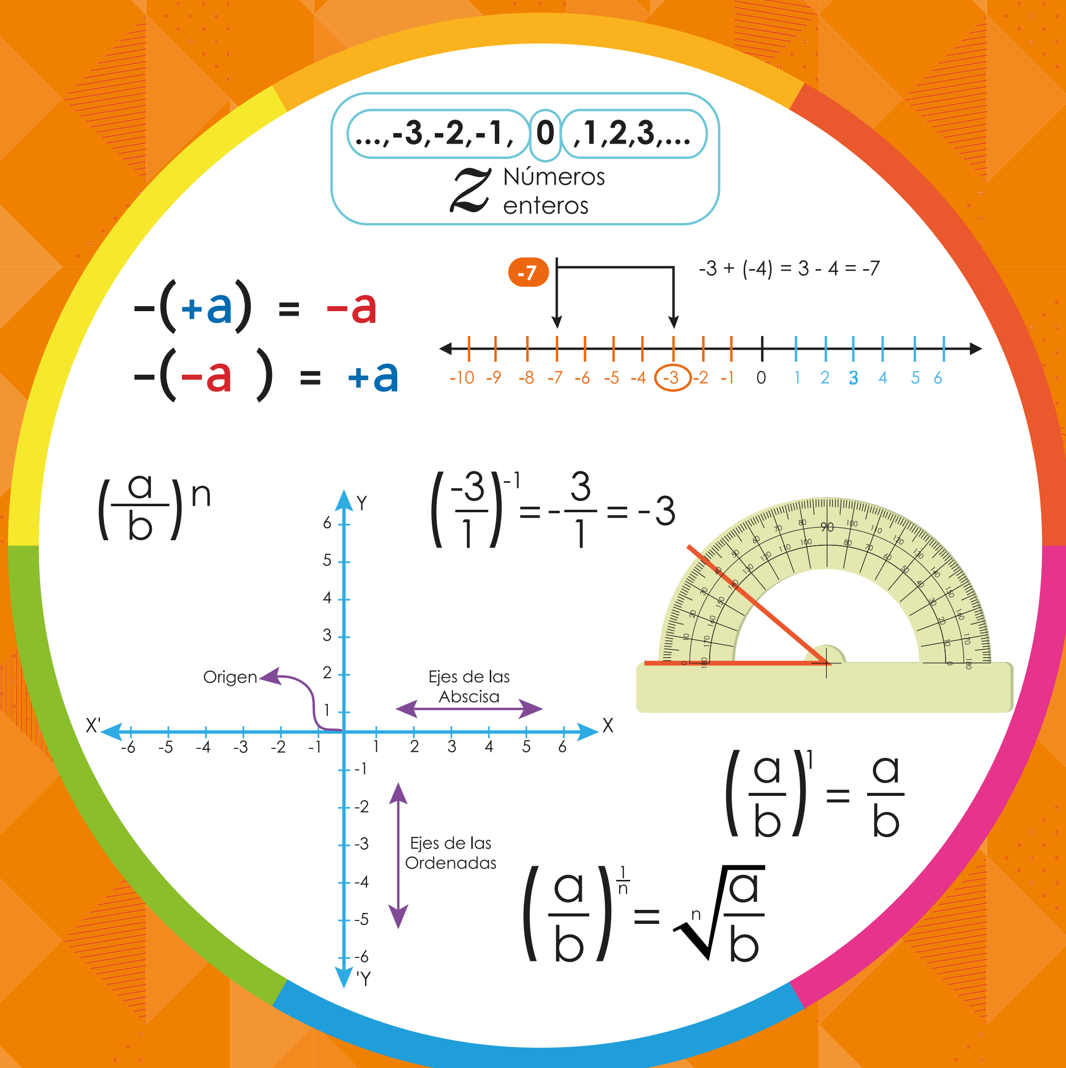
REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 7

Guía del estudiante
Trimestre I

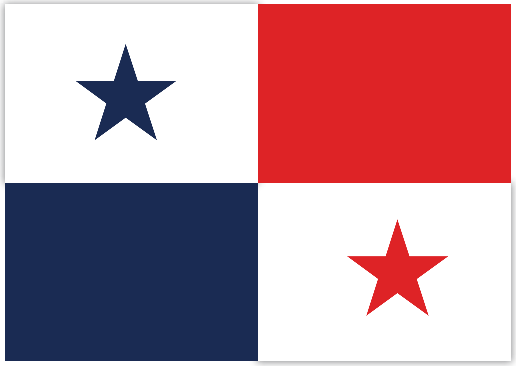


Material para validación - 2022

Mediante la Ley 34 de 1949, reformada con la Ley 2 de 2012, se estableció que Panamá adopta como Símbolos de la Nación: la Bandera, el Himno y el Escudo. A partir de dicha Ley se sustituyó la denominación de "símbolos patrios" por "Símbolos de la Nación". Asimismo, con la Ley se creó la Comisión Nacional de los Símbolos de la Nación (Conasina), cuya función principal es promover el uso adecuado de los Símbolos de la Nación.

Himno

Bandera



Escudo

Autores

Letra: Jerónimo Ossa E.

Música: Santos Jorge A.

Confección: María Ossa de Amador

Diseño: Manuel Encarnación Amador

Concepto: Nicanor Villalaz L.

Diseño y pintura: Max Lemm B.

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 7

Guía del estudiante 2022

Ministra de Educación	Su Excelencia Maruja Gorday de Villalobos
Viceministra Académica de Educación	Su Excelencia Zonia Gallardo de Smith
Viceministro Administrativo de Educación	Su Excelencia José Pío Castillero
Viceministro de Infraestructura de Educación	Su Excelencia Ricardo Sánchez
Secretario General	Ricardo Alonso Vaz Wilky
Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa	Carmen Heredia Reyes Recuero **Directora Nacional** Yovany Guerra G. **Coordinador Nacional de Matemática**
Dirección Nacional de Formación y Perfeccionamiento Docente	Anabella Yepes Martínez **Directora Nacional**
Equipo de contextualizadores	Jesús Domingo Chacón Pinto Daniel Edil Herrera Muñoz Manuel Antonio Herrera Herrera Guillermo Castillo
Evaluación técnica	Yovany Guerra G.
Coordinación editorial	Esteban Ureña Salazar
Edición	Marilyn Alvarado Vargas
Corrección de estilo	Matilde H. de Loo
Diagramación	Diana Campos y Rosa Elena Cerdas
Conceptualización de portada	Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa Aracelly Agudo
Coordinación del Proyecto	Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)

BID Banco Interamericano de Desarrollo | OEI

La serie Panamática ha sido producido gracias a la colaboración del Ministerio de Educación del Gobierno de El Salvador, a través del proyecto ESMATE, material diseñado para Matemática con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Este material didáctico fue posible con el respaldo de los recursos aportados por el Programa Mejorando la Eficiencia y Calidad del Sector Educativo (PN-L1143), Contrato de Préstamo n.° 4357/OC-PN con el Banco Interamericano de Desarrollo, a través del componente Apoyo Pedagógico Integral y Continuo.

ISBN: 978-9962-737-92-6

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Estimados jóvenes:

Estamos contentos y complacidos de volver a verles junto a sus compañeros y profesores. Las clases interactivas, dinámicas, de manera cooperativa y colaborativa permitirán que todos podamos avanzar juntos y hacer del aprendizaje un espacio entretenido y enriquecedor.

La educación tiene el potencial de transformar sus vidas y permitirles más oportunidades para participar en la nueva sociedad del conocimiento y de las tecnologías de la información.

La comprensión lectora, junto con el desarrollo del pensamiento matemático y las habilidades de pensamiento abstracto, son factores clave para progresar en el desarrollo de todas las asignaturas y elegir el tipo de bachillerato que les gustaría estudiar cuando culminen sus estudios de Premedia.

Además, una educación de calidad es también más humana, más inclusiva y altruista; contribuye en la formación de ciudadanos íntegros, solidarios y comprometidos con el futuro de su familia, de su comunidad y de la sociedad. Les ofrece oportunidades, a todos, para mejorar sus competencias a su ritmo, con sus habilidades, sin dejar a nadie atrás; es permanente, equitativa e inclusiva.

Queridos jóvenes, el futuro los espera para que puedan concretar sus metas y alcanzar sus sueños de ser grandes hombres y mujeres, productivos y constructores de una mejor sociedad. Que este retorno a clases fortalezca todas sus competencias y les garantice una formación integral con calidad.

Éxitos en el año escolar 2022.

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Estructura del libro

Secciones de la lección y las clases

Título de la lección

Título de la clase

Problema

En este primer momento de cada clase, se solicita al estudiante que piense una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido por desarrollar.

Solución

En el segundo momento de la clase, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión

En el tercer momento didáctico, se presenta el contenido de manera formal. Se relacionan los dos primeros momentos para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Observa cómo se hace

Esta sección propone ejemplos de ejercicios resueltos para contribuir a la comprensión del procedimiento relativo a los contenidos de la **Conclusión**.

Práctica

En el último momento didáctico se incluyen ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Clases especiales

Repasa tus conocimientos

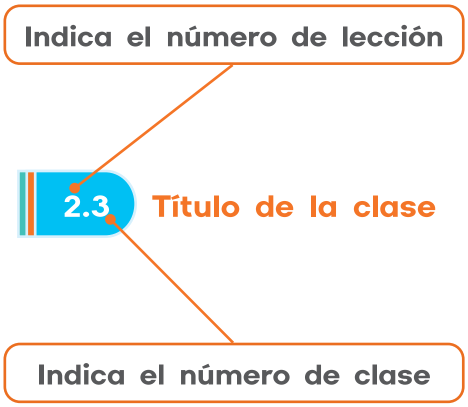
Este programa aparece siempre como la primera clase de una lección. Propone ejercicios para activar conocimientos previos sobre los temas de la lección.

Practica lo aprendido

Presenta ejercicios al final de cada lección, que integran los contenidos desarrollados en las clases.

Distribución de las clases

Este primer tomo se propone para el primer trimestre del curso, y está compuesto por 5 unidades didácticas. Cada unidad está formada por lecciones, y cada lección, por clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección, y el segundo, la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 correspondiente a la lección 2 se representa de la siguiente manera:



Secciones especiales

Recuerda

Activa contenidos de clases, unidades o grados anteriores que son necesarios para comprender el tema desarrollado.

¿Qué pasaría?

Aborda casos particulares relacionados con el contenido de las secciones **Conclusión** y **Observa cómo se hace**.

Trabajo colaborativo

Asigna tares de investigación o ampliación de conocimientos con el fin de fomentar el trabajo en equipo.

¡Atención!

Presenta pistas, recomendaciones o información adicional para resolver los ejercicios propuestos o comprender los ejemplos desarrollados.

Datos interesantes

Proporciona datos complementarios de diverso tipo (histórico, cultural, técnico), relacionados con los contenidos desarrollados durante la clase.

Desarrollo sostenible

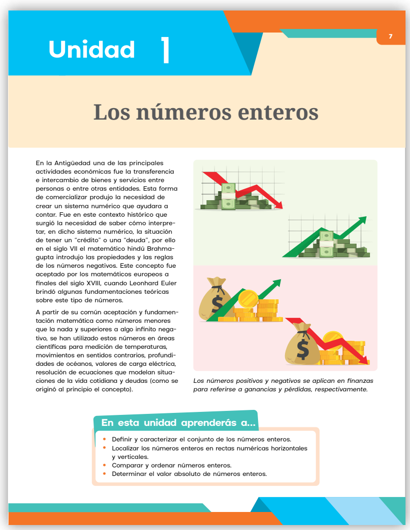
Propone textos informativos y acciones posibles en relación con el desarrollo sostenible, específicamente en cuanto al clima, la producción y el consumo responsables, el trabajo decente, el crecimiento económico, la igualdad de género, la salud y el bienestar.

Inicios de unidad

Se indica el número de unidad así como el tema central que se desarrollará durante las siguientes lecciones.

Se presenta una introducción general al tema por estudiar, para contextualizarlo en la historia de la cultura y de la matemática.

Finalmente se incluyen las habilidades por desarrollar durante la unidad.



Unidad 1

7

Los números enteros

En la Antigüedad una de las principales actividades económicas fue la transferencia e intercambio de bienes y servicios entre personas o entre otras entidades. Esta forma de comercializar produjo la necesidad de crear un sistema numérico que ayudara a contar. Fue en este contexto histórico que surgió la necesidad de saber cómo interpretar, en dicho sistema numérico, la situación de tener un "crédito" o una "deuda", por ello en el siglo VII el matemático hindú Brahmagupta introdujo las propiedades y las reglas de los números negativos. Este concepto fue aceptado por los matemáticos europeos a finales del siglo XVIII, cuando Leonhard Euler brindó algunas fundamentaciones teóricas sobre este tipo de números.

A partir de su común aceptación y fundamentación matemática como números menores que la nada y superiores a algo infinito negativo, se han utilizado estos números en áreas científicas para medición de temperaturas, movimientos en sentidos contrarios, profundidades de océanos, valores de carga eléctrica, resolución de ecuaciones que modelan situaciones de la vida cotidiana y deudas (como se originó al principio el concepto).

Los números positivos y negativos se aplican en finanzas para referirse a ganancias y pérdidas, respectivamente.

En esta unidad aprenderás a...

- Definir y caracterizar el conjunto de los números enteros.
- Localizar los números enteros en rectas numéricas horizontales y verticales.
- Comparar y ordenar números enteros.
- Determinar el valor absoluto de números enteros.

Trabaja en tu cuaderno

Este ícono aparece en todas las clases de **Repasa tus conocimientos** y **Practica lo aprendido**, además de las secciones **Practica** de todas las clases. Su propósito es recordarle al estudiante que debe resolver todos los ejercicios en su cuaderno.

Trabaja en tu cuaderno

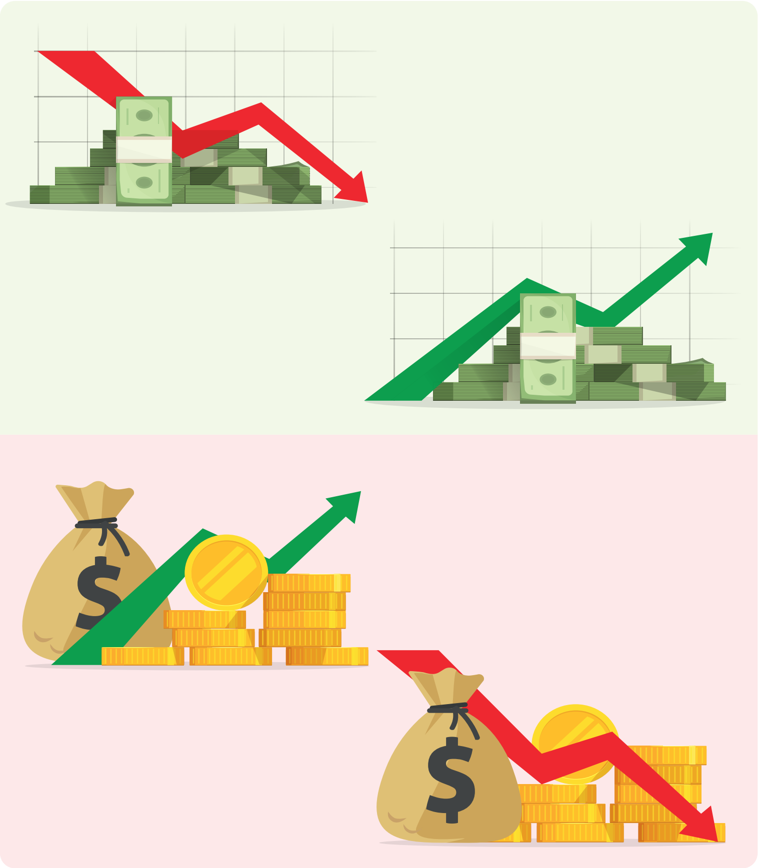
Índice

Unidad 1

Los números enteros

En la Antigüedad una de las principales actividades económicas fue la transferencia e intercambio de bienes y servicios entre personas o entre otras entidades. Esta forma de comercializar produjo la necesidad de crear un sistema numérico que ayudara a contar. Fue en este contexto histórico que surgió la necesidad de saber cómo interpretar, en dicho sistema numérico, la situación de tener un "crédito" o una "deuda", por ello en el siglo VII el matemático hindú Brahmagupta introdujo las propiedades y las reglas de los números negativos. Este concepto fue aceptado por los matemáticos europeos a finales del siglo XVIII, cuando Leonhard Euler brindó algunas fundamentaciones teóricas sobre este tipo de números.

A partir de su común aceptación y fundamentación matemática como números menores que la nada y superiores a algo infinito negativo, se han utilizado estos números en áreas científicas para medición de temperaturas, movimientos en sentidos contrarios, profundidades de océanos, valores de carga eléctrica, resolución de ecuaciones que modelan situaciones de la vida cotidiana y deudas (como se originó al principio el concepto).



Los números positivos y negativos se aplican en finanzas para referirse a ganancias y pérdidas, respectivamente.

En esta unidad aprenderás a...

- Definir y caracterizar el conjunto de los números enteros.
- Localizar los números enteros en rectas numéricas horizontales y verticales.
- Comparar y ordenar números enteros.
- Determinar el valor absoluto de números enteros.

Números positivos, negativos y el cero

1.1 Números positivos, negativos y el cero en diferentes contextos

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Investiguen cuáles son las ciudades más frías y las más calientes del mundo.

Problema

La imagen muestra el pronóstico del tiempo de algunas ciudades de Centroamérica y Norteamérica.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será la temperatura máxima y mínima en Panamá?
2. ¿Cuál será la temperatura máxima y mínima en Nueva York?
3. ¿En qué ciudad se registrará la temperatura más baja?

Datos interesantes

El volcán Barú se encuentra a una distancia de 50 km del océano Pacífico y a unos 40 km del Atlántico, y su altura es de 3474 m sobre el nivel del mar. Además, es uno de los lugares más fríos en Panamá, pues se han llegado a registrar temperaturas menores a los -2° C.

Solución

1. La temperatura máxima en Panamá será de +35° C y se lee: "Más 35 grados Celsius". Su mínima será de +26° C y se lee: "Más 26 grados Celsius".
2. La temperatura máxima en Nueva York será de +12° C y se lee: "Más 12 grados Celsius". La temperatura mínima en Nueva York será −2° C y se lee: "Menos 2 grados Celsius".
3. La temperatura más baja se registrará en Denver, donde la temperatura mínima será de −5° C (menos 5 grados Celsius).

Conclusión

A los números que les antecede un signo (+) como +12 se les llama **números positivos** y a los números que les antecede un signo (−) como −12 se les llama **números negativos**. El número 0 no es positivo ni es negativo.

Los números positivos se pueden expresar con o sin el signo (+), por ejemplo +5 es equivalente a escribir 5. Por tanto, los números +1, +2, +3, +4, +5, ... son los mismos números naturales que se conocen. Vale aclarar que para escribir un número negativo nunca se debe omitir la escritura del signo (−).

Los números positivos y negativos se utilizan en diferentes contextos; por ejemplo, para representar ganancias y pérdidas de dinero, para dar ubicaciones sobre y bajo el nivel del mar, en los depósitos y retiros de dineros en cuentas bancarias, para ascender o descender en edificios o en la historia con el antes o después de Cristo, entre otros.

Recuerda

Para medir la temperatura se toma 0° C como el punto de referencia. Temperaturas por arriba de 0° C se representan con un signo (+) antes del número, por ejemplo +12° y se lee: "Más doce grados Celsius". Temperaturas debajo de 0° C se representan con un signo (−) antes del número, por ejemplo −5° C y se lee: "Menos 5 grados Celsius".

Práctica

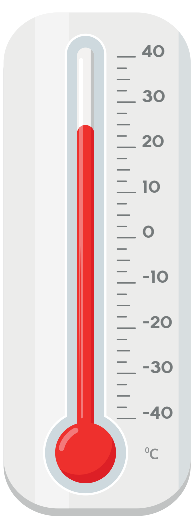
Trabaja en tu cuaderno

1. Expresa las siguientes temperaturas con el signo positivo o negativo según corresponda.
   - a. 12° C por encima de los 0° C
   - b. 3° C por debajo de los 0° C
   - c. 5° C por debajo de los 0° C
   - d. 9° C por debajo de los 0° C
   - e. 28° C por encima de los 0° C
   - f. 27° C por encima de los 0° C

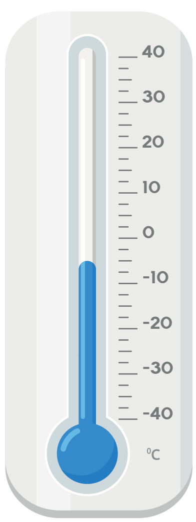
2. Expresa cada situación con un número positivo o negativo según corresponda.
   - a. 500 balboas de ganancia
   - b. 100 balboas de pérdida
   - c. 50 m sobre el nivel del mar
   - d. 10 m bajo el nivel del mar
   - e. Un depósito bancario de 80 balboas
   - f. Un retiro bancario de 25 balboas
   - g. Un ascenso de 4 pisos en el edificio
   - h. Un descenso de 3 pisos en el edificio
   - i. 2022 años después de Cristo
   - j. 500 años antes de Cristo

3. Escribe la temperatura que marca cada termómetro.

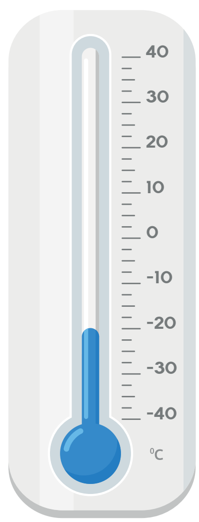
a.



b.



c.



¡Atención!

En un termómetro se toma 0° C como el punto de referencia.
Valores más altos que 0° C se expresan como +☐ °C; valores más bajos como −☐ °C.

Desarrollo sostenible

¿Has oído hablar de la "Gran mancha de basura en el Pacífico"? Es una área oceánica con una concentración altísima de plásticos que contamina el ecosistema marino, muy difícil de limpiar. Una manera de combatir este problema es reducir el consumo de plásticos de un solo uso: los que no se reutilizan ni se reciclan.

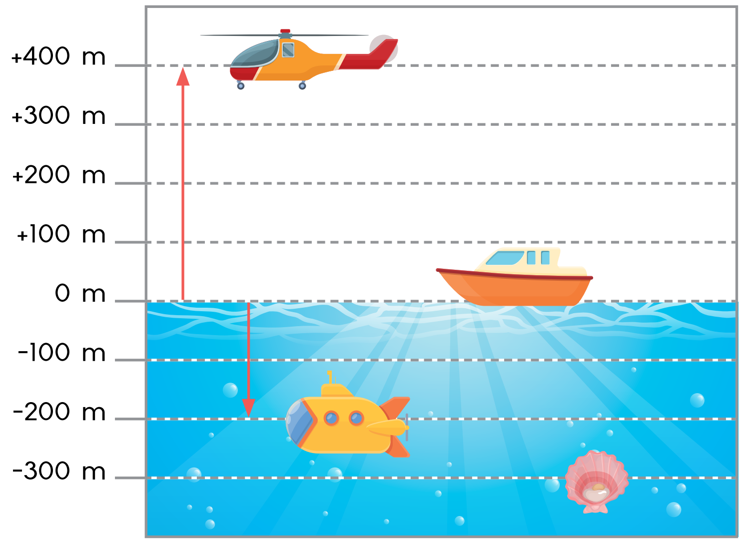
1.2 Ubicación respecto a un punto de referencia

Problema

En la imagen, se muestran las alturas y las profundidades de distintos objetos con respecto al nivel del mar.

1. Con referencia al nivel del mar, cómo se representa la altura de:
   a. El helicóptero
   b. La ostra

2. Si un buzo se encuentra 30 m bajo el nivel del mar, ¿cómo se expresa esa posición?



Solución

1. Con referencia al nivel del mar, se tiene que:
   a. La altura del helicóptero es de +300 m y se lee: "Más 300 metros".
   b. La altura de la ostra es −300 m y se lee: "Menos 300 metros".

2. Si un buzo se encuentra 30 metros por debajo del nivel del mar, se expresa como -30 m.

Conclusión

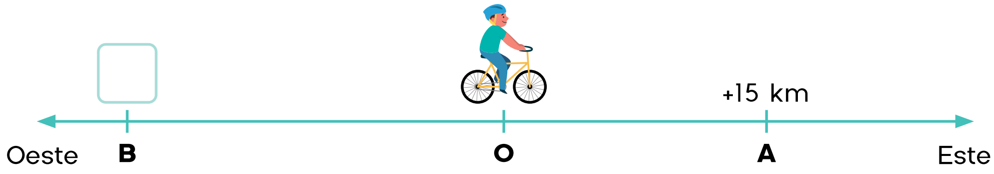
Cuando se define un punto de referencia y hay objetos cuya posición varía respecto a ese punto; se puede asignar un **número positivo** (+) o un **número negativo** (−) según sus posiciones.

Recuerda

Las cantidades positivas se interpretan como "sobre el nivel del mar" y las negativas como "bajo el nivel del mar". Así: +300 m se interpreta como 300 m sobre el nivel del mar y −300 m se interpreta como 300 m bajo el nivel del mar.

Observa cómo se hace

Mario se encuentra ubicado en el punto **O** de una carretera. Si se expresa con +15 km la posición del punto **A** que se ubica 15 km hacia el este del punto **O**, ¿cómo se expresa la posición del punto **B** que queda 22 km hacia el oeste del punto **O**?



Solución

Si en una carretera se establece que el punto de referencia es **O**, y la dirección hacia el este es positiva (+), entonces la dirección hacia el oeste es negativa (−).

Como el punto **B** está en dirección hacia el oeste, la respuesta es: -22 km.

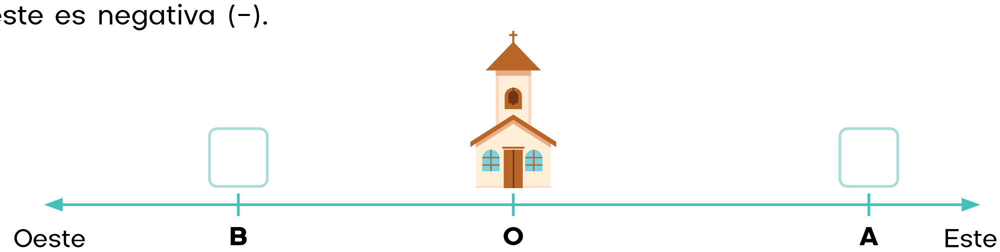
Datos interesantes

Antes de que se definieran los números negativos, en algunas culturas acostumbraban escribir este tipo de cantidades en color rojo para diferenciarlas de los números positivos, que se escribían en negro.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

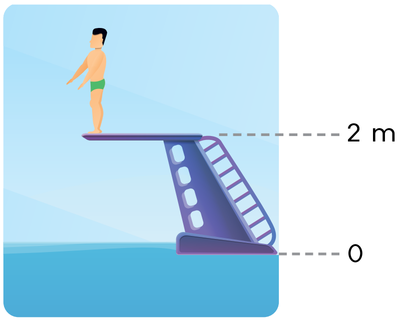
1. Responde las preguntas considerando que el punto de referencia es la iglesia en **O** y la dirección hacia el oeste es negativa (−).



   a. ¿Cómo se expresa la posición del punto **A** que está a 7 km al este de **O**?
   b. ¿Cómo se expresa la posición del punto **B** que está a 5 km al oeste de **O**?
   c. Si otro punto **C** se encuentra a −8 km, ¿en qué dirección está ubicado **C** respecto de **O** y a qué distancia?

2. Escribe con números negativos y positivos los tiempos dados, considerando positivo el tiempo después del nacimiento de Cristo (d. C.) y negativo el tiempo antes de Cristo (a. C.).
   a. 50 años d. C.
   b. 170 años a. C.
   c. 1250 años a. C.
   d. 2022 años d. C.

3. Responde las preguntas considerando como referencia el nivel del agua de la piscina.
   a. ¿Qué tipo de número representa la altura del trampolín?
   b. Si una persona está nadando a 2 m bajo el nivel del agua, ¿cómo se expresa esa altura?
   c. Si un clavadista salta 2 metros hacia arriba del trampolín, ¿cómo se representa la altura máxima que alcanza con respecto al nivel del agua?



Datos interesantes

Hace algunos años los números negativos se conocían como números ficticios, absurdos o números deudos.

1.3 Diferencia de una cantidad respecto a otra cantidad de referencia

Problema

Un centro turístico tiene como meta recibir 200 personas por día. La tabla muestra el número de asistencias al centro turístico durante una semana. Tomando como positivo cuando el número de asistentes sobrepasa la meta, completa los datos faltantes en la tabla.

Solución

	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie
Asistencia	191	193	204	180	225
Diferencia con la meta	-9	-7	+4	-20	+25

Conclusión

Para representar la diferencia de cantidades mayores o menores respecto a una cantidad de referencia, se utilizan **números positivos** o **negativos**.

Por ejemplo: 10 más que la cantidad de referencia, se expresa +10

3 menos que la cantidad de referencia, se expresa -3

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Expresa con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia:
   a. 4 lb menos del "peso ideal"
   b. 10 cm menos de la "altura permitida"
   c. 2 kg más del "peso permitido"
   d. 5 km/h menos de la "velocidad establecida"

2. Una empresa que fabrica focos, tiene como meta producir 500 focos cada día. Tomando como positivo el dato que sobrepasa la meta, copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie
Producción	525	450	498	530	300
Diferencia con la meta					

1.4 El conjunto de los números enteros

Problema

Observa la tabla.

Temperaturas mínimas diarias en la Patagonia Sur de Argentina						
-3 °C	-1 °C	0 °C	2 °C	0 °C	1 °C	3 °C

¿En cuántos días hubo temperaturas sobre los 0 °C y en cuántos por debajo de los 0 °C?

Solución

Las temperaturas positivas son las que están sobre los 0 °C; es decir:

2 °C, 1 °C y 3 °C.

Las temperaturas negativas son las que están por debajo de los 0 °C; es decir:

-3 °C y -1 °C.

Por lo tanto, durante tres días la temperatura fue sobre los 0 °C y en dos días por debajo de los 0 °C.

Conclusión

El **conjunto de los números enteros** es la unión de los números naturales o enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) y el cero. Se representa con el símbolo $\mathbb{Z}$. Simbólicamente se representa de la siguiente manera, donde "U" significa unión.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Recuerda

En los números positivos se puede omitir el signo +. De ahora en adelante no se colocará.

Datos interesantes

El punto más alto de la Patagonia corresponde al volcán Domuyo, con 4709 m sobre el nivel del mar; mientras que el punto más bajo se encuentra en la Laguna del Carbón a 108 m bajo el nivel del mar.

Recuerda

Los números naturales son aquellos que se utilizan para contar (1, 2, 3, 4, 5, ...) y se representan con el símbolo $\mathbb{N}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Clasifica los siguientes números según el grupo al que pertenecen, $\mathbb{Z}^+$ o $\mathbb{Z}^-$.

23	-15	6	-1	9	-10	-26	98	24	-8

2. Anota en tu cuaderno tres números enteros negativos.

3. Escribe tres números enteros positivos.

Trabajo colaborativo

1. Realiza la siguiente actividad con todo el grupo.
   - **a.** Dibujen con tiza una recta numérica en el piso con los números del −10 al 10.
   - **b.** Jueguen a las ubicaciones. Cada uno deberá pedir a otra persona que se coloque en cierto número de la recta, dando algunas pistas. Por ejemplo, en el número negativo más cercano a 0.

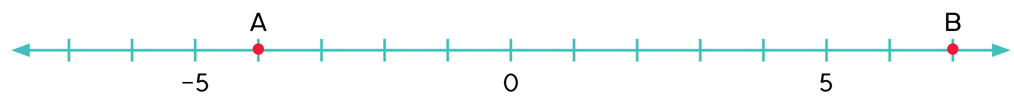
¿Qué pasaría?

Cuando los números que se deben representar en la recta numérica son de dos o más cifras, es conveniente usar escalas de 5 en 5, de 10 en 10 u otras según lo que se necesite.

1.5 Números enteros en la recta numérica

Problema

Observa la siguiente recta numérica.



1. ¿Qué características tiene?
2. ¿Qué números corresponden a los puntos **A** y **B**?

Solución

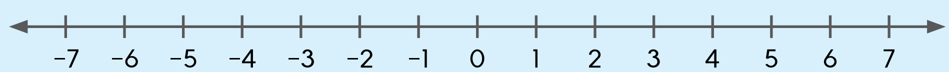
1. Características:
   - Se puede considerar el cero (0) como punto de referencia por su posición central.
   - Las marcas están a la misma distancia tanto a la derecha como a la izquierda del 0.
   - Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0.

2. El punto **A** corresponde al número −4.
   El punto **B** corresponde al número 7.

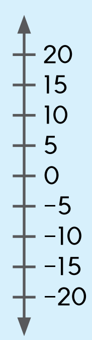
Conclusión

Los números enteros se pueden representar gráficamente en rectas **numéricas horizontales** o **verticales**.

- En la recta numérica horizontal, los números negativos se ubican a la izquierda del cero y los positivos, a la derecha del cero.



- En la recta numérica vertical, los números negativos se ubican por debajo del cero y los positivos, por encima del cero.

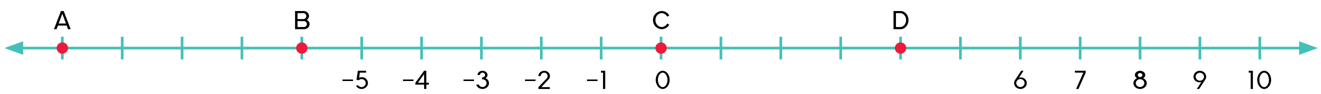


Práctica

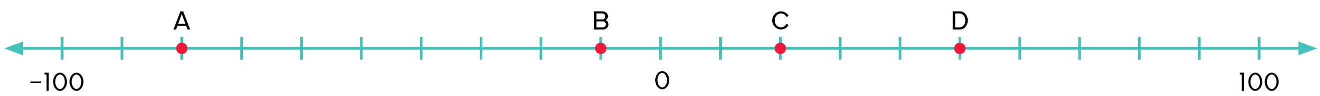
Trabaja en tu cuaderno

1. Anota en tu cuaderno el número que corresponde a cada punto señalado en las rectas.

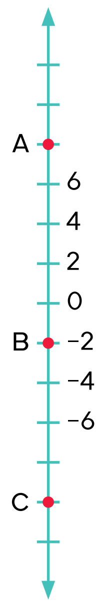
a.



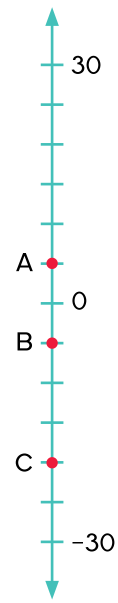
b.



c.



d.



2. Elabora las rectas con las características indicadas para representar cada grupo de números.
   a. Una recta numérica horizontal de 2 en 2 y representa estos números:

A = 4	B = −4	C = 8	D = −6	E = 2

   b. Una recta numérica vertical de 5 en 5 y representa estos números:

A = −25	B = −15	C = 0	D = 5	E = 10

Recuerda

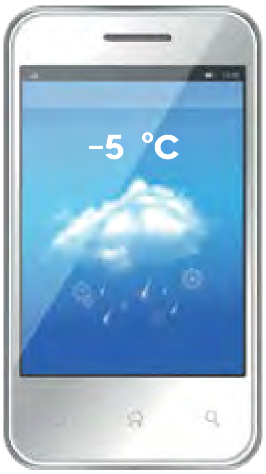
Las marcas que se coloquen en la recta deben estar a la misma distancia una de otra.

3. Responde las siguientes preguntas con base en la ubicación de los números enteros en la recta numérica.
   a. ¿Cuál es el número entero negativo más cercano al 0?
   b. ¿Cuál es el número entero que se ubica entre 4 y 6?
   c. ¿Cuántos números enteros hay entre 0 y 7?
   d. ¿Cuántos números enteros hay entre −10 y −5?
   e. ¿Entre cuáles números enteros se ubica 1?
   f. ¿Entre cuáles números enteros se ubica −4?

1.6 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Observa los estados del tiempo e indica si la temperatura que muestra cada celular está bajo los 0 °C o sobre los 0 °C.

a.


b.


c.


2. Anota en tu cuaderno el número positivo o negativo que representa cada situación. Considera las direcciones al este, al norte y a la derecha como positivas.
   a. Un tiburón se encuentra 56 m bajo el nivel del mar.
   b. Un águila vuela a 18 m sobre el nivel del mar.
   c. Carlos caminó 150 m hacia la izquierda.
   d. Un dron se desplazó 400 m al norte.
   e. Un autobús recorrió 2 km hacia el oeste.

3. Una costurera debe confeccionar 50 pañuelos por día. Considerando como positivo el dato que sobrepasa la producción, ¿cuáles números positivos y negativos representan la diferencia cada día?

Lun	Mar	Mie	Jue	Vie
48	52	50	55	45

4. Determina para cada proposición si es verdadera o falsa.
   a. Todos los números naturales son números enteros.
   b. El cero es un número entero.
   c. El −5 es un número entero positivo.
   d. Todos los números enteros son naturales.
   e. El 0 es un número positivo.
   f. El conjunto $\mathbb{Z}$ es igual que $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$.
   g. Es −10 un número que está en $\mathbb{Z}^-$.
   h. Todos los números que están en $\mathbb{Z}^-$ son positivos.

5. Dibuja una recta numérica horizontal y ubica los números indicados.
   - Elige la escala que consideres más apropiada.

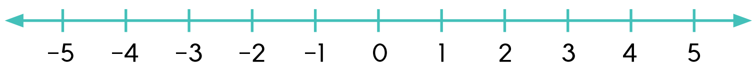
A = −10 | B = 12 | C = −8 | D = −20 | E = 6 | F = 2

Orden y valor absoluto de los números enteros

2.1 Comparación de números positivos y negativos

Problema

Responde las siguientes preguntas:



a. En la recta numérica, ¿cuál de los números está más a la derecha: 2 o 4?
b. ¿Cuál de ellos es mayor?
c. ¿Cuál de los números -3 o -5 está más a la derecha en la recta numérica?

Trabajo colaborativo

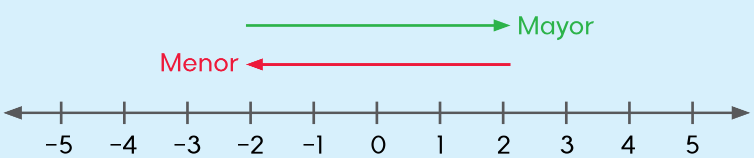
1. Trabaja en pareja.
   a. Conversen qué significa comparar dos números.

Solución

a. El número 4 está más a la derecha que 2.
b. El mayor de ellos es 4.
c. -3 está ubicado más a la derecha que -5 en la recta numérica.

Conclusión

Conforme se avanza a la derecha en la recta, los números son mayores y conforme se avanza hacia la izquierda, los números son menores.



Por ejemplo, como −3 está más a la derecha que −5, entonces $-3 > -5$ o bien $-5 < -3$.

Recuerda

Los símbolos $>$ (mayor que) y $<$ (menor que) son utilizados para expresar una relación de orden entre dos números, y se llaman signos de desigualdad.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Compara los siguientes números con los signos $>$ y $<$. Observa el ejemplo. Apóyate en la recta numérica.

a. −2, −3 → $-2 > -3$
b. −8, 15
c. −16, −15
d. 4, 0
e. −20, −10
f. 11, −12
g. 1, −2
h. 10, −10
i. −100, −90
j. 7, 2
k. 15, 20
l. 50, −25

Desarrollo sostenible

Valorar el trabajo que desempeñan todas las personas es importante para fomentar una sana convivencia social. Todo trabajo aporta al país, sin importar en qué lugar de la jerarquía se encuentre.

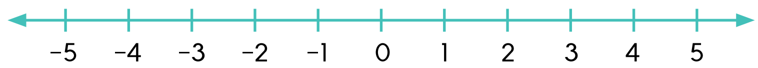
Datos interesantes

Observa que el valor absoluto se define como una distancia; por esta razón, un valor absoluto nunca podrá ser negativo, dado que una distancia corresponde a un número positivo o bien es igual a cero, como el caso | 0 | = 0.

2.2 Valor absoluto y opuesto de un número entero

Problema

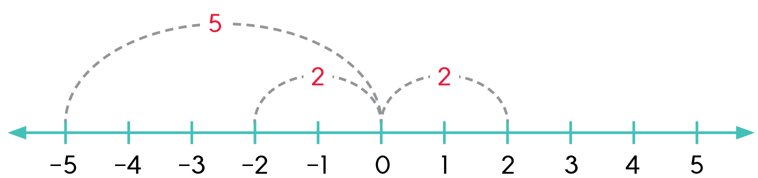
Observa la siguiente recta numérica:



a. ¿Cuál es la distancia que hay entre −5 y 0?
b. ¿Cuál es la distancia que hay entre +2 y 0?
c. ¿Cuál es la distancia que hay entre −2 y 0?

Solución

a. La distancia entre −5 y 0 es 5.
b. La distancia entre +2 y 0 es 2.
c. La distancia entre −2 y 0 es 2.



Conclusión

Tomando como punto de referencia a “0”, la distancia entre 0 y otro número se llama **valor absoluto**. Y se expresa mediante el símbolo | |. Por ejemplo:

- | -5 | = 5 significa que el valor absoluto de −5 es 5 (la distancia entre 0 y −5 es 5).
- | 2 | = 2 significa que el valor absoluto de 2 es 2 (la distancia entre 0 y 2 es 2).
- | -2 | = 2 significa que el valor absoluto de −2 es 2 (la distancia entre 0 y −2 es 2).

Se observa que | -2 | = | 2 | = 2. La distancia entre 2 y 0 es la misma que la distancia entre -2 y 0.

Expresiones como | -2 | = 2 se leen “el valor absoluto de menos dos es igual a dos”.

Las parejas de números que tienen signos distintos e igual valor absoluto se llaman números opuestos. Por ejemplo, 1 y −1 son números opuestos, como también lo son −12 y 12.

Observa cómo se hace

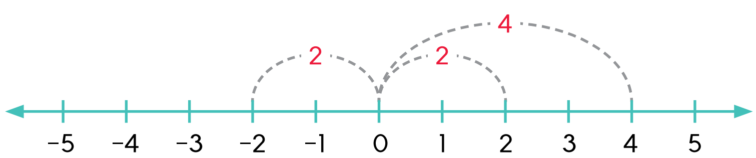
Utilizando la recta numérica, encuentra el valor absoluto de los siguientes números, y responde cuáles de ellos son números opuestos.

a. $|-2|$ **b.** $|4|$ **c.** $|2|$

Solución

Primero, se ubican en la recta numérica los números indicados en cada ejercicio.

Luego, se encuentran las distancias correspondientes.



Por lo tanto,

a. $|-2| = 2$ **b.** $|4| = 4$ **c.** $|2| = 2$

Se observa que −2 y 2 son números opuestos, pues tienen el mismo valor absoluto.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Calcula los siguientes valores absolutos y anótalos en tu cuaderno.

a. $|8|$ **b.** $|-5|$ **c.** $|12|$
d. $|15|$ **e.** $|-20|$ **f.** $|-25|$

2. Indica cuáles parejas de números son opuestos.

a. 4 y 14 **b.** 5 y −5 **c.** −9 y 9
d. 25 y 52 **e.** −10 y −10 **f.** 7 y 7
g. 2 y −2 **h.** −21 y 21 **i.** 55 y 55

3. Determina el opuesto de los siguientes números.

a. 7 **b.** −14 **c.** 25
d. −82 **e.** −20 **f.** 48

4. Determina para cada proposición si es verdadera o falsa.

a. $|15| > 0$
b. $|-15| < 0$
c. $|15| = |-15|$
d. El opuesto de 5 es −5.
e. El opuesto de −10 es −10.
f. $|-6|$ es el opuesto de −6.
g. $|11|$ es el opuesto de 11.
h. El valor absoluto de un número positivo es el mismo número.
i. El valor absoluto de un número negativo es su opuesto.

Recuerda

En la recta numérica, los números hacia la derecha de otros son mayores y hacia la izquierda, menores.

2.3 Desplazamientos en la recta

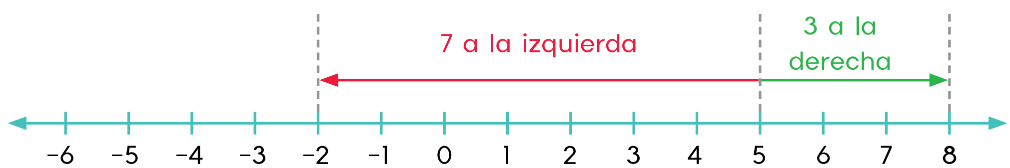
Problema

Utilizando la recta numérica, responde lo siguiente:

a. ¿Qué número es 3 unidades mayor que 5?
b. ¿Qué número es 7 unidades menor que 5?

Solución

a. El número que es 3 unidades mayor que 5, es el que se ubica 3 unidades a la derecha de 5. Este es el número 8.
b. El número que es 7 unidades menor que 5, es el que se ubica 7 unidades a la izquierda de 5. Este es el número -2.



Conclusión

Utilizando las posiciones de los números y **desplazamientos a la derecha o a la izquierda en la recta numérica**, se pueden encontrar números mayores o menores que un número dado.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Utiliza la recta numérica para responder las preguntas.

a. ¿Cuál es el número que es 7 unidades menor que 3?
b. ¿Cuál es el número que es 4 unidades mayor que -2?
c. ¿Cuántas unidades es mayor 4 con respecto a -3?
d. ¿Cuántas unidades es menor -5 con respecto a -3?
e. ¿Cuántas unidades es mayor 8 con respecto a 1?
f. ¿Cuántas unidades es menor -6 con respecto a 1?
g. ¿Cuál es el número que es 5 unidades menor que 0?

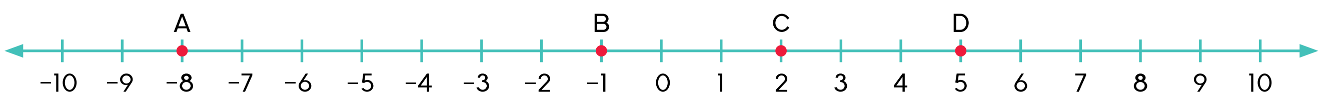
2.4 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

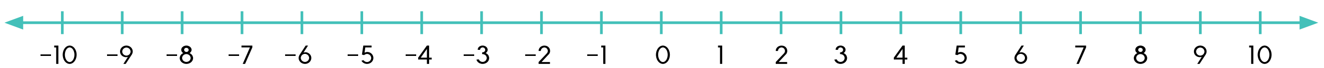
1. Identifica cuál es el número menor y cuál es el mayor en cada grupo.
   a. 13, 31, −13, −31
   b. 0, 5, −5, 15
   c. 1, −1, 0, 2
   d. 18, 8, −8, −10
   e. 22, −50, −52, 25

2. Responde las siguientes preguntas.
   a. ¿Cuáles son dos números distintos cuyo valor absoluto es 7?
   b. Si el valor absoluto de un número es 0, ¿cuál es ese número?
   c. ¿Cuál es el resultado de $|-5| + |5|$?
   d. ¿Cuál es el resultado de $|-5| - |5|$?
   e. ¿Cuál es el resultado de $|-5| + |-5|$?

3. Traza una recta numérica y ubica los números opuestos a los señalados.



4. Determina lo que se indica con base en la recta numérica.



   a. Encuentra el número que es 4 unidades menor que 1.
   b. Encuentra el número que es 8 unidades mayor que −5
   c. Encuentra el número que es 5 unidades menor que −5.
   d. Encuentra el número que es 10 unidades mayor que −2

5. Responde utilizando la recta numérica de la actividad 4.
   a. ¿Cuáles números son mayores que −3 y menores que 2?
   b. ¿Cuáles números son menores que 0 y mayores que −5?
   c. ¿Cuántas unidades es mayor 2 con respecto a −6?
   d. ¿Cuántas unidades es menor −3 con respecto a −1?
   e. ¿Cuántas unidades es mayor 0 con respecto a −9?

6. Responde sin utilizar la recta numérica.
   a. ¿Cuál número es 5 unidades mayor que −5?
   b. ¿Cuál número es 8 unidades menor que 0?
   c. ¿Cuál número es 50 unidades mayor que −10?
   d. ¿Cuál número es 30 unidades menor que 15?
   e. ¿Cuál número es 50 unidades mayor que −25?

Instrumento de Autoevaluación

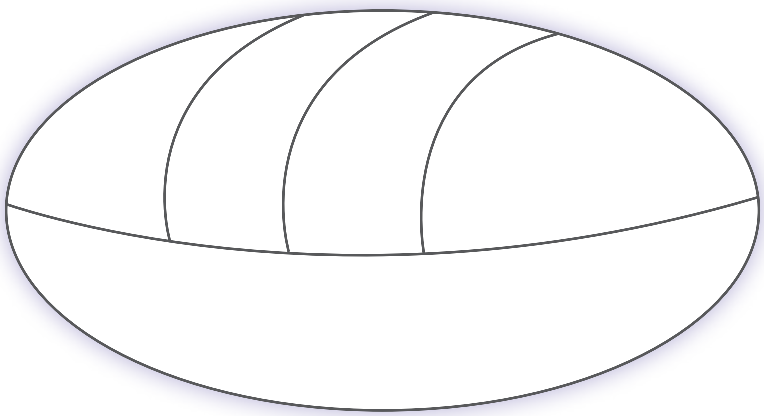
Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Comprendo la utilidad de los números positivos, negativos y el cero en diferentes contextos de la vida cotidiana.			
2. Comprendo la utilidad de los números positivos y negativos para indicar ubicaciones respecto a un punto de referencia.			
3. Empleo números positivos y negativos para determinar la diferencia de una cantidad respecto a una establecida.			
4. Defino y caracterizo el conjunto de los números enteros.			
5. Ubico números enteros en rectas numéricas horizontales y verticales.			
6. Comparo números enteros a partir de su ubicación en la recta numérica.			
7. Comprendo el concepto de valor absoluto de un número entero.			
8. Identifico el opuesto de un número entero.			
9. Empleo la recta numérica para realizar desplazamientos.			

Unidad 2

Suma y resta de números enteros

El primer matemático que estableció las propiedades y las reglas para sumar y restar números negativos fue el matemático hindú Brahmagupta; otro de sus aportes fue la inclusión del cero como número, la fundamentación de su existencia y uso; sin embargo, otras culturas como la maya habían descubierto y usado con anterioridad el cero en su sistema numérico, el cual introdujeron también en su complejo sistema de calendarios, hace más de 2000 años.



La figura es una concha que para los mayas simbolizaba el número cero.

Las reglas para sumar y restar números negativos estaban fundamentadas en las actividades de comercio referidas a deudas y créditos, y eran bastante acertadas respecto a las que conocemos hoy en día; dos deudas que se suman dan una deuda más grande, una deuda que tiene un aporte se vuelve más pequeña. Este tipo de operaciones son esenciales en el trabajo con ecuaciones, expresiones algebraicas, entre otros, este conocimiento se puede aplicar para sumar cargas eléctricas, determinar el sentido de un giro, calcular temperaturas, etc.

En esta unidad aprenderás a...

- Identificar con seguridad las operaciones de suma y resta, sus términos, signos y propiedades.
- Enunciar correctamente la ley de los signos de sumas y restas con números enteros.
- Resolver sumas y restas de números enteros, aplicando la ley de los signos.
- Identificar la operación y los elementos conocidos y desconocidos en la solución de problemas.
- Resolver problemas de sumas y restas en situaciones del contexto, aplicando reglas y la ley de los signos.

Datos interesantes

Se le llama deuda económica a la cantidad de dinero que se le debe a otra persona o institución.

Suma y resta de números positivos, negativos y el cero

1.1 Suma de números con igual signo

Problema

¿Cuál es el monto total de ahorro en el ejercicio **a** y cuál es la deuda total en el ejercicio **b**?

a. Ahorro B/.5 Ahorro B/.3

b. Deuda B/.5 Deuda B/.3

Solución

Si se expresa el ahorro con un número positivo y la deuda con un número negativo, las situaciones anteriores quedarían de la siguiente manera:

a. (5) + (3)

b. (−5) + (−3)

Para determinar los resultados de las operaciones realizamos el siguiente análisis:

- Si ahorro B/.5 y B/.3 en total ahorro B/.8; es decir, (5) + (3) = 8.
- Si debo B/.5 y B/.3 en total debo B/.8; es decir, (−5) + (−3) = −8.

En total hay B/.8 de ahorro.

En total hay B/.8 de deuda.

Recuerda

El valor absoluto de un número entero es el mismo número si este es positivo, pero si es negativo el valor absoluto será el opuesto de este. El valor absoluto es siempre un número positivo.

Conclusión

Para **sumar** dos números que tienen el **mismo signo**, se escribe ese signo y se suman los valores absolutos. Por ejemplo:

a. 5 + 3 = +(5 + 3) = 8 ⟶ Los dos son positivos

b. (−5) + (−3) = −(5 + 3) = −8 ⟶ Los dos son negativos

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes sumas.

a. 4 + 3
b. (−7) + (−2)
c. 6 + 12
d. (−10) + (−5)
e. 15 + 13
f. (−14) + (−23)
g. 24 + 56
h. (−32) + (−44)
i. 124 + 12
j. (−100) + (−50)
k. (−200) + (−100)
l. (−1000) + (−2000)

1.2 Suma de números con diferente signo y el cero

Problema

¿Cuál es el ahorro o deuda final en cada caso?

a. Ahorro B/.5 | Deuda B/.3

b. Ahorro B/.3 | Deuda B/.5

c. Ahorro B/.5 | Deuda B/.5

Solución

Si se expresa el ahorro con un número positivo y la deuda con un número negativo, las situaciones anteriores quedarían de la siguiente manera:

a. (5) + (−3) **b.** (3) + (−5)

c. (5) + (−5)

Para determinar los resultados de las operaciones anteriores realizamos el siguiente análisis:

a. Con los B/.5 de ahorro se pagan los B/.3 de deuda y quedan B/.2; es decir, (5) + (−3) = 2.

b. Con los B/.3 de ahorro se pagan B/.3 de deuda, pero quedan B/.2 de deuda; es decir, (3) + (−5) = −2.

c. Con los B/.5 de ahorro se pagan los B/.5 de deuda y no queda ni ahorro ni deuda; es decir, (5) + (−5) = 0.

Conclusión

Para **sumar** dos números que tienen **diferente signo**:

1. Se escribe el signo del número con mayor valor absoluto.
2. Se restan los valores absolutos, restando el menor del mayor.

Por ejemplo:

a. (5) + (−3) = +(5 − 3) = 2 → Signo + pