados en el cuaderno.

a.  $\sqrt{64} =$

c.  $\sqrt{27} =$

e.  $-\sqrt{\frac{6}{25}} =$

g.  $-3\sqrt{396} =$

b.  $\sqrt{18} =$

d.  $-\sqrt{200} =$

f.  $\sqrt{\frac{5}{81}} =$

h.  $-4\sqrt{450} =$

2. Efectúa las multiplicaciones con radicales en el cuaderno. Simplifica al máximo el resultado.

a.  $\sqrt{20} \cdot \sqrt{12} =$

c.  $\sqrt{75} \cdot \sqrt{50} =$

e.  $\sqrt{10} \cdot \sqrt{14} =$

g.  $\sqrt{12} \cdot (-\sqrt{15}) =$

b.  $\sqrt{18} \cdot (-\sqrt{50}) =$

d.  $\sqrt{27} \cdot \sqrt{32} =$

f.  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} =$

h.  $\sqrt{96} \cdot \sqrt{20} =$

3. Racionaliza en tu cuaderno las siguientes expresiones. Simplifica el resultado de ser posible.

a.  $\frac{1}{\sqrt{7}} =$

d.  $\frac{7}{\sqrt{21}} =$

g.  $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}} =$

b.  $-\frac{1}{\sqrt{11}} =$

e.  $\frac{-12}{\sqrt{18}} =$

h.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} =$

c.  $\frac{5}{\sqrt{3}} =$

f.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

i.  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}} =$

4. Resuelve en el cuaderno las siguientes situaciones sin utilizar la calculadora.

- Simplifica y/o racionaliza al máximo de ser posible.

- a. Lucía inventó estos dos números:  $4\sqrt{875}$  y  $5\sqrt{140}$ . ¿Cuál número es mayor?

- b. Determine el área y el perímetro de un rectángulo de  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  m de altura y  $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$  m de base.

- c. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de área  $\sqrt{3125}$  m<sup>2</sup>?

## 2.4 Operaciones fundamentales usando las propiedades de la radicación

### Problema

Miguel resolvió las operaciones que se presentan a la derecha y obtuvo el mismo valor. ¿Cómo lo realizó?

$$\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{300} \div \sqrt{3}$$

### Solución

Para resolver el problema se utilizan las propiedades de la radicación:

- $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10.$
- $\sqrt{300} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10.$

**R:** Utilizó la propiedad multiplicación de radicales y división de radicales.

#### Multiplicación con raíces cuadradas

Al multiplicar con raíces cuadradas se multiplican los coeficientes entre sí y los subradicales entre sí empleando la propiedad  $n\sqrt{a} \cdot n\sqrt{b} = n\sqrt{a \cdot b}$ .  
Por ejemplo:  $-5\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = -5 \cdot 4\sqrt{3 \cdot 2} = -20\sqrt{6}.$

#### División con raíces cuadradas

Al dividir con raíces cuadradas se dividen los coeficientes entre sí y los subradicales entre sí empleando la propiedad  $n\sqrt{a} \div n\sqrt{b} = n\sqrt{\frac{a}{b}}$  ( $b \neq 0$ ).  
Por ejemplo:  $12\sqrt{8} \div 3\sqrt{2} = \frac{12}{3}\sqrt{\frac{8}{2}} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8.$

#### Suma y resta con raíces cuadradas

Al sumar (o restar) con raíces cuadradas solo se operan aquellas que tienen igual radicando. Al hacerlo se suman (o restan) los coeficientes y se mantiene el radicando. Ejemplos:

1. Al sumar  $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$  se observa que los dos primeros términos tienen igual radicando y se pueden sumar, es decir:  
 $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = (4 + 3)\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 7\sqrt{3}.$
2. Al resolver  $5\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7} + 16$  se observa que dos términos tienen igual radicando y se pueden restar así como los números enteros, es decir:  $5\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7} + 16 = (5 - 4)\sqrt{7} - 8 + 16 = \sqrt{7} + 8.$

### ¿Qué pasaría?

Al multiplicar (o dividir) un número entero y una raíz cuadrada se realiza el mismo procedimiento explicado en la sección **Conclusión**. Por ejemplo:

1.  $6 \cdot 2\sqrt{3} = 6 \cdot 2\sqrt{3}$   
 $= 12\sqrt{3}$
2.  $10\sqrt{2} \div 5 = \frac{10}{5}\sqrt{2}$   
 $= 2\sqrt{2}$



### Recuerda

Al simplificar radicales se utilizan las propiedades de las potencias y las de la radicación:

$$\begin{aligned} 5 \sqrt[3]{32} &= 5 \sqrt[3]{2^5} \\ &= 5 \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} \\ &= 5 \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \\ &= 5 \cdot 2 \sqrt[3]{2^2} \\ &= 10 \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$



## Datos interesantes

Si un radical no tiene un coeficiente evidente, entonces se trata de 1.  
Ejemplo:  $\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$ .

## Observa cómo se hace

Observa la forma en que se resuelven algunas operaciones con raíces:

- $$2\sqrt{8} \cdot 7\sqrt{3} = 2 \cdot 7\sqrt{8 \cdot 3}$$

$$= 14\sqrt{24}$$

$$= 14\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 14 \cdot 2\sqrt{6}$$

$$= 28\sqrt{6}$$

Se multiplican los coeficientes y los subradicales entre sí.

Se simplifica la raíz.

Se efectúa la multiplicación en el coeficiente.
- $$4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} =$$

$$(4 + 1)\sqrt{2} + (6 - 2)\sqrt{3} =$$

$$5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

Se identifican los términos con igual subradical.

Se suman o restan los coeficientes y se mantiene el subradical.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Resuelve en el cuaderno las siguientes multiplicaciones con raíces cuadradas. Simplifica el resultado de ser posible.
  - $2\sqrt{9} \cdot 5\sqrt{2} =$
  - $-3\sqrt{8} \cdot 4\sqrt{2} =$
  - $5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$
  - $3 \cdot 6\sqrt{8} =$
  - $-6\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6} =$
  - $\sqrt{7} \cdot \sqrt{8} =$
- Soluciona en el cuaderno las siguientes divisiones con raíces cuadradas. Simplifica y/o racionaliza el resultado de ser posible.
  - $4\sqrt{10} \div 2\sqrt{2} =$
  - $-25\sqrt{16} \div 5\sqrt{2} =$
  - $8\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} =$
  - $-48 \div 6\sqrt{3} =$
  - $-2\sqrt{27} \div -5\sqrt{3} =$
  - $\sqrt{5} \div \sqrt{20} =$
- Resuelve en el cuaderno las siguientes sumas o restas con raíces cuadradas. Simplifica el resultado de ser posible.
  - $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1 =$
  - $5\sqrt{5} + 7\sqrt{2} - \sqrt{5} =$
  - $\sqrt{3} + 5 - 10\sqrt{3} =$
  - $\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + \sqrt{5} =$
  - $6\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 8\sqrt{7} - 5\sqrt{7} =$
  - $3,2\sqrt{2} + 4,9\sqrt{2} - 6 =$
- Simplifica y/o racionaliza cada radical, luego, resuelve las sumas o restas.
  - $\sqrt{45} + \sqrt{20} =$
  - $\sqrt{32} + \sqrt{72} + \sqrt{50} =$
  - $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{75} =$
  - $\sqrt{28} + \frac{14}{\sqrt{7}} =$
  - $\sqrt{80} + \frac{35}{\sqrt{5}} =$
  - $\sqrt{24} - \frac{12}{\sqrt{6}} =$

## 2.5 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.
- Usa las propiedades y la simplificación de radicales.

a	b	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[5]{\sqrt{a+b}})^0$	$(\sqrt[6]{a \cdot b})^3$
1	32				
$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{9}$				
$(\frac{5}{10})^{-2}$	$(\frac{7}{3})^0$				
$\sqrt[3]{\sqrt{4096}}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$				

2. Simplifica los siguientes radicales. Escribe los resultados en el cuaderno.

a.  $2 \sqrt[3]{16} =$

d.  $-10 \sqrt[5]{32} =$

g.  $\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$

b.  $-5 \sqrt[4]{64} =$

e.  $4 \sqrt[3]{343} =$

h.  $\frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 125}{9 \cdot 81}} =$

c.  $7 \sqrt[3]{216} =$

f.  $-3 \sqrt{4500} =$

i.  $-4 \sqrt[5]{\frac{288}{64}} =$

3. Resuelve en el cuaderno las siguientes multiplicaciones con raíces cuadradas.

- Simplifica y/o racionaliza el resultado de ser posible.

a.  $(\frac{2}{5}\sqrt{10}) \cdot (\frac{5}{4}\sqrt{8}) =$

b.  $(\frac{6}{7}\sqrt{\frac{5}{2}}) \cdot (\frac{21}{4}\sqrt{\frac{6}{10}}) =$

4. Soluciona en el cuaderno las siguientes divisiones con raíces cuadradas.

- Simplifica y/o racionaliza el resultado de ser posible.

a.  $(\frac{7}{4}\sqrt{18}) \div (\frac{14}{2}\sqrt{2}) =$

b.  $(\sqrt{\frac{7}{30}}) \div (5\sqrt{\frac{7}{10}}) =$

5. Resuelve en el cuaderno las siguientes sumas o restas con raíces cuadradas.

- Simplifica el resultado de ser posible.

a.  $\sqrt{6} - 7\sqrt{5} + (-\sqrt{6}) + 7\sqrt{5} =$

b.  $\sqrt{3} + \frac{1}{5}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{7} =$

c.  $\sqrt{4} + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2} - \sqrt{4} =$

6. ¿Cuál es el área de un rectángulo de  $\frac{5}{4} \sqrt{3}$  m de altura y  $\frac{7}{5} \sqrt{3}$  m de base?



### Recuerda

El orden en que se resuelven los signos de agrupación es:

- 1.º Paréntesis ( )
- 2.º Corchetes [ ]
- 3.º Llaves { }

## Operaciones combinadas

### 3.1 Operaciones combinadas con números reales

#### Problema

¿Cuál es el resultado de la operación del recuadro de la derecha?

$$\frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[ (3\sqrt{2})^3 - 2 \cdot \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right) \right] \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\}$$

#### Solución

Se resuelve la operación siguiendo el orden de prioridad de los signos de agrupación y de las operaciones aprendido anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[ (3\sqrt{2})^3 - 2 \cdot \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right) \right] \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\} &= \rightarrow \text{Efectúa la suma } \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2. \\ \frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[ (3\sqrt{2})^3 - 2 \cdot 2 \right] \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\} &= \rightarrow \text{Calcula la potencia: } (3\sqrt{2})^3 = 3\sqrt{2^3} = 2. \\ \frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[ 2 - 2 \cdot 2 \right] \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\} &= \rightarrow \text{Resuelve la multiplicación: } 2 \cdot 2 = 4. \\ \frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[ 2 - 4 \right] \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\} &= \rightarrow \text{Resuelve la resta: } 2 - 4 = -2. \\ \frac{2}{5} \cdot \left\{ -2 \div \sqrt{\frac{16}{9}} \right\} &= \rightarrow \text{Obtén la raíz: } \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2}} = \frac{4}{3}. \\ \frac{2}{5} \cdot \left\{ -2 \div \frac{4}{3} \right\} &= \rightarrow \text{Divide: } \frac{-2}{1} \div \frac{4}{3} = \frac{-2 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}. \\ \frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{2} &= \rightarrow \text{Multiplica: } \frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{2 \cdot -3}{5 \cdot 2} = \frac{-6}{10}. \\ \frac{-6}{10} &= \frac{-3}{5} \rightarrow \text{Simplifica.} \end{aligned}$$



### ¿Qué pasaría?

Si no se respeta el orden de las operaciones o de los signos de agrupación al resolver operaciones combinadas, se obtienen resultados incorrectos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 2^3 \cdot 5 + 2 & 2^3 \cdot 5 + 2 \\ = 8 \cdot 5 + 2 & = 8 \cdot 5 + 2 \\ = 40 + 2 & = 8 \cdot 7 \\ = 42 & = 56 \end{array}$$

El resultado de la izquierda es correcto, pero el de la derecha no, pues se efectuó la suma antes que la multiplicación.

#### Conclusión

Al resolver operaciones combinadas se debe tener en cuenta la prioridad de las operaciones así como la jerarquía de los signos de agrupación.

#### Prioridad de las operaciones

Las operaciones se resuelven siguiendo el orden señalado:

1. Radicales y potenciaciones
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

Si hay 2 o más operaciones de igual prioridad en una operación, se resuelve la que aparezca primero de izquierda a derecha.



## Desarrollo sostenible

Se debe aprender a *trabajar para vivir y no a vivir para trabajar*. Dado que el trabajo de un alumno corresponde a estudiar, se debe procurar organizar el tiempo de forma que le permita compartir con amigos y familiares, hacer deporte, divertirse y también cumplir con los deberes del hogar y del colegio. Para poder lograrlo, se debe ser ordenado, disciplinado y constante.

### Jerarquía de los signos de agrupación

Si la operación combinada contiene signos de agrupación como  $()$ ,  $[\ ]$  y  $\{ \}$ , se resuelven las operaciones dentro de ellos siguiendo este orden:

1. Paréntesis redondos  $()$
2. Corchetes  $[\ ]$
3. Llaves  $\{ \}$

### Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

a.  $\sqrt{81} \cdot [8 + (2^4 - 3^2 \cdot 6^0) \div 7]$

$$= 9 \cdot [8 + (16 - 9 \cdot 1) \div 7] \quad \rightarrow \text{Se calcula la raíz y las potencias.}$$

$$= 9 \cdot [8 + 7 \div 7] \quad \rightarrow \text{Se resuelve } (16 - 9 \cdot 1) = 16 - 9 = 7$$

$$= 9 \cdot 9 \quad \rightarrow \text{Se resuelve } [8 + 7 \div 7] = [8 + 1] = 9$$

$$= 81 \quad \rightarrow \text{Se resuelve la multiplicación.}$$

b.  $(\sqrt{6})^4 - 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \div (\sqrt[3]{7})^0$

$$= 36 - 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \div 1 \quad \rightarrow \text{Se resuelven las potencias.}$$

$$= 36 - 40 \div 1 \quad \rightarrow \text{Se resuelve la multiplicación.}$$

$$= 36 - 40 \quad \rightarrow \text{Se resuelve la división.}$$

$$= -4 \quad \rightarrow \text{Se resuelve la resta.}$$

### Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas en el cuaderno.

- a.  $[(34 - 51) \div 3] - (42 - 7)(-1 + 2) =$
- b.  $\{[25 \cdot (22 - 5)] + (33 - 5)\} \div -5 =$
- c.  $[1,2 \cdot -2,5 + 24 - (32 \div 3)] - 12,3 =$
- d.  $\left[ \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{8} \div \left( \frac{2}{3} \right)^0 \right]^2 =$
- e.  $\sqrt{25} + \sqrt{4} \cdot [2 \cdot (\sqrt{32} \div \sqrt{2})] =$
- f.  $(\sqrt{5})^2 \cdot (5\sqrt{2} - \sqrt{8}) [(\sqrt{2})^5 \div (\sqrt{6})^2] =$

2. Resuelve en el cuaderno cada situación.

- a. ¿Cuál es el perímetro de la figura del lado: si está compuesta por cuadrados iguales y su área total es de  $245 \text{ cm}^2$ ?
- b. ¿Cuáles dos números cumplen esas condiciones: sumados entre sí dan 265 y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro aumentado en 1?



### ¡Atención!

El símbolo de multiplicación entre los signos de agrupación se omite. Por ejemplo,  $(4^2 - 7)(-1 + 2)$  indica el producto  $(4^2 - 7) \cdot (-1 + 2)$ .

# Origen y utilidad de la notación científica

## 4.1 Conversión de cantidades a notación científica y viceversa



### Problema

La distancia de nuestro planeta a la Luna es 384 400 000 m. ¿Se puede representar esa cantidad como una potencia de base 10?

### Solución

Una potencia de base 10 está formada por  $10^n$ , donde  $n$  es un número entero. Se emplea la relación entre la multiplicación y la división.

Como  $384\ 400\ 000 \div 100\ 000\ 000 = 3,844$ .

Entonces,  $384\ 400\ 000 = 3,844 \cdot 100\ 000\ 000$ .

Además,  $100\ 000\ 000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$ .

Por lo tanto:  $384\ 400\ 000 = 3,844 \cdot 10^8$ .

### Conclusión

Un número está expresado en **notación científica** si es de la forma  $a \cdot 10^n$  con  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $1 \leq |a| < 10$  y  $n \in \mathbb{Z}$  ( $a$  es racional y su valor absoluto es mayor o igual a 1 y menor que 10 y  $n$  es entero). Ejemplo:  $3,5 \cdot 10^{-5}$ .

Para expresar un número decimal en **notación científica** se desplaza la coma (,) hasta obtener un número entre mayor o igual a 1 y menor que 10 y se multiplica por un múltiplo de 10 cuyo exponente coincida con la cantidad de cifras desplazadas.

- Si la coma se desplaza hacia la **izquierda** el exponente es **positivo**:  
 $57\ 801,5 \rightarrow 5,78015 \rightarrow 57\ 801,5 = 5,78015 \cdot 10^4$ . Se desplazó 4 lugares.
- Si la coma se desplaza hacia la **derecha** el exponente es **negativo**:  
 $0,0012 \rightarrow 0001,2 \rightarrow 0,0012 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ . Se desplazó 3 lugares.

### ¿Qué pasaría?

Para pasar de notación científica a notación decimal se desplaza la coma (,) tantos espacios como indica el exponente del 10 y se completa con ceros de ser necesario.

Si el exponente es:

**I. Positivo:** la coma se desplaza hacia la **derecha**.  
 $3,2 \cdot 10^2 \rightarrow 320$   
 $3,2 \cdot 10^2 = 320$

**II. Negativo:** la coma se desplaza a la **izquierda**.  
 $8,1 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0,81$   
 $8,1 \cdot 10^{-1} = 0,81$

### Práctica

Trabaja en tu cuaderno



- Expresa cada número en notación científica. Escribe las respuestas en el cuaderno.
 

a. 5 700 000 000 =	c. 14 905,1 =	e. 0,000 000 725 =
b. 12 300 000 =	d. 0,000 000 068 =	f. 0,000 3 =
- Escribe el número decimal que representa cada notación científica. Usa la cápsula **¿Qué pasaría?**

a. $2,3 \cdot 10^2 =$	c. $4,56 \cdot 10^{-1} =$	e. $8,3 \cdot 10^7 =$	g. $6,1 \cdot 10^{-2} =$
b. $1,2 \cdot 10^5 =$	d. $8,9 \cdot 10^{-3} =$	f. $5,6 \cdot 10^1 =$	h. $7,4 \cdot 10^{-4} =$

## 4.2 Operaciones con números expresados en notación científica

### Problema

Si los planetas se alinearan, la distancia de separación entre Júpiter y Saturno sería aproximadamente de  $6,13 \cdot 10^8$  km y, entre Marte y Júpiter  $5,36 \cdot 10^8$  km. ¿Cuál es la diferencia entre estas dos distancias?

### Solución

Como el exponente de 10 en ambas cantidades es igual, resta el primer factor de ambas expresiones y mantén la potencia de base 10:

$$(6,13 - 5,36) \cdot 10^8 = 0,77 \cdot 10^8$$

Como  $0,77$  es menor que 1, se corre la coma un lugar hacia la derecha y se resta 1 al exponente.

$$0,77 \cdot 10^8 = 7,7 \cdot 10^{8-1} = 7,7 \cdot 10^7$$

### Conclusión

Al resolver operaciones con números expresados en notación científica se emplean las leyes de potencia aprendidas anteriormente.

#### Adición o sustracción

Para sumar o restar cantidades expresadas en notación científica, el exponente de 10 tiene que ser el mismo en todos los términos. Es decir:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{Z} \text{ se tiene que } a \cdot 10^n \pm b \cdot 10^n = (a \pm b) \cdot 10^n$$

Ejemplos:

- $4,5 \cdot 10^5 + 2,3 \cdot 10^5 = (4,5 + 2,3) \cdot 10^5 = 6,8 \cdot 10^5$
- $8,65 \cdot 10^9 - 5,36 \cdot 10^9 = (8,65 - 5,36) \cdot 10^9 = 3,29 \cdot 10^9$

#### Multiplicación y división

Al multiplicar (o dividir) cantidades expresadas en notación científica, se multiplican (o dividen) los primeros factores de ambas expresiones y aparte se multiplican (o dividen) las potencias de 10. Es decir:

$\forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ y } m, n \in \mathbb{Z}$  se tiene que:

$$(a \cdot 10^m) \cdot (b \cdot 10^n) = (a \cdot b) \cdot 10^{m+n}$$

$$(a \cdot 10^m) \div (b \cdot 10^n) = (a \div b) \cdot 10^{m-n}$$



### ¡Atención!

Un número en notación científica como  $0,77 \cdot 10^8$ , se puede transformar en  $7,7 \cdot 10^7$  porque al correr la coma a la derecha en el primer factor se disminuye el exponente de la potencia de 10 según la cantidad de cifras desplazadas. En caso contrario, un número como  $83,2 \cdot 10^4$  se puede transformar en  $8,32 \cdot 10^5$  porque al correr la coma del primer factor a la izquierda, el exponente de la potencia aumenta, según la cantidad de posiciones desplazadas.



### Trabajo colaborativo

En parejas investiguen la media de la Tierra al Sol, la distancia al planeta más cercano y la superficie de un átomo de hidrógeno. Representen las cantidades en notación científica.

## Observa cómo se hace



### Recuerda

En la multiplicación de potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes:  
 $10^3 \cdot 10^5 = 10^8$ .

En la división de potencias de igual base, se conserva la base y se restan los exponentes:  
 $10^6 \div 10^4 = 10^2$ .

Resuelve las siguientes operaciones en notación científica.

$$\begin{aligned} \text{a. } & 5 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7 \\ &= (5 - 3) \cdot 10^7 \\ &= 2 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

- Se agrupan los primeros factores.
- Se efectúa la resta.

$$\begin{aligned} \text{b. } & (8,1 \cdot 10^{-3}) \cdot (3,4 \cdot 10^{-5}) \\ &= (8,1 \cdot 3,4) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-5}) \\ &= 27,54 \cdot 10^{-8} \\ &= 2,754 \cdot 10^{-8+1} \\ &= 2,754 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

- Se agrupan los factores y las potencias.
- Se efectúa la multiplicación y la suma.
- Se corre la coma y se suma 1 al exponente.
- Se efectúa la operación en el exponente.

$$\begin{aligned} \text{c. } & (3,08 \cdot 10^7) \div (1,4 \cdot 10^{-2}) \\ &= (3,08 \div 1,4) \cdot (10^7 \div 10^{-2}) \\ &= 2,2 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

- Se agrupan los factores y las potencias.
- Se efectúa la división y la suma.

Las operaciones también se pueden combinar:

$$\begin{aligned} \text{d. } & (2,5 \cdot 10^5) + (2,1 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^2) \\ &= (2,5 \cdot 10^5) + (2,1 \cdot 3) \cdot 10^{3+2} \\ &= (2,5 \cdot 10^5) + 6,3 \cdot 10^5 \\ &= (2,5 + 6,3) \cdot 10^5 \\ &= 8,8 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

→ Se resuelve la multiplicación.

→ Se efectúa la suma.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes adiciones. Escribe las respuestas en el cuaderno.

$$\text{a. } 1,23 \cdot 10^2 + 2,07 \cdot 10^2 =$$

$$\text{c. } 2,01 \cdot 10^{-5} + 4,07 \cdot 10^{-5} =$$

$$\text{b. } 8,75 \cdot 10^7 + 3,21 \cdot 10^7 =$$

$$\text{d. } 5,35 \cdot 10^{-3} + 9,75 \cdot 10^{-3} =$$

2. Efectúa las siguientes sustracciones. Escribe las respuestas en el cuaderno.

$$\text{a. } 8,75 \cdot 10^6 - 4,57 \cdot 10^6 =$$

$$\text{c. } 8,3 \cdot 10^{-2} - 5,42 \cdot 10^{-2} =$$

$$\text{b. } 9,84 \cdot 10^8 - 6,1 \cdot 10^8 =$$

$$\text{d. } 6,3 \cdot 10^{-1} - 4,5 \cdot 10^{-1} =$$

3. Resuelve las siguientes multiplicaciones. Escribe las respuestas en el cuaderno.

$$\text{a. } (1,35 \cdot 10^3) \cdot (1,56 \cdot 10^4) =$$

$$\text{c. } (8,2 \cdot 10^{-7}) \cdot (9,3 \cdot 10^{-5}) =$$

$$\text{b. } (2,3 \cdot 10^{-7}) \cdot (1,02 \cdot 10^{-1}) =$$

$$\text{d. } (9,8 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-2}) =$$

4. Efectúa las siguientes divisiones. Escribe las respuestas en el cuaderno.

$$\text{a. } (8,32 \cdot 10^7) \div (2 \cdot 10^4) =$$

$$\text{c. } (1,19 \cdot 10^{-5}) \div (1,4 \cdot 10^{-8}) =$$

$$\text{b. } (9,5 \cdot 10^{-4}) \div (5 \cdot 10^6) =$$

$$\text{d. } (4,465 \cdot 10^9) \div (4,7 \cdot 10^{-9}) =$$

5. Calcula las siguientes operaciones combinadas en el cuaderno.

$$\text{a. } (2,42 \cdot 10^2) + (5,5 \cdot 10^3) \div (5 \cdot 10^1) =$$

$$\text{c. } (4,2 \cdot 10^{-3}) - (2,4 \cdot 10^{-3}) + (4 \cdot 10^{-3}) =$$

$$\text{b. } (7,2 \cdot 10^5) - (5,3 \cdot 10^7) \cdot (1 \cdot 10^{-2}) =$$

$$\text{d. } (3,2 \cdot 10^{11}) \div (2 \cdot 10^8) \cdot (2,2 \cdot 10^2) =$$

6. Sami confecciona molas en la comunidad de Arima. Si le piden  $3,40 \cdot 10^4$  vinchas con molas para  $2 \cdot 10^3$  niñas, que participarán en un festival. ¿Cuántas vinchas le corresponden a cada niña?

## 4.3 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Expresa cada número en notación científica. Escribe las respuestas en el cuaderno.

a.  $3\,590\,000\,000\,000\,000 =$

d.  $0,000\,000\,000\,081 =$

b.  $125\,600\,000\,000\,000 =$

e.  $0,000\,000\,000\,000\,027 =$

c.  $12\,475,9 =$

f.  $0,000\,000\,54 =$

2. Escribe el número decimal que representa cada notación científica.

a.  $8,75 \cdot 10^4 =$

d.  $6,34 \cdot 10^{-5} =$

b.  $4,06 \cdot 10^8 =$

e.  $3,758 \cdot 10^{-6} =$

c.  $9,3 \cdot 10^3 =$

f.  $1,05 \cdot 10^{-3} =$

3. Copia la tabla en el cuaderno y complétala.

- Resuelve las operaciones indicadas.



**Recuerda**

$$10^0 = 1$$

a	b	a + b	a - b	a · b	a ÷ b
$3,2 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$				
$5,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$				
$4,6 \cdot 10^7$	$9,2 \cdot 10^7$				
$8,6 \cdot 10^{-1}$	$4,3 \cdot 10^{-1}$				

4. Resuelve las siguientes operaciones combinadas en el cuaderno.

a.  $[(2^3 - 5^1) \div 2^0] - (3^2 - 2^3)(-1 + -2) =$

d.  $\left[\frac{12}{5} + \frac{3}{5} - \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} \div \left(\frac{4}{7}\right)^0\right]^5 =$

b.  $\{[3^2 \cdot (4^2 - 10)] + (3^3 - 2^5)\} \cdot 3 =$

e.  $\sqrt{36} + \sqrt{81} \cdot [4 \cdot (\sqrt{125} \div \sqrt{5})] - \sqrt{100} =$

c.  $[4,2 \cdot -2 + 7^2 - (5^3 \div 25)] - 18,6 =$

f.  $(\sqrt{3})^2 (4\sqrt{3} - \sqrt{27}) [(\sqrt{3})^0 \cdot (\sqrt{3})^2] =$

5. Resuelve las siguientes situaciones combinadas en el cuaderno.

- a. Panamá logró récord mundial al preparar el patacón más grande del mundo; midió  $3,4 \cdot 10^3$  milímetros de diámetro. Supongamos que se repartirá entre  $2,0 \times 10^2$  personas. ¿De qué tamaño serían los pedazos?

- Trabaja con el valor aproximado de  $\pi \approx 3,14$

## Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Aplico las propiedades de la potenciación en la solución de ejercicios.			
2. Aplico con seguridad las propiedades de las raíces.			
3. Identifico raíces cuadradas con resultados racionales e irracionales.			
4. Sumo, resto, multiplico y divido raíces cuadradas.			
5. Aplico la simplificación y racionalización de raíces cuadradas.			
6. Resuelvo problemas de aplicación utilizando conceptos sobre raíces cuadradas.			
7. Explico el procedimiento para resolver operaciones combinadas con números reales.			
8. Resuelvo con esmero operaciones combinadas con números reales.			
9. Expongo con claridad el origen y la utilidad de la notación científica.			
10. Escribo cantidades grandes y pequeñas en notación científica aplicando la regla.			
11. Convierto correctamente expresiones decimales a notación científica y viceversa.			
12. Realizo operaciones con números expresados en notación científica.			

## Operaciones con expresiones algebraicas

Si un fenómeno ocurre una vez puede ser un accidente; si ocurre dos veces, tal vez sea casualidad; pero si ocurre tres o más veces, genera un patrón. La búsqueda de patrones en la naturaleza ha sido una necesidad humana, debido a la constante búsqueda por explicar su entorno; por ejemplo, la posibilidad de comprender el cambio de las estaciones, los movimientos de los cuerpos celestes, la trayectoria de un objeto, qué es el fuego o cómo crear luz manipulando electrones. Todo esto hizo comprender que la única magia que permite predecir cualquier fenómeno es la de los modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos están relacionados a través de dos procesos: la abstracción y la interpretación, y se utilizan para modelar fenómenos naturales, sociales o características y propiedades de los números y sus operaciones, como por ejemplo, patrones de ocurrencia de terremotos, las ondas electromagnéticas que emiten y reciben los aparatos electrónicos. El modelaje matemático de un fenómeno busca encontrar un patrón básico o reglas para identificar su ordenamiento interno y sus regularidades. Estas reglas son representadas por símbolos y letras que se conocen como expresiones algebraicas.



*Objetos que emiten ondas electromagnéticas en la vida cotidiana.*

### En esta unidad aprenderás a...

- Reconocer monomios, polinomios y su grado.
- Reducir expresiones algebraicas con términos semejantes.
- Resolver operaciones con expresiones algebraicas.

# Operaciones básicas con expresiones algebraicas

## 1.1 Conceptos básicos sobre expresiones algebraicas



### ¡Atención!

En álgebra, los valores desconocidos reciben el nombre de variables y se representan mediante letras.

### Problema

María tiene 5 veces la edad de Carlos y la edad de Carlos es igual a la suma de la edad de Ana y Antonio. Si se utiliza la letra **a** para representar la edad de Ana y **b** para representar la edad de Antonio, ¿Cómo se representa la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio?

### Solución

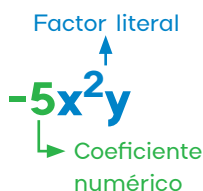
- Como la edad de Carlos es la suma de la edad de Ana y la de Antonio:  
Edad de Carlos = edad de Ana + edad de Antonio =  $a + b$ .
- La edad de María es 5 veces la edad de Carlos:  
Edad de María =  $5 \cdot$  edad de Carlos =  $5 \cdot (a + b) = 5a + 5b$
- Por lo tanto, la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio se representa por la expresión:

$$5a + 5b$$



### Recuerda

El nombre de los términos de una expresión algebraica es:



### Conclusión

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, variables y operaciones. Cada parte de una expresión algebraica que se encuentra separada por operaciones de suma y resta, se llama **término** de la expresión algebraica. Por ejemplo,  $5x - 2y$  es una expresión algebraica que posee dos términos, separados por la operación indicada con  $-$ .

- Una expresión algebraica se llama monomio cuando está formada por un solo término. Por ejemplo,  $-5x^2y$ .
- Si es una expresión que posee dos o más términos se conoce como polinomio. Por ejemplo,  $6x^2 + 4x - 1$ .

#### Términos semejantes

Dos términos son semejantes si poseen el mismo factor literal (las mismas letras con iguales exponentes). Por ejemplo,  $4ab^3$  y  $-7ab^3$  son términos semejantes pues comparten el factor literal  $ab^3$ .

#### Grado absoluto de una expresión algebraica

- El **grado absoluto de un monomio** corresponde a la suma de todos los exponentes de las variables. Ejemplo, el grado de  $-5x^2y^1$  es  $2 + 1 = 3$ .



### ¿Qué pasaría?

Si un polinomio tiene dos términos, también se llama binomio, y si tiene tres, se llama trinomio.

- El **grado absoluto de un polinomio** es el mayor grado de los términos que conforman dicho polinomio. Por ejemplo, el grado del polinomio  $6x^3y^4 + 5x^2y^2 - 6x$  es 7, porque el grado del primer término ( $6x^3y^4$ ) es 7, del segundo ( $5x^2y^2$ ) es 4 y del tercero ( $6x^1$ ) es 1.

### Observa cómo se hace

Determina la cantidad de términos de cada expresión algebraica.

- a.  $4ab - 3b + a$  → 3 términos ( $4ab$ ;  $-3b$ ;  $a$ )  
 b.  $-9x^2y^3z^4$  → 1 término ( $-9x^2y^3z^4$ )  
 c.  $48m^2 + 2m$  → 2 términos ( $48m^2$ ;  $2m$ )

Escribe tres términos semejantes al dado.

- a.  $wy^2$  →  $7wy^2$ ;  $-wy^2$ ;  $\frac{5wy^2}{2}$

Determina el grado absoluto de cada expresión.

- a.  $-9x^2y^3z^4$  → El grado es  $2 + 3 + 4 = 9$ .  
 b.  $4ab - 3b + a$  → El grado es 2, pues el término con el mayor grado es  $4a^1b^1$ .



### Recuerda

- Cada vez que no se indique el signo de un término algebraico se entiende que es positivo.
- Si un término algebraico no tiene coeficiente, equivale a 1, ejemplo,  $mn^2 = 1mn^2$ .
- Si una variable no tiene exponente, este también equivale a 1, por ejemplo,  $2x = 2x^1$ .

### Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Escribe una expresión algebraica con las características indicadas en cada caso.
  - Es un monomio en el que el coeficiente numérico es  $-6$  y el factor literal es  $xy^3$ .
  - Posee dos términos y solo involucra la variable  $m$ .
  - Posee tres términos separados solamente por sumas.
  - Es un polinomio de cuatro términos que involucra tres variables.
- Clasifica cada una de las siguientes expresiones algebraicas en monomio o polinomio.
 

a. $3m^2np^3$	c. $5a - 5b$	e. $8 - 7q + 3r$
b. $-3x^5 - y^2 + z$	d. $-9a^3$	f. $-25x^2yz^3$
- Anota un término semejante a cada uno de los indicados.
 

a. $3mn$	c. $5ab^2$	e. $y$
b. $-8x^2$	d. $\frac{2pq^2}{5}$	f. $-x^2$
- Determina el grado absoluto de los siguientes monomios.
 

a. $4x^3$	b. $-5xz$	c. $\frac{3x^2a^3}{5}$
-----------	-----------	------------------------
- Determina el grado absoluto de los siguientes polinomios.
 

a. $1 - 6xyz$	b. $7x + 3t$	c. $-uvw^2 + v^2 - \frac{t^2}{3}$
---------------	--------------	-----------------------------------

## 1.2 Reducción de términos semejantes en un polinomio

### Problema

¿Qué expresión se obtiene al reducir los términos semejantes en el siguiente polinomio?

$$2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$$



### ¿Qué pasaría?

Si las variables de dos términos están elevadas a potencias diferentes, entonces los términos NO son semejantes. Por ejemplo,  $2y^2$  y  $8y$  NO son términos semejantes.

### Solución

- Primero se agrupan los términos semejantes.  
 $(2y^2 + 3y^2) + (8y - 9y)$
- Luego, se reducen los términos semejantes.  
 $(2 + 3)y^2 + (8 - 9)y$   
 $= 5y^2 - y$

### Conclusión

Para **reducir términos semejantes en un polinomio** se dan estos pasos:

- Se identifican los términos semejantes y se agrupan.
- Se reducen los términos semejantes.



### Recuerda

Para reducir términos algebraicos semejantes, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación. Por ejemplo,  $8y - 9y = (8 - 9)y$ .

### Observa cómo se hace

$$\begin{aligned} \text{Reduce los términos semejantes en el polinomio } 7xy + 3y - 4x - 10xy. \\ 7xy + 3y - 4x - 10xy &= (7xy - 10xy) + 3y - 4x \rightarrow \text{Agrupa los semejantes.} \\ &= (7 - 10)xy + 3y - 4x \rightarrow \text{Se reduce.} \\ &= -3xy + 3y - 4x \end{aligned}$$

### Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios.
 

a. $3a + 2a$	f. $4x - y - 2y + x$
b. $-6x + 5x$	g. $9t^2 + 2t - 7t^2 + 6t$
c. $3x + 5a - 2x + 3a$	h. $3y^2 - 3y^2 - 4y^2 + 9y$
d. $5y + 9b - 6b - 6y$	i. $a^2 + 5ab - 5a + ab$
e. $6t + 2z - t - 5z$	j. $z^2 + 9z + 3z - z^2$

### 1.3 Suma y resta de polinomios

#### Problema

La abuela le dio a Daniela 5 monedas de  $m$  balboas y a Felipe, 7 de esas mismas monedas. Si Daniela compró 2 chocolates de  $n$  balboas cada uno, y Felipe, 5 de esos mismos chocolates, ¿cuál expresión algebraica representa el dinero que les quedó a ambos en total?



#### Solución

Se representa la situación mediante expresiones algebraicas:

- Dinero que recibió Daniela:  $5m$  → Recibió 5 monedas de  $m$  balboas.
- Lo que le quedó:  $5m - 2n$  → Compró 2 chocolates de  $n$  balboas.
- Dinero que recibió Felipe:  $7m$  → Recibió 7 monedas de  $m$  balboas.
- Lo que le quedó:  $7m - 5n$  → Compró 5 chocolates de  $n$  balboas.

Se suma lo que le quedó a ambos para determinar el total.

$$(5m - 2n) + (7m - 5n) = (5m + 7m) + (-2n - 5n) \rightarrow \text{Agrupa semejantes.}$$

$$= 12m - 7n \quad \rightarrow \text{Reduce semejantes.}$$

La expresión algebraica que representa lo que les quedó en total a los dos juntos es  $12m - 7n$ .

#### Conclusión

Para **sumar polinomios**, se omiten los paréntesis, se agrupan los términos semejantes y se reducen.

Por ejemplo:  $(2x - 3y) + (5x - 2y) = 2x - 3y + 5x - 2y = 7x - 5y$

Para **restar polinomios**, se omiten los paréntesis, pero cambiando el signo de cada término en el polinomio que se resta. Luego se agrupan los términos semejantes y se reducen.

Por ejemplo:  $(2x - 3y) - (5x - 2y) = 2x - 3y - 5x + 2y = -3x - y$

Para sumar o restar polinomios también se puede utilizar el **método vertical**, de manera que se colocan los términos semejantes en la misma columna y luego se suman o se restan según la operación indicada. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y \\ (+) 5x - 2y \\ \hline 7x - 5y \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x - 3y \\ (-) 5x - 2y \\ \hline -3x - y \end{array}$$



#### ¡Atención!

El cambio de signo a los términos de un polinomio que están dentro de un paréntesis negativo se debe a la propiedad distributiva de la multiplicación. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} & -(5x - 2y) \\ &= -1 \cdot 5x + -1 \cdot -2y \\ &= -5x + 2y \end{aligned}$$

## Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes operaciones eliminando los paréntesis y en forma vertical.

$$\begin{aligned} \text{a. } & (-3a + 5b) + (-4a + 3b) \\ &= -3a + 5b - 4a + 3b \\ &= (-3a - 4a) + (5b + 3b) \\ &= -7a + 8b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -3a + 5b \\ (+) -4a + 3b \\ \hline -7a + 8b \end{array}$$

- Mantiene los signos por ser suma.
- Agrupa términos semejantes.
- Reduce términos semejantes.

→ Se colocan los términos semejantes en columnas y se suman.

$$\begin{aligned} \text{b. } & (6x - 3y + 1) - (-2y - 8 + x) \\ &= 6x - 3y + 1 + 2y + 8 - x \\ &= (6x - x) + (-3y + 2y) + (1 + 8) \\ &= 5x - y + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 3y + 1 \\ (-) x - 2y - 8 \\ \hline 5x - y + 9 \end{array}$$

- Cambia los signos por ser resta.
- Agrupa términos semejantes.
- Reduce términos semejantes.

→ Se colocan los términos semejantes en columnas y se restan.

### ¿Qué pasaría?

Considera que al colocar una resta en forma vertical no se debe cambiar el signo a los términos del polinomio que se resta. Pues la resta se aplicará al hacer el cálculo vertical y al cambiar el signo se estaría aplicando dos veces la resta.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes operaciones eliminando paréntesis en forma horizontal.

a.  $(9x + 2y) + (7x - 5y)$

b.  $(x + 2y) + (6x - y)$

c.  $(5xy + 4y) - (7x - 8xy)$

d.  $(4ab - 3a) + (5a - 2ab)$

e.  $(-6t + 2z) - (7z - 7t)$

f.  $(6a^2 + 2a) - (a^2 - 5a)$

g.  $(-x + 7y - 2) + (4x - y + 6)$

h.  $(-ab + 5a - 4) - (4a - ab + 9)$

i.  $(-8 + 5m - 4m^2) - (m^2 + 9 - m)$

j.  $(7pq + 9p) + (q - 2pq - 8p)$

2. Copia las siguientes operaciones planteadas en forma vertical y resuelve.

a. 
$$\begin{array}{r} 4x + 3y \\ (+) 5x - 2y \\ \hline \end{array}$$

d. 
$$\begin{array}{r} 4a + 5b \\ (-) 7a - 9b \\ \hline \end{array}$$

g. 
$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x + 2 \\ (+) x^2 + 2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

b. 
$$\begin{array}{r} 2a + 5b \\ (-) -3a + 9y \\ \hline \end{array}$$

e. 
$$\begin{array}{r} 9x^2 + 2y \\ (+) 7x^2 - 5y \\ \hline \end{array}$$

h. 
$$\begin{array}{r} 4pq + 2p - 5q \\ (-) 6pq - p + 5q \\ \hline \end{array}$$

c. 
$$\begin{array}{r} 6m + 2n \\ (+) 3m - 5n \\ \hline \end{array}$$

f. 
$$\begin{array}{r} 3xy - 6 \\ (-) -xy + 1 \\ \hline \end{array}$$

i. 
$$\begin{array}{r} 2a^2 + 2ab - 6b^2 \\ (+) 2a^2 - 2ab + 3b^2 \\ \hline \end{array}$$

## 1.4 Multiplicación de un polinomio por un número

### Problema

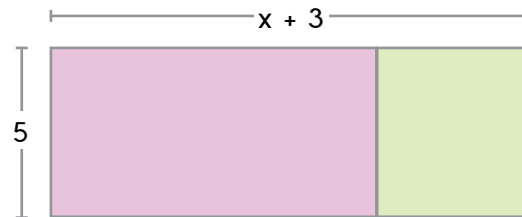
Para hacer un cartel fue necesario unir dos piezas como lo muestra la figura. ¿Cuál es el área total del cartel?



### Solución

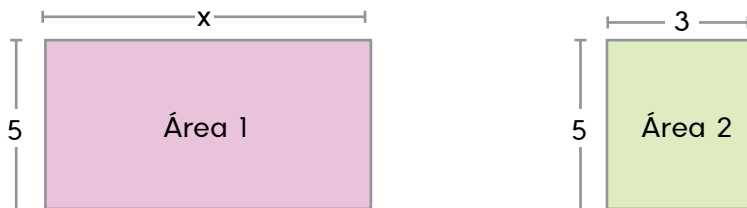
El largo total del cartel se obtiene al sumar  $x + 3$ .

Así, las dimensiones del cartel son las que se indican en la siguiente figura:



Por lo tanto, el área del cartel se obtiene al multiplicar la base por la altura:

$$(x + 3) \cdot 5 = 5(x + 3)$$



Sin embargo, también se puede determinar el área de cada pieza y sumarlas para obtener el área total del cartel.

$$\text{Área 1} = x \cdot 5 = 5x$$

$$\text{Área 2} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\text{Área total} = 5x + 15$$

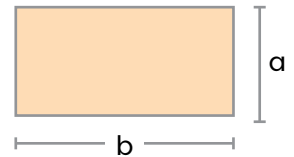
De esta manera, a partir de las dos estrategias anteriores podemos observar que el área total se puede expresar como  $5(x + 3)$  y también como  $5x + 15$ ; por lo tanto, se deduce la siguiente igualdad:

$$5(x + 3) = 5x + 15$$



### Recuerda

El área de un rectángulo se calcula multiplicando la base ( $b$ ) por la altura ( $h$ ). Es decir,  $A = b \cdot h$ .



### Datos interesantes

Diferentes matemáticos a lo largo de la historia han empleado modelos geométricos para demostrar o comprobar ciertas relaciones o resultados algebraicos.



## Recuerda

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma establece que el resultado de multiplicar un número por una suma es igual que sumar el producto del número por cada sumando. Es decir:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

## Conclusión

Para realizar la **multiplicación de un polinomio por un número**, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación, de esa manera se multiplica el número por cada término del polinomio considerando la ley de signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} -3(4x - 3y - 2) &= (-3) \cdot 4x + (-3) \cdot (-3y) + (-3) \cdot (-2) \\ &= -12x + 9y + 6 \end{aligned}$$

## Observa cómo se hace

Un ingeniero determinó que para colocar una línea de varillas en una construcción, necesita  $5x + 3y$  metros de varilla, según las dimensiones del edificio. Si requiere colocar 12 líneas de varilla, ¿cuál expresión representa la cantidad total de metros que necesitará?

- Para calcular el total de metros de varilla se multiplica 12 por  $5x + 3y$ .  

$$12(5x + 3y) = 12 \cdot 5x + 12 \cdot 3y$$

$$= 60x + 36y$$
- El total de metros de varillas que necesita se representa con la expresión  $60x + 36y$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| a. $3(4x + y)$             | e. $7(2a - 3 - 4b)$         |
| b. $-6(2x - 7y)$           | f. $-5(5 - 4a - 6b)$        |
| c. $(3mn - 5) \cdot 3$     | g. $(4x^2 + y - 2) \cdot 2$ |
| d. $(2p + 5q^2) \cdot -10$ | h. $(a - 5b - 1) \cdot -5$  |



## ¡Atención!

Considera que la multiplicación es conmutativa; es decir,  $a \cdot b = b \cdot a$ .

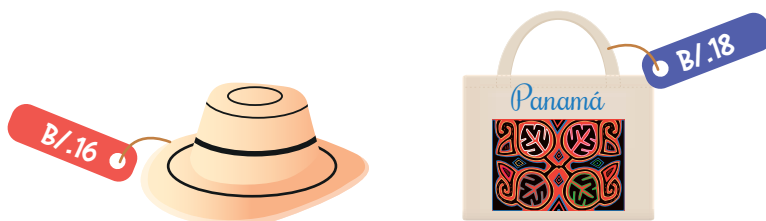
2. Plantea una multiplicación que permita solucionar cada problema y resuelve.

- Si la base de un rectángulo mide 8 cm y su altura corresponde a  $x + 7$  centímetros, ¿cuál polinomio representa el área de ese rectángulo?
- La cantidad de dinero que gasta una persona en un parque de diversiones se representa con la expresión  $3p + 12$  (3 balboas por cada atracción principal más 12 balboas de entrada general), según la cantidad de tiquetes que compre. Si un grupo de 5 amigos va al parque, ¿cuál polinomio representa la cantidad total de dinero que gastarán?
- Un vendedor calcula sus ganancias diarias mediante la expresión  $5a - 3b - 12$ . ¿Cuál polinomio representa las ganancias durante una semana, considerando los 7 días?

## 1.5 División de un polinomio entre un número

### Problema

Un grupo de 4 artesanos se reúne para vender los productos elaborados en conjunto. Durante un día vendieron  $m$  sombreros y  $n$  bolsos, la inversión de estos productos fue de 50 balboas. Si reparten las ganancias equitativamente entre los 4, ¿cuál expresión representa lo que le corresponde a cada uno según los precios indicados en las imágenes?



### Solución

La ganancia total obtenida durante ese día se calcula al sumar lo que se generó en sombreros más lo que se generó con los bolsos y a esto restarle la inversión realizada en esos productos.

Para esto se plantean las expresiones usando los datos dados:

- Dinero en sombreros:  $16m$  →  $m$  sombreros a 16 balboas cada uno.
- Dinero en bolsos:  $18n$  →  $n$  bolsos a 18 balboas cada uno.

Así las ganancias de ese día corresponden a  $16m + 18n - 50$ . Lo cual se divide entre 4 para determinar lo que le corresponderá a cada artesano. Es decir,  $(16m + 18n - 50) \div 4$ .

Para resolver la división anterior, se divide cada término del polinomio entre el divisor que es 4:

- $16m \div 4 = \frac{16m}{4} = 4m$
- $18n \div 4 = \frac{18n}{4} = \frac{9n}{2}$
- $-50 \div 4 = \frac{-50}{4} = -\frac{25}{2}$

Se plantea el resultado como el polinomio correspondiente a la suma de todos los resultados anteriores.

$$(16m + 18n - 50) \div 4 = 4m + \frac{9n}{2} - \frac{25}{2}$$

Lo que le corresponderá a cada artesano es  $4m + \frac{9n}{2} - \frac{25}{2}$ .



### Datos interesantes

Las molas son telas hechas a mano que caracterizan nuestro país y más específicamente a la cultura indígena guna. Estos diseños, que incluyen generalmente laberintos, animales y formas simétricas, son conocidos en todo el mundo.



### Recuerda

En una división, el primer número se llama dividiendo; el segundo, divisor, y el resultado es el cociente. Además, para dividir un monomio entre un número, se divide el coeficiente numérico del monomio entre el número dado y se mantiene el mismo factor literal.



## Desarrollo sostenible

Aunque un país se desarrolle económicamente, siempre se debe dar un espacio importante a las tradiciones que lo identifican.



## Recuerda

Para simplificar una fracción se divide tanto el numerador como el denominador entre un mismo número. Por ejemplo:

$$\frac{28}{8} = \frac{28 \div 4}{8 \div 4} = \frac{7}{2}$$

## Conclusión

Para **dividir un polinomio entre un número**, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el número indicado considerando la ley de signos. Si la división entre los números no es exacta, se indica como fracción y se simplifica de ser posible.

## Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes divisiones.

a.  $(6x^2 - 21x + 3) \div -3$   
 $= (6x^2 \div -3) + (-21x \div -3) + (3 \div -3) \rightarrow$  Se divide cada término.  
 $= 2x^2 + 7x - 1 \rightarrow$  Se resuelven las divisiones entre los números.

b.  $(28a - 6b) \div 8$   
 $= (28a \div 8) + (-6b \div 8) \rightarrow$  Se divide cada término.  
 $= \frac{28a}{8} + \frac{-6b}{8} \rightarrow$  Se indican como fracción al no ser exactas.  
 $= \frac{7a}{2} - \frac{3b}{4} \rightarrow$  Se simplifican las fracciones  $\frac{28}{8}$  y  $\frac{6}{8}$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes divisiones.

a.  $(16x - 8a) \div 2$

b.  $(9xy - 45y) \div (-3)$

c.  $(45x^2 - 20x - 35) \div 5$

d.  $(-63y + 27x + 54) \div (-9)$

e.  $(-24b - 12) \div 10$

f.  $(-21x^2 + 14x) \div (-6)$

g.  $(-18y - 30x - 24) \div 12$

h.  $(20y + 10x + 2) \div (-8)$

2. Plantea una división que permita solucionar cada problema y resuelve.

a. Si la edad de Julián se representa con  $4m + 6$  y Raquel tiene la mitad de años que Julián. ¿Cuál polinomio representa la edad de Raquel?

b. En un negocio se reparten las ganancias en partes iguales entre 3 socios. Si las ganancias durante un mes se representan con la expresión  $18x + 9y - 15$ , ¿cuál polinomio representa lo que le corresponde a cada uno?

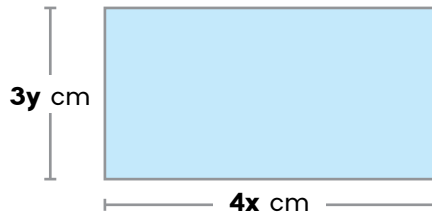
c. Mireya compró  $w$  carruchas de cinta decorativa de 25 metros de largo y una de 10 metros. Si hizo 10 lazos iguales, ¿cuál polinomio representa la cantidad de cinta que usó en cada uno?

## 1.6 Multiplicación de un monomio por un monomio



### Problema

¿Cuál monomio representa el área del siguiente rectángulo?

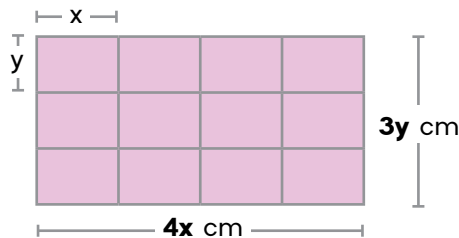


### Solución

El área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura; por lo tanto, en este caso el área es  $3y \cdot 4x$ .

Sin embargo, como se desea expresar el área como un monomio, se realiza el siguiente análisis:

- Se divide el rectángulo en rectángulos más pequeños de  $y$  cm de altura y  $x$  cm de base. Así:



- De esa manera, el área de cada rectángulo pequeño es de  $x \cdot y = xy$ .
- Al contar la cantidad de rectángulos pequeños que se obtuvieron en total, se determina que son 12. Por lo tanto, el área total del rectángulo grande es igual que 12 veces el área de un rectángulo pequeño; es decir:

$$12 \cdot xy = 12xy$$

De lo anterior se deduce que  $3y \cdot 4x = 12xy$ , pues las dos expresiones corresponden al área del mismo rectángulo.

Forma grupos.

1. Investiguen alguno de los matemáticos más recientes que han realizado aportes importantes al desarrollo del álgebra.
2. Indican los años en que vivió, su país de origen, a lo que se dedicaban y aportes al álgebra.
3. Compartan con la clase los resultados de la investigación.



### Recuerda

En un monomio al número que antecede a las variables se le llama coeficiente numérico, y a las variables, factor literal. Por ejemplo, en  $-5x^2y$ , el coeficiente numérico es  $-5$  y el factor literal es  $x^2y$ .



## Recuerda

La ley de potencias para la multiplicación de potencias con bases iguales es la misma que se aplica con los números naturales. Por ejemplo:

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{(2+3)} = 4^5$$

## Conclusión

Para **multiplicar monomios** se multiplican los coeficientes numéricos de los monomios y luego se multiplican los factores literales, considerando siempre las leyes de signos. Por ejemplo:  $-2x \cdot 5y = (-2 \cdot 5) \cdot (x \cdot y) = -10xy$

Al multiplicar variables iguales se aplica la ley de potencias que establece que al multiplicar potencias con bases iguales se mantiene la base y se suman los exponentes. Por ejemplo:

- $x^2 \cdot x^3 = x^{(2+3)} = x^5$
- $y^5 \cdot y = y^{(5+1)} = y^6$
- $a \cdot a = a^{(1+1)} = a^2$



## ¡Atención!

Cuando en una variable no se indica el exponente, es porque este es 1.



## ¿Qué pasaría?

Si las bases no son iguales es incorrecto aplicar la ley de potencias. Por ejemplo, al multiplicar  $x^2 \cdot y^3$  solamente se indica el producto así  $x^2y^3$ , pues sería incorrecto sumar sus exponentes.

## Observa cómo se hace

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios.

- $2b \cdot -5b^2 = (2 \cdot -5) \cdot (b \cdot b^2) \rightarrow$  Multiplicar coeficientes y variables.  
 $= -10b^3 \rightarrow$  Ley de potencias ( $b \cdot b^2 = b^{1+2} = b^3$ ).
- $-x^2 \cdot -3y^3 = (-1 \cdot -3) \cdot (x^2 \cdot y^3) \rightarrow$  Multiplicar coeficientes y variables.  
 $= 3x^2y^3 \rightarrow$  No se aplica la ley de potencias.
- $pqr \cdot 2q^3r = (1 \cdot 2) \cdot (pqr \cdot q^3r) \rightarrow$  Multiplicar coeficientes y variables.  
 $= 2pq^4r^2 \rightarrow$  Ley de potencias ( $q \cdot q^3 = q^4$ ) y ( $r \cdot r = r^2$ ).

## Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomios.

a.  $5x \cdot 6y$

b.  $9x \cdot 4x^3$

c.  $2xy \cdot y^5$

d.  $8b \cdot -4a$

e.  $-9a^2 \cdot a^3$

f.  $-m^2n^3 \cdot 10m^2p$

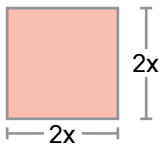
g.  $-7m \cdot -3n$

h.  $-6ab \cdot -8a^2b$

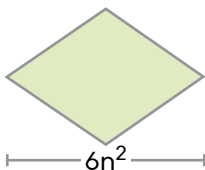
i.  $15a^2bc^3 \cdot -2ab^2c$

2. Expresa el área de cada figura mediante un solo monomio.

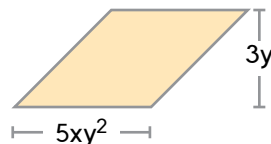
a. Cuadrado



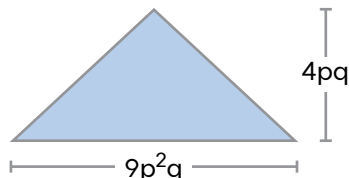
b. Rombo



c. Romboide



d. Triángulo



## ¡Atención!

Área de un cuadrado:  
lado  $\cdot$  lado

Área de un romboide:  
base  $\cdot$  altura

Área de un rombo:  
 $\frac{\text{Diag mayor} \cdot \text{diag menor}}{2}$

Área de un triángulo:  
 $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

## 1.7 Multiplicación de un monomio por un polinomio

### Problema

Si la base del rectángulo de la imagen mide 5 cm más que su altura, ¿cuál polinomio representa el área de esa figura?



### Solución

A partir de la figura se observa que la altura mide  $2x$  cm; por lo tanto, si la base mide 5 cm más, entonces se representa con la expresión  $2x + 5$ . De esta manera, el área se determina al multiplicar la base por la altura:

$$\text{Área: } 2x \cdot (2x + 5)$$

- Para calcular el resultado de la multiplicación anterior se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$\begin{aligned} 2x \cdot (2x + 5) &= (2x \cdot 2x) + (2x \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 2) \cdot (x \cdot x) + (2 \cdot 5) \cdot x \\ &= 4x^2 + 10x \end{aligned}$$

### Conclusión

Para **multiplicar un monomio por un polinomio** se dan los siguientes pasos:

- Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación, indicando el producto del monomio por cada uno de los términos del polinomio. Por ejemplo:

$$a \cdot (b + c + d) = (a \cdot b) + (a \cdot c) + (a \cdot d)$$

- Luego, se resuelven las multiplicaciones entre monomios según lo aprendido en la clase anterior, considerando las leyes de signos y la ley de potencias para multiplicaciones con bases iguales.
- Al extraer los resultados de los paréntesis se debe tener en cuenta el signo obtenido en cada coeficiente numérico para indicar la operación que corresponda entre los términos.



### Recuerda

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma establece, que el producto de un factor por una suma es igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el factor por cada uno de los sumandos.



### ¿Qué pasaría?

Es importante tomar en cuenta que el producto final tendrá la misma cantidad de términos que el polinomio por el cual se multiplica; es decir, si el polinomio tiene dos términos, el resultado también tendrá dos términos; si tiene tres términos, el producto tendrá tres términos, y así sucesivamente.



## Recuerda

Un polinomio de dos términos también se llama **binomio**, y uno de tres términos, **trinomio**.

## Observa cómo se hace

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios por polinomios.

- a.**  $2x \cdot (3x^2 - 5y)$   
 $= (2x \cdot 3x^2) + (2x \cdot -5y) \rightarrow$  Multiplica el monomio por cada término.  
 $= (6x^3) + (-10xy) \rightarrow$  Calculan el producto entre los monomios.  
 $= 6x^3 - 10xy \rightarrow$  Elimina los paréntesis considerando los signos.
- b.**  $-4ab \cdot (2a - 3b + 5ab)$   
 $= (-4ab \cdot 2a) + (-4ab \cdot -3b) + (-4ab \cdot 5ab) \rightarrow$  Propiedad distributiva.  
 $= (-8a^2b) + (12ab^2) + (-20a^2b^2) \rightarrow$  Multiplica los monomios entre sí.  
 $= -8a^2b + 12ab^2 - 20a^2b^2 \rightarrow$  Elimina los paréntesis.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Resuelve las siguientes multiplicaciones de un monomio por un polinomio.
 

<b>a.</b> $2x \cdot (2y + 4w)$	<b>f.</b> $8a \cdot (5b - 4c)$
<b>b.</b> $6w \cdot (w + 2w^2)$	<b>g.</b> $x \cdot (-3x^2 - 9xy)$
<b>c.</b> $-4a^2b \cdot (2a^3b + 7ab^3)$	<b>h.</b> $3m \cdot (2m + 3p + q)$
<b>d.</b> $2xy \cdot (2x - 5y + 9)$	<b>i.</b> $-2a^2 \cdot (-3a + 5b - 2c)$
<b>e.</b> $7p^2q^3 \cdot (2p + 5q^2 - 6)$	<b>j.</b> $-5xy^2z \cdot (2xy - 8yz^3 - 10x^4z)$
- Determina cuál monomio se debe anotar en el recuadro para que cada expresión sea correcta.
 

<b>a.</b> $\boxed{?} \cdot (2x + 1) = 6x^2 + 3x$	<b>d.</b> $\boxed{?} \cdot (2x + y + 1) = 2x^2 + xy + x$
<b>b.</b> $\boxed{?} \cdot (ab + 2) = 4a^3b^3 + 8a^2b^2$	<b>e.</b> $\boxed{?} \cdot (y^2 - y + 2) = 5y^3 - 5y^2 + 10y$
<b>c.</b> $\boxed{?} \cdot (7 + 2n) = -21m - 6mn$	<b>f.</b> $\boxed{?} \cdot (3p + 8q - 1) = -6p^2 - 16pq + 2p$
- Plantea una multiplicación que permita solucionar cada problema y resuelve.
  - Si la base de un rectángulo mide  $2x^2$  cm y su altura mide 8 cm menos que su base, ¿cuál binomio representa el área de esa figura?
  - Si la base de un triángulo se representa con la expresión  $4y^2 - 2y + 1$  y la altura correspondiente con el monomio  $8y$ , ¿Cuál polinomio representa el área de ese triángulo?
  - Para organizar las sillas en un salón de eventos las colocan en filas y columnas. Si la cantidad de filas se representa con la expresión  $6x$  y se sabe que hay 5 columnas más que filas, ¿cuál binomio representa la cantidad total de sillas que hay en el salón?

## 1.8 Multiplicación de expresiones algebraicas

### Problema

¿De qué manera se puede representar la expresión del recuadro de abajo utilizando un solo polinomio?

El producto de un número aumentado en 5 por el doble de ese mismo número disminuido en 8.

### Solución

Primero se transforma la expresión dada en lenguaje matemático; para eso se utiliza una letra para representar la cantidad desconocida. En este caso usaremos la letra **n**.

- Un número aumentado en 5.  $\rightarrow n + 5$
- El doble del número disminuido en 8.  $\rightarrow 2n - 8$
- El producto de las expresiones anteriores.  $\rightarrow (n + 5)(2n - 8)$

Para convertir la expresión anterior en un solo polinomio se debe resolver la multiplicación. Para eso se multiplica el primer término de la primera expresión por cada uno de los términos de la segunda. Luego, se realiza el mismo procedimiento con el segundo término.

$$(n + 5) \cdot (2n - 8) = (2n^2 - 8n) + (10n - 40)$$

Se suman las expresiones anteriores y se reducen los términos semejantes.

$$(2n^2 - 8n) + (10n - 40) = 2n^2 + 2n - 40$$

Así,  $(n + 5)(2n - 8) = 2n^2 + 2n - 40$ .

### Conclusión

Para multiplicar un polinomio por un polinomio se dan los siguientes pasos:

- Se multiplica el primer término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio; luego el segundo término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y así sucesivamente con todos los términos, respetando siempre las leyes de signos.
- Se reducen los términos semejantes en la expresión obtenida luego de realizar todos los productos.

### Ejemplo

$$(x + y) \cdot (a + b + c)$$



### Recuerda

Cuando una expresión en lenguaje común se manifiesta mediante el uso de letras, números y operaciones, se dice que se transforma en lenguaje matemático.



## ¿Qué pasaría?

Observa que al multiplicar los términos de un polinomio por los del otro polinomio siempre se indica una suma entre los productos y se considera el signo como parte del término. Esto se hace para evitar errores con los signos, pues si se anota la operación resta y también se considera el signo negativo del término, se estaría aplicando dos veces el mismo signo y esto generaría un error.

## Observa cómo se hace

Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios por polinomios.

a.  $(3x - 2y) \cdot (-5x + 2y)$

Se multiplica **3x** por cada término del segundo polinomio y se suma con el producto de **-2y** por cada término del segundo polinomio.

$$\begin{aligned} (3x - 2y) \cdot (-5x + 2y) &= (3x \cdot -5x + 3x \cdot 2y) + (-2y \cdot -5x + -2y \cdot 2y) \\ &= (-15x^2 + 6xy) + (10xy - 4y^2) \rightarrow \text{Se multiplica.} \\ &= -15x^2 + (6xy + 10xy) - 4y^2 \rightarrow \text{Se agrupan.} \\ &= -15x^2 + 16xy - 4y^2 \rightarrow \text{Se reducen los} \\ &\quad \text{términos semejantes.} \end{aligned}$$

b.  $(2a + b) \cdot (a + 5b - 3)$

Se multiplica **2a** por cada término del segundo polinomio y se suma con el producto de **b** por cada término del segundo polinomio.

$$\begin{aligned} (2a + b) \cdot (a + 5b - 3) &= (2a \cdot a + 2a \cdot 5b + 2a \cdot -3) + (b \cdot a + b \cdot 5b + b \cdot -3) \\ &= (2a^2 + 10ab - 6a) + (ab + 5b^2 - 3b) \rightarrow \text{Se multiplican los monomios.} \\ &= 2a^2 + (10ab + ab) - 6a + 5b^2 - 3b \rightarrow \text{Se agrupan semejantes.} \\ &= 2a^2 + 11ab - 6a + 5b^2 - 3b \rightarrow \text{Se reducen semejantes.} \end{aligned}$$

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes multiplicaciones de un polinomio por un polinomio.

a.  $(x + 1) \cdot (2x + 3)$

b.  $(5 - 2p) \cdot (p + 6)$

c.  $(2n + 2) \cdot (n^2 + 3n + 2)$

d.  $(10 - x^2) \cdot (3x^2 - 5x + 1)$

e.  $(a + b + c) \cdot (a + b + c)$

f.  $(m + n) \cdot (4m - 2n)$

g.  $(-3x^2 + 5) \cdot (-4x - 1)$

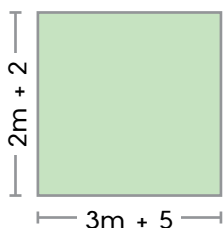
h.  $(q - 8) \cdot (5r + 2t - 3)$

i.  $(y + x) \cdot (y^2 + xy + y^2)$

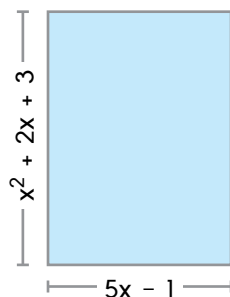
j.  $(5x^2 + 2x + 4) \cdot (x^2 - 3x - 2)$

2. Expresa el área de cada figura mediante un solo polinomio.

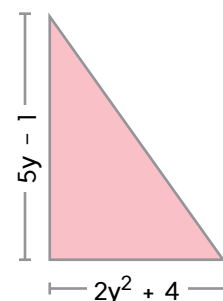
a. Cuadrado



b. Rectángulo



c. Triángulo



## 1.9 División de un monomio entre un monomio

### Problema

Si una cuerda que mide  $45x$  metros de largo se divide en trozos de  $5x$  metros cada uno, ¿cuántos trozos de cuerda se obtienen?

### Solución

Se plantea la división que permite dar solución al problema.

$$45x \div 5x$$

Luego, se plantea la división en forma de fracción y se dividen los números entre sí y las variables entre sí.

$$\frac{45x}{5x} \rightarrow \text{Se divide } (45 \div 5 = 9) \text{ y } (x \div x = x^0 = 1).$$

$$\text{Entonces } \frac{45x}{5x} = 9 \cdot 1 = 9.$$

Por lo tanto, se obtienen 9 trozos de cuerda.

### Conclusión

Para **dividir un monomio entre un monomio** se plantea la operación en forma fraccionaria y se dan los siguientes pasos:

- Se considera la fracción que se obtiene con los coeficientes numéricos y se simplifica al máximo.
- Si las variables del numerador y del denominador son distintas, se conservan y se colocan con los valores numéricos de la fracción simplificada. Por ejemplo:

$$6x \div 8y = \frac{6x}{8y} = \frac{3x}{4y} \rightarrow \text{Se simplificó } \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

- Si hay variables en común en el numerador y en el denominador, estas se simplifican aplicando la ley de potencias para divisiones con bases iguales. En estos casos se restan los exponentes de las variables iguales y se coloca el resultado en donde se ubicaba el mayor exponente. Por ejemplo:

$$- \frac{x^5 y}{x^2 z} = \frac{x^3 y}{z} \rightarrow \text{Se aplicó } x^5 \div x^2 = x^{(5-2)} = x^3.$$

Se coloca en el numerador porque ahí estaba  $x^5$ .  
Las variables distintas se mantienen.

$$- \frac{3n^3}{5n^6} = \frac{3}{5n^3} \rightarrow \text{Se aplicó } n^3 \div n^6 = n^{(3-6)} = n^{-3} = \frac{1}{n^3}$$

Se coloca en el denominador porque ahí estaba  $n^6$ .  
La parte numérica no se podía simplificar.



### Recuerda

La regla de potencias para divisiones con bases iguales establece que se mantiene la base y se restan los exponentes. Por ejemplo, con números se tiene que  $10^5 \div 10^2 = 10^{(5-2)} = 10^3$ . Y con variables funciona igual, por ejemplo:  $x^5 \div x^2 = x^{(5-2)} = x^3$ . Además, recuerda que cualquier potencia de exponente 0 es igual a 1.



### ¿Qué pasaría?

Cuando se divide un monomio entre él mismo, el resultado siempre es 1. Sucede así, porque al aplicar la ley de potencia se obtienen potencias de exponente 0. Ejemplo:

$$\frac{x^2}{x^2} = x^{(2-2)} = x^0 = 1$$

De la misma manera se deducen resultados como los siguientes:

$$\frac{ab}{ab} = 1$$

$$\frac{2x}{2x} = 1$$

$$\frac{xy^2}{xy^2} = 1$$



## ¿Qué pasaría?

Observa que en el primer ejemplo, la variable **a** se elimina del todo porque posee el mismo exponente en el numerador que en el denominador, esto sucederá siempre que se presente ese caso. Es decir, al tener la misma variable con el mismo exponente en el numerador y en el denominador, esta se elimina completamente.

## Observa cómo se hace

Realiza las siguientes divisiones de monomio entre monomio.

a.  $12ab^2 \div 10ab = \frac{12ab^2}{10ab} \rightarrow$  Se plantea en forma de fracción.  
 $= \frac{\cancel{1}2ab^2}{\cancel{1}0ab} \rightarrow$  Se simplifica  $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ .  
 $= \frac{6ab^2}{5ab} \rightarrow$  Se dividen las variables iguales.  
 $= \frac{6b}{5} \rightarrow$  Se elimina la **a** y la **b**<sup>1</sup> se coloca arriba.

b.  $36x^2y^4z \div -9x^4y^2 = \frac{36x^2y^4z}{-9x^4y^2} \rightarrow$  Se plantea en forma de fracción.  
 $= \frac{\cancel{3}6x^2y^4z}{\cancel{-}9x^4y^2} \rightarrow$  Se simplifica  $\frac{36}{-9} = -\frac{4}{1}$ .  
 $= \frac{-4x^2y^4z}{x^4y^2} \rightarrow$  Se dividen las variables iguales.  
 $= \frac{-4y^2z}{x^2} \rightarrow$  **y**<sup>2</sup> arriba, **x**<sup>2</sup> abajo y se mantiene la **z**.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Aplica la propiedad de potencias de bases iguales para simplificar las siguientes expresiones.

a.  $\frac{a^4}{a^2}$

d.  $\frac{pq}{p^3q^2}$

g.  $\frac{n^2m^5}{n^6m}$

b.  $\frac{x^2y}{x}$

e.  $\frac{b^6}{b^9}$

h.  $\frac{a^4b^2}{a^4b}$

c.  $\frac{m^3}{m^3}$

f.  $\frac{y^3}{xy}$

2. Simplifica la parte numérica y las variables en las siguientes fracciones.

a.  $\frac{6x^2}{4x}$

d.  $\frac{10y}{5y^3}$

g.  $\frac{5a}{25ab}$

b.  $\frac{8pq}{10pr}$

e.  $\frac{7m^3}{7m}$

h.  $\frac{32xy^2}{32xy^2}$

c.  $\frac{24x^5y}{6xy^6}$

f.  $\frac{3a^2bc}{2ab^2c^2}$

i.  $\frac{18pq^3}{24pq}$

3. Resuelve las siguientes divisiones de monomio entre monomio.

a.  $6a^2 \div 4a$

g.  $25x^5 \div 5x^8$

b.  $7m^3 \div 21m$

h.  $-15x^5 \div 10x^2$

c.  $-8q^6 \div -6q^9$

i.  $18x \div 6xy$

d.  $12x^2y \div 6xy^2$

j.  $-4ab^3 \div 5a^2b$

e.  $-5mn \div -3m^8$

k.  $42x^2yz^3 \div 30x^5yz$

f.  $-2abc^3 \div -2abc^3$

l.  $18m^2np \div 9mn^2p^2$



## ¡Atención!

Cuando el resultado en la simplificación es una sola variable que se ubica en el numerador, no es necesario colocar el 1 en el denominador. Por el contrario, si es una única variable y se ubica en el denominador, sí se debe colocar el 1 en el numerador. Por ejemplo:

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3, \text{ pero } \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}.$$



## ¡Atención!

Cuando uno o ambos coeficientes numéricos de los monomios son negativos, aplica la ley de signos para determinar si el resultado es positivo o negativo.

## 1.10 División de polinomios entre monomios

### Problema

Si el área del rectángulo mostrado abajo se representa con el polinomio  $6x^3 + 2x^2 + 10x$ , ¿cuál polinomio representa la medida de su base?



### Solución

Según el enunciado y la figura se tienen los siguientes datos:

$$\text{Área: } 6x^3 + 2x^2 + 10x$$

$$\text{Altura: } 2x$$

Además, se sabe que para calcular el área **A** de un rectángulo se utiliza la fórmula  $A = \text{Base} \cdot \text{Altura}$ . Por lo tanto, si se conoce el área y la altura, se puede determinar la base aplicando la relación entre el producto y la división, de la siguiente manera:

$$\text{Base} = A \div \text{Altura}$$

De esta forma, se utilizan los datos conocidos y se obtiene lo siguiente:

$$\text{Base} = (6x^3 + 2x^2 + 10x) \div (2x)$$

Para resolver esta división se divide cada término del polinomio entre el monomio, según lo aprendido en la clase anterior.

- $6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x} = 3x^2$
- $2x^2 \div 2x = \frac{2x^2}{2x} = x$
- $-10x \div 2x = \frac{-10x}{2x} = -5$

Luego, se escribe el polinomio considerando el signo de los cocientes obtenidos. Este corresponderá a la medida de la base del rectángulo.

$$\text{Base} = 3x^2 + x - 5$$

### Conclusión

Para **dividir un polinomio entre un monomio**, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, siguiendo el procedimiento de división de monomio entre monomio y respetando siempre las leyes de signos para la división.



### Recuerda

La división es la operación inversa de la multiplicación. Por ejemplo, si  $a \cdot b = c$ , también se cumplen las siguientes relaciones:

$$c \div a = b$$

$$c \div b = a$$

### Ejemplo

$$\begin{aligned} (a + b + c) \div x \\ = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} \end{aligned}$$



## ¿Qué pasaría?

Al dividir dos monomios con coeficiente numérico de diferentes signos, el resultado de la división será negativo, por la ley de signos para la división. Además, si la operación indicada es una resta, esta se convierte en suma al aplicar la propiedad de la suma del opuesto, como sucede en el último paso del ejemplo **a**.

## Observa cómo se hace

Realiza las siguientes divisiones de polinomio entre monomio.

**a.**  $(15a^4b^2 - a^2b) \div (-5a^2b^3)$

$$= \frac{15a^4b^2}{-5a^2b^3} - \frac{a^2b}{-5a^2b^3} \rightarrow \text{Se divide cada término del polinomio entre el monomio.}$$

$$= \frac{-3a^2}{b} - \left(\frac{-1}{5b^2}\right) \rightarrow \text{Se realizan las divisiones de monomios.}$$

$$= -\frac{3a^2}{b} + \frac{1}{5b^2} \rightarrow \text{Se suma el opuesto.}$$

**b.**  $(6x^2 - 8x + 4) \div (6x)$

$$= \frac{6x^2}{6x} - \frac{8x}{6x} + \frac{4}{6x} \rightarrow \text{Se divide cada término entre el monomio.}$$

$$= x - \frac{4}{3} + \frac{2}{3x} \rightarrow \text{Se realizan las divisiones de monomios.}$$

## Práctica

Trabaja en tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes divisiones de polinomio entre monomio.

**a.**  $(x^4 + x^2) \div (x)$

**b.**  $(12m^4 + 15m^3) \div (-3m^2)$

**c.**  $(18b^6a^2 - 6b^4a^3) \div (12b^2a^4)$

**d.**  $(x^6 + x^3 - 1) \div (x^4)$

**e.**  $(9p^4 - 6p^2 - 8p) \div (3p^3)$

**f.**  $(4x^3 + 2x^2 - 5x + 6) \div (2xy)$

**g.**  $(4a^5 - 8a^2) \div (2a^3)$

**h.**  $(7p^5 - 8p) \div (3p^3)$

**i.**  $(-20x^3y^5z + 10x^5y^2z^2) \div (-15x^2y^4z^4)$

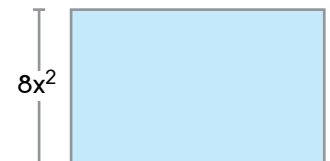
**j.**  $(4m^2 + 3m + 6) \div (2m^2)$

**k.**  $(5x^2y + 10xy^3 - x^5y) \div (-5x^4y^2)$

**l.**  $(y^5 - 4y^3 + 8y - 10) \div (-6y^2)$

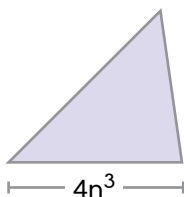
2. Plantea cada situación con una división de polinomio entre monomio y resuelve.

**a.** Si el área del rectángulo de la imagen se representa con la expresión  $12x^4 + 4x^2 - 8$ , ¿cuál polinomio representa la medida de la base de esa figura?



**b.** El largo de un cuerda se representa con la expresión  $6m^2 + 9$ . Si se corta en una cantidad  $m$  de trozos iguales, ¿cuál polinomio representa la medida que tendrá cada uno?

**c.** Si el área del triángulo de la imagen se representa con la expresión  $8n^4 + 4n^2 - 2n$ , ¿cuál polinomio representa la medida de la altura de esa figura?



## 1.11 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Copia la tabla en tu cuaderno y completa.

Monomio	Coficiente numérico	Factor literal	Grado absoluto	Monomio semejante
$5x^2y$				
$-10ab^5$				
$\frac{2mn}{3}$				
$-\frac{p^3qr^4}{5}$				

2. Indica la cantidad de términos de cada expresión y clasificalas en monomios y en polinomios.

$5xyz + 2t^2$

$6ab - 6st^2$

$3xyz$

$5x^4 + 7z^3 - 21xz$

$-18m^2n$

$1 - 2pq^2$

$7 - 4x + x^2 - 2y$

3. Asocia cada operación de la columna izquierda con su respectivo resultado de la columna derecha. Indica la letra de la operación y el número que corresponde al resultado. Por ejemplo: A  $\rightarrow$  3.

A.  $(5xy - 5y^2) + (-8xy + 8y^2)$

B.  $(5xy - 5y^2) - (-8xy + 8y^2)$

C.  $3x \cdot (10y - 2y^2)$

D.  $2 \cdot (6x + 5x^2 + 1)$

E.  $(6x + 10x^2 + 2) \div 2$

F.  $(2x + 3) \cdot (3x - 2)$

G.  $25x^2y^4 \div 5x^2y^2$

H.  $(12x^2y - 18xy) \div -6xy$

1.  $6x^2 + 5x - 6$

2.  $3x + 5x^2 + 1$

3.  $-3xy + 3y^2$

4.  $13xy - 13y^2$

5.  $12x + 10x^2 + 2$

6.  $-2x + 3$

7.  $5y^2$

8.  $30xy - 6xy^2$

4. Plantea cada situación con una operación de expresiones algebraicas y resuelve.

a. Las ganancias diarias en una empresa se calculan con la expresión  $25n - 18$ . ¿Con cuál expresión se representan las ganancias de 5 días?b. Eduardo compró 5 libros y 8 cuadernos, mientras que Laura compró 4 libros y 5 cuadernos. Si cada libro les cuesta  $m$  balboas y cada cuaderno,  $n$  balboas, ¿cuál binomio representa el total que pagaron entre ambos?

# Potenciación y radicación con expresiones algebraicas

## 2.1 Repasa tus conocimientos

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala.

Potenciación	Base	Exponente	Potencia
$3^4$			
$5^3$			
$(-4)^2$			
$(-10)^5$			

2. Expresa cada multiplicación en forma de potenciación.

a.  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

c.  $-1 \cdot -1 \cdot -1$

e.  $8 \cdot 8$

b.  $-4 \cdot -4 \cdot -4 \cdot -4 \cdot -4 \cdot -4$

d.  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

f.  $-6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6$

3. Expresa cada potenciación en forma de multiplicación.

a.  $(-4)^5$

c.  $6^3$

e.  $(-5)^6$

b.  $9^8$

d.  $(-12)^4$

f.  $(-7)^7$

4. Determina el resultado de cada potenciación.

a.  $(-2)^0$

d.  $(-7)^1$

g.  $15^1$

b.  $1^1$

e.  $(-4)^0$

h.  $(-11)^0$

c.  $3^0$

f.  $(-10)^1$

i.  $(-21)^1$

5. Expresa el resultado de cada operación como una sola potenciación.

a.  $2^2 \cdot 2^3$

d.  $15^3 \cdot 15^6$

g.  $(-3)^2 \cdot (-3)^2$

b.  $(-1)^4 \cdot (-1)^3$

e.  $(-10)^0 \cdot (-10)^8$

h.  $4^7 \div 4^5$

c.  $12^3 \div 12^2$

f.  $(-5)^6 \div (-5)^2$

i.  $(-13)^1 \div (-13)^1$

6. Descompón los siguientes números en factores primos.

a. 12

d. 25

g. 48

b. 32

e. 40

h. 56

c. 100

f. 64

i. 49

7. Calcula el resultado de las siguientes radicaciones.

a.  $\sqrt{4}$

d.  $\sqrt{16}$

g.  $\sqrt{36}$

b.  $\sqrt{64}$

e.  $\sqrt[3]{27}$

h.  $\sqrt{100}$

c.  $\sqrt{81}$

f.  $\sqrt[3]{216}$

i.  $\sqrt[4]{256}$



### Recuerda

El resultado de cualquier número elevado a la cero es 1 y elevado a la 1, es el mismo número.



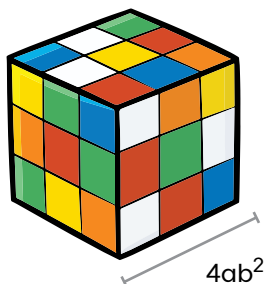
### ¡Atención!

En las multiplicaciones de igual base, suma los exponentes y en las divisiones, réstalos.

## 2.2 Potenciación con expresiones algebraicas

### Problema

¿Mediante cuál expresión algebraica se puede representar el volumen del siguiente cubo?



### Solución

En el cubo de la imagen se indica que la arista mide  $4ab^2$ . Por lo tanto, el volumen de ese cubo se puede calcular multiplicando tres veces la expresión  $4ab^2$ .

$$\text{Volumen} = 4ab^2 \cdot 4ab^2 \cdot 4ab^2$$

Para resolver el producto anterior, se multiplica primero  $4ab^2 \cdot 4ab^2$  y el resultado se multiplica de nuevo por  $4ab^2$ . Así:

$$4ab^2 \cdot 4ab^2 = 16a^2b^4$$

$$16a^2b^4 \cdot 4ab^2 = 64a^3b^6$$

Por lo tanto, el volumen del cubo se representa con la expresión  $64a^3b^6$ . Sin embargo, el volumen del cubo también se puede calcular elevando al cubo la medida de su arista; por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\text{Volumen} = (4ab^2)^3$$

A partir de los dos resultados anteriores, se deduce que:

$$(4ab^2)^3 = 64a^3b^6$$

### Conclusión

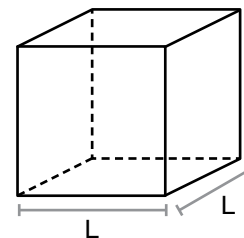
Las **potenciaciones con expresiones algebraicas** cumplen las mismas propiedades de las potenciaciones con números reales.

- **Potencia de exponente 1:** Siempre que el exponente sea 1, el resultado será igual que la base. Por ejemplo:  $(2x)^1 = 2x$ .



### Recuerda

El volumen **V** de un cubo se obtiene al multiplicar tres veces la medida de su arista; es decir, elevar la arista al cubo.



$$V = L \cdot L \cdot L = L^3$$



### ¿Qué pasaría?

Las potenciaciones con expresiones algebraicas se interpretan de la misma manera que una potenciación de números reales. Es decir, el exponente indica la cantidad de veces que se multiplica la base por sí misma.



## ¿Qué pasaría?

Para determinar el inverso multiplicativo de expresiones algebraicas se usa un método similar al usado con números. Si se tiene una fracción, se invierte el numerador con el denominador. Si la expresión algebraica no es una fracción, la misma se coloca como denominador y un 1 en el numerador. Ejemplo, el inverso multiplicativo de  $\frac{y}{x}$  es  $\frac{x}{y}$  y el inverso multiplicativo de  $2x$  es  $\frac{1}{2x}$ .

- **Potencia de exponente 0:** Siempre que el exponente sea 0, el resultado será 1. Por ejemplo:  $(4a^2)^0 = 1$ .
- **Potencia de un producto:** La potencia de un producto es igual al producto de la potencia de cada factor. Por ejemplo:  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ .
- **Potencia de un cociente:** Es igual al cociente de la potencia del dividendo entre la del divisor. Ejemplo:  $\left(\frac{3m^3}{2n}\right)^2 = \frac{(3m^3)^2}{(2n)^2}$ .
- **Producto de potencias de bases iguales:** Al multiplicar dos potencias de igual base se mantiene la base y se suman los exponentes. Por ejemplo:  $(3x^2)^2 \cdot (3x^2)^5 = (3x^2)^{2+5} = (3x^2)^7$ .
- **División de potencias de bases iguales:** Al dividir dos potencias de igual base se mantiene la base y se restan los exponentes. Por ejemplo:  $(2ab)^8 \div (2ab)^4 = (2ab)^{8-4} = (2ab)^4$ .
- **Potencia de una potencia:** Si una potencia está elevado a otra potencia se mantiene la base y se multiplican los exponentes. Ejemplo:  $(x^2)^3 = x^2 \cdot 3 = x^6$ .
- **Potencia con exponente negativo:** Una potencia con exponente negativo es igual a la potencia del inverso multiplicativo, con el mismo exponente, pero positivo. Por ejemplo:  $(5m)^{-2} = \left(\frac{1}{5m}\right)^2$ .

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



- Determina el valor de cada potencia.
 

a. $(2x)^1$	c. $(3ab)^0$	e. $(5m^2)^0$
b. $(3p^2q)^1$	d. $\left(\frac{2x}{y}\right)^1$	f. $\left(\frac{m^2}{5n}\right)^1$
- Separa cada potencia como el producto de las potencias de cada factor. Observa el ejemplo.
 

a. $(3ab^2)^3 = 3^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3$	c. $(2m)^2$	e. $(5pq)^4$
b. $(8x^2)^5$	d. $(y^3z)^4$	f. $(11abc)^3$
- Separa cada potencia como el cociente de las potencias de cada término. Observa el ejemplo.
 

a. $\left(\frac{2x}{3a}\right)^4 = \frac{(2x)^4}{(3a)^4}$	b. $\left(\frac{xy}{2z}\right)^5$	c. $\left(\frac{3n^2}{4m}\right)^2$
---	-----------------------------------	-------------------------------------
- Convierte cada expresión en una sola potencia utilizando las leyes de potencias de la multiplicación y de la división con bases iguales.
 

a. $x^2 \cdot x^4$	c. $(3n)^3 \cdot (3n)^5$	e. $(2pq^2)^4 \cdot (2pq^2)$
b. $a^6 \div a^3$	d. $(5p)^3 \div (5p)$	f. $(8x^2y)^3 \div (8x^2y)^2$
- Calcula las siguientes potencias aplicando las propiedades. Observa el ejemplo.
 

a. $(3y^2)^3 = 3^3 \cdot (y^2)^3 = 27y^6$	c. $(x^3)^4$	e. $(m^2n^3)^5$
b. $(4x^2)^2$	d. $(5p^3)^3$	f. $(10a^2b^6)^3$
- Transforma cada expresión a una potencia de exponente positivo. Observa el ejemplo.
 

a. $\left(\frac{5x}{4y}\right)^{-3} = \left(\frac{4y}{5x}\right)^3$	b. $(8m)^{-5}$	c. $\left(\frac{2p^3}{3q}\right)^{-2}$
---	----------------	--

## 2.3 La radicación con expresiones algebraicas

### Problema

1. ¿Cuál resultado se obtiene al simplificar el siguiente radical  $\sqrt[3]{125m^6}$ ?

### Solución

1. Para resolver el problema se utilizan las propiedades de la radicación y la potenciación aprendidas en clases anteriores:

$$\sqrt[3]{125m^6} =$$

$$\sqrt[3]{5^3 \cdot m^6} = \longrightarrow \text{Expresa } 125 \text{ en sus factores primos.}$$

$$\sqrt[3]{5^3 \cdot m^3 \cdot m^3} = \longrightarrow \text{Expresa } m^6 \text{ como factores de exponente } 3.$$

$$\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{m^3} \cdot \sqrt[3]{m^3} = \longrightarrow \text{Usa la propiedad de multiplicación de radicales.}$$

$$5 \cdot m \cdot m = \longrightarrow \text{Simplifica los radicales.}$$

$$5m^2 \longrightarrow \text{Multiplica el factor literal.}$$



### ¡Atención!

Si el índice y el exponente de la potencia son iguales, al simplificar se aplica:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

### Conclusión

Un radical está simplificado al máximo si:

- Los exponentes del subradical factorizado son menores que el índice.
- El índice y los exponentes del subradical no tienen divisores en común.
- El subradical es positivo.

Al simplificar una expresión como  $\sqrt[3]{\frac{54x^3}{64y^4}}$  se realizan estos pasos:

$$\sqrt[3]{\frac{54x^3}{64y^4}} = \frac{\sqrt[3]{54x^3}}{\sqrt[3]{64y^4}} \longrightarrow \text{Se usa la propiedad de la división de radicales.}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^3 x^3}}{\sqrt[3]{2^6 y^4}} \longrightarrow \text{Se factorizan los coeficientes numéricos.}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot x^3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot y^3 \cdot y^1}} \longrightarrow \text{Se expresa el factor literal como potencias de exponente igual al índice, en lo posible.}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot x^3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot y^3 \cdot 3 \cdot y}} \longrightarrow \text{Se usa la propiedad de la multiplicación de radicales.}$$

$$= \frac{3x \sqrt[3]{2}}{2 \cdot 2 \cdot y \sqrt[3]{y}} \longrightarrow \text{Se simplifica al máximo.}$$

$$= \frac{3x}{4y} \sqrt[3]{\frac{2}{y}} \longrightarrow \text{Se resuelven las operaciones y se usa la propiedad de la división de radicales.}$$



### Recuerda

En la multiplicación de potencias de igual base se conserva la base y se suman los exponentes por ello:

$$y^4 = y^3 \cdot y^1$$



## 1. Simplifica los siguientes radicales al máximo.

- Escribe los resultados en el cuaderno.

a.  $\sqrt[3]{27} =$

d.  $\sqrt[3]{250} =$

g.  $\sqrt{720} =$

b.  $\sqrt[3]{8} =$

e.  $\sqrt{98} =$

h.  $3\sqrt[3]{2^6 \cdot 9^4} =$

c.  $\sqrt{12} =$

f.  $\sqrt{100} =$

i.  $-\frac{2}{5} \sqrt[3]{\frac{125}{4}} =$

## 2. Simplifica las siguientes expresiones literales al máximo.

- Escribe los resultados en el cuaderno.

a.  $\sqrt[3]{x^3} =$

d.  $\sqrt[3]{p^4 q} =$

g.  $\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^6}} =$

b.  $\sqrt{m^4} =$

e.  $\sqrt[3]{r^3 s^2} =$

h.  $\sqrt{20p^2 q^3} =$

c.  $\sqrt[3]{x^3 y^6 z^9} =$

f.  $\sqrt[3]{a^6 b^5 c} =$

i.  $\sqrt[3]{\frac{a^4}{125b^6}} =$

## 3. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas con radicales al máximo.

- Resuelve en el cuaderno.

a.  $\sqrt[3]{27x^3} =$

d.  $\sqrt[3]{16h^6 q^4} =$

g.  $\sqrt[3]{\frac{2a^3 b^3}{c^4}} =$

b.  $\sqrt{49p^2} =$

e.  $\sqrt{16m^3 n^2} =$

h.  $\sqrt{64p^2 q^5} =$

c.  $\sqrt[3]{64a^3 b^2} =$

f.  $\sqrt[3]{32x^6 y^4} =$

i.  $\sqrt[3]{\frac{343h^6}{q^5}} =$

## 4. Simplifica cada expresión radical, luego, resuelve las operaciones con radicales.

a.  $\sqrt{9a} + 5\sqrt{25a} - 12\sqrt{a} =$

g.  $\left(\frac{1}{4}\sqrt{125x^5 y^3}\right) \cdot (-2\sqrt{xy}) =$

b.  $\sqrt{27x} + 5\sqrt{3x} - 7 =$

h.  $\left(3\sqrt{\frac{36m^3 n}{4}}\right) \cdot \left(3\sqrt{\frac{m^2 n^2}{9}}\right) =$

c.  $2\sqrt[3]{8m^3 n} + 3\sqrt[3]{27m^3 n} - \sqrt{n} =$

i.  $10\sqrt{16m^3 n^3} \div 5\sqrt{4mn} =$

d.  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3 y^4} + \frac{5}{4}xy\sqrt[3]{y} - xy\sqrt[3]{y} =$

j.  $36\sqrt[3]{x^5 y^7} \div 2\sqrt[3]{x^2 y} =$

e.  $5\sqrt{9ab} \cdot 2\sqrt{ab} =$

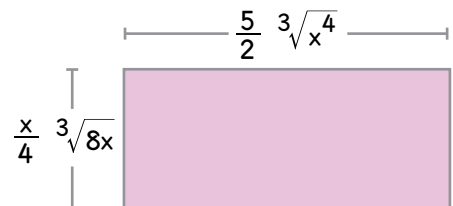
k.  $\frac{3}{5}\sqrt{m^3 n^5} \div \frac{-3}{5}\sqrt{mn} =$

f.  $(-3\sqrt[3]{8p^3 q}) \cdot (-7\sqrt[3]{pq}) =$

l.  $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p^7}{16}}\right) \div \left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{p^4}{2}}\right) =$

## 5. Calcula el área y el perímetro del rectángulo del lado.

- Anota la respuesta en el cuaderno.



## ¡Atención!

Al simplificar radicales no siempre se obtienen raíces exactas. Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{2^3} \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 2^1} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$



## Recuerda

Al sumar o restar expresiones con radicales, se unen las que tienen igual radicando.

Al multiplicar (o dividir) expresiones con radicales, se multiplican (o dividen) los coeficientes y los radicales entre sí.

## 2.4 Signos de agrupación en operaciones combinadas

### Problema

¿El resultado que se obtiene al resolver la operación del recuadro de abajo, puede variar según el orden que se siga?

$$[6x - 8x \cdot (4x + 2)] \div 2x$$

### Solución

Se resuelve la operación con expresiones algebraicas de dos formas distintas para determinar si hay diferencias en el resultado obtenido.

#### Método I

$$\begin{aligned} [6x - 8x \cdot (4x + 2)] \div 2x &= [6x - 32x^2 - 16x] \div 2x && \rightarrow \text{Multiplica } 8x \cdot (4x + 2) \\ &= [-32x^2 - 10x] \div 2x && \rightarrow \text{Resta } 6x - 16x \\ &= -16x - 5 && \rightarrow \text{Divide } [-32x^2 - 10x] \div 2x \end{aligned}$$

#### Método II

$$\begin{aligned} [6x - 8x \cdot (4x + 2)] \div 2x &= [-2x \cdot (4x + 2)] \div 2x && \rightarrow \text{Resta } 6x - 8x \\ &= -8x^2 - 4x \div 2x && \rightarrow \text{Multiplica } -2x \cdot (4x + 2) \\ &= -4x - 2 && \rightarrow \text{Divide } -8x^2 - 4x \div 2x \end{aligned}$$

Se observa que al cambiar el orden en que se resuelven las operaciones el resultado obtenido también cambia. Solamente el resultado obtenido en el **Método I** es correcto, pues se siguió el orden indicado.

### Conclusión

Al resolver **operaciones combinadas con expresiones algebraicas** se debe tener en cuenta la prioridad de las operaciones, así como la jerarquía de los signos de agrupación, de la misma manera que en las operaciones combinadas con números reales.

#### Prioridad de las operaciones

Las operaciones se resuelven siguiendo el siguiente orden:

1. Radicales y potencias
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

En el caso de las sumas y las restas que no se pueden reducir, se mantienen igual y se procede con el siguiente paso en la resolución.



### Datos interesantes

Los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }, son utilizados en matemáticas para indicar el orden en que se debe resolver una operación; sin embargo, estos símbolos también se usan en otros campos. Por ejemplo, en la escritura, para realizar aclaraciones dentro de un texto.



### ¿Qué pasaría?

Si no se respeta el orden de las operaciones y de los signos de agrupación al resolver operaciones combinadas con expresiones algebraicas, se obtienen resultados incorrectos, como sucedió en el **Método II** que se usó para resolver el problema inicial.



## Desarrollo sostenible

Mantener un orden adecuado al realizar diversas actividades en la vida cotidiana también ayuda a obtener resultados adecuados. Por ejemplo, recordar terminar los deberes escolares antes de realizar actividades de ocio.



## ¿Qué pasaría?

Si la operación que está en el primer lugar de prioridad no se puede reducir, se deja indicada. Esto ocurre en el ejemplo **a**, donde la primera operación en prioridad es  $9x^3 - 8x^2$ , pero estos términos no se pueden reducir; por lo tanto, se continúa con la siguiente operación en prioridad.

## Jerarquía de los signos de agrupación

Si la operación combinada contiene signos de agrupación como  $()$ ,  $[\ ]$  y  $\{ \}$ , se resuelven las operaciones dentro de ellos, siguiendo este orden:

1. Paréntesis redondos  $()$
2. Corchetes  $[\ ]$
3. Llaves  $\{ \}$

## Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

**a.**  $\sqrt{x^2} \cdot [3x + (9x^3 - 8x^2) \div x^2]$

$$= x \cdot [3x + (9x^3 - 8x^2) \div x^2]$$

$$= x \cdot [3x + 9x - 8]$$

$$= x \cdot [12x - 8]$$

$$= 12x^2 - 8x$$

→ Se calcula la raíz  $\sqrt{x^2}$ .

→ Se divide  $(9x^3 - 8x^2) \div x^2$ .

→ Se suma  $3x + 9x$ .

→ Se resuelve la multiplicación.

**b.**  $\{7a - [(8a - 2a + 9) \div 3]\} \cdot [5 \cdot (4a - 2)]$

$$= \{7a - [(6a + 9) \div 3]\} \cdot [5 \cdot (4a - 2)]$$

$$= \{7a - [2a + 3]\} \cdot [5 \cdot (4a - 2)]$$

$$= \{7a - [2a + 3]\} \cdot [20a - 10]$$

$$= \{5a - 3\} \cdot [20a - 10]$$

$$= 100a^2 - 50a - 60a + 30$$

$$= 100a^2 - 110a + 30$$

→ Se resta  $8a - 2a$ .

→ Se divide  $(6a + 9) \div 3$ .

→ Se multiplica  $5 \cdot (4a - 2)$ .

→ Se reduce  $7a - [2a + 3]$ .

→ Se multiplica.

→ Se reducen términos semejantes.

## Práctica

Trabaja en  
tu cuaderno



1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

**a.**  $(t - 4)(t - 3) - (t - 2)(t + 2)$

**b.**  $[2x(4xy + 5xy)] - 20x^2y$

**c.**  $[10t(-2t)^3 + 4t^4 - (3t^2 \cdot 2t^2)]$

**d.**  $[8m - (5n + 3n)] \div [2(2m + 2m)]$

**e.**  $5b + \{\sqrt{4a^4} \div [2(a^3b \div ab)]\}$

**f.**  $\{5p(2p - 3p) + [(3p)^3 \div (3p)^2]\}$



## ¡Atención!

El símbolo de multiplicación entre expresiones algebraicas se omite. Por ejemplo,  $(t - 4)(t - 3)$  indica el producto  $(t - 4) \cdot (t - 3)$ .

2. Explica el error cometido en cada operación y resuélvela en forma correcta.

**a.**  $[(5x^2 + 3x^2) \div x^2][(2x)^2 - 1]$

$$= [(5x^2 + 3x^2) \div x^2][4x^2 - 1]$$

$$= [5x^2 + 3][4x^2 - 1]$$

$$= 20x^4 - 5x^2 + 12x^2 - 3$$

$$= 20x^4 + 7x^2 - 3$$

**b.**  $(25a^5 \div 5a^3 + 5a^3) - [\sqrt[3]{8a^6} \cdot (5a - 2a)]$

$$= (25a^5 \div 10a^3) - [\sqrt[3]{8a^6} \cdot (5a - 2a)]$$

$$= (25a^5 \div 10a^3) - [\sqrt[3]{8a^6} \cdot 3a]$$

$$= (25a^5 \div 10a^3) - [2a^2 \cdot 3a]$$

$$= \frac{5a^2}{2} - [2a^2 \cdot 3a]$$

$$= \frac{5a^2}{2} - 6a^3$$

## 2.5 Practica lo aprendido

Trabaja en  
tu cuaderno

1. Calcula las potencias aplicando las propiedades. Escribe las respuestas en el cuaderno.

a.  $(2m^2)^5 =$

d.  $(-h^3)^3 =$

b.  $(3g^2)^2 =$

e.  $(4a^2b^4)^5 =$

c.  $(-2m^3)^4 =$

f.  $(7m^7n^8)^3 =$

2. Transforma cada expresión a una potencia de exponente positivo. Observa el ejemplo.

a.  $\left(\frac{4b}{a}\right)^{-2} =$

b.  $(5x)^{-2} =$

c.  $\left(\frac{4a^3}{5b}\right)^{-1} =$

3. Simplifica al máximo las siguientes expresiones algebraicas.

a.  $2\sqrt[3]{125m^6} =$

d.  $\sqrt[3]{16m^4n^7} =$

b.  $\sqrt{81b^4} =$

e.  $\sqrt{27x^5y} =$

c.  $\sqrt[3]{8p^3q^9} =$

f.  $\sqrt[3]{24h^6k^4} =$

4. Resuelve las operaciones con radicales en el cuaderno.

a.  $\sqrt{49m} - 2\sqrt{16m} - 5\sqrt{m} =$

e.  $\left(\sqrt[3]{\frac{4a^2b}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2ab^2}{9}}\right) =$

b.  $-3\sqrt{27a^3b} + a\sqrt[3]{8b} - \sqrt{z} =$

f.  $6\sqrt{x^3y^3} \div 2\sqrt{9xy} =$

c.  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{h^3k^4} + \frac{1}{4}hk\sqrt[3]{k} + hk\sqrt[3]{k} =$

g.  $-8\sqrt[3]{h^4k^4} \div 2\sqrt[3]{h^4k} =$

d.  $-\sqrt{4pq} \cdot 6\sqrt{pq} =$

h.  $\frac{5}{2}\sqrt{p^3q^7} \div \frac{-1}{2}\sqrt{pq} =$

5. Resuelve las siguientes operaciones combinadas en el cuaderno.

a.  $(a - 1)(a - 1) - (a - 2)(a + 2) =$

c.  $[-2k(-k)^3 + 7k^4 - (4k^2 \cdot 2k^2)] =$

b.  $[m(2mn + 3mn)] - 7m^2n =$

d.  $[10h - (4h + 3h)] \div [3(7h - 6h)] =$

6. Resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.

a. Amanda debe calcular el volumen de un cubo de arista  $3m^2n^5$ . Si obtuvo como resultado  $27m^5n^8$  y le indicaron que el resultado es incorrecto, ¿en qué se equivocó Amanda?

b. Si el área de un rectángulo mide  $5a^{2x}b^{3y}$  cm<sup>2</sup> y su base,  $2a^xb^y$  cm, ¿cuánto mide el perímetro de ese rectángulo?

## Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Explico el procedimiento utilizado al reducir expresiones algebraicas con términos semejantes.			
2. Reduzco correctamente expresiones algebraicas con términos semejantes.			
3. Resuelvo adiciones de monomios aplicando la ley de signos.			
4. Resuelvo adiciones de polinomios aplicando la ley de signos.			
5. Resuelvo sustracciones de monomios aplicando la ley de signos.			
6. Resuelvo sustracciones de monomios aplicando la ley de signos.			
7. Resuelvo multiplicaciones de expresiones algebraicas respetando el orden.			
8. Resuelvo divisiones de monomios entre monomios.			
9. Resuelvo divisiones de polinomios entre monomios.			
10. Deduzco las propiedades de la potenciación aplicando la definición.			
11. Distingo las propiedades de la potenciación según la operación.			
12. Aplico las propiedades de la potenciación de enteros positivos en la solución de operaciones o problemas.			
13. Simplifico raíces cuadradas y cúbicas con radicandos enteros y algebraicos mediante descomposición.			
14. Aplico las reglas de supresión e introducción de signos de agrupación al realizar operaciones algebraicas.			
15. Suprimo signos de agrupación aplicando el orden de solución de las operaciones.			



REPÚBLICA DE PANAMÁ  
— GOBIERNO NACIONAL —

MINISTERIO DE  
EDUCACIÓN

# Panamática 8

Guía del estudiante  
Trimestre I



2022

De la mano con los Objetivos  
de Desarrollo Sostenible (ODS)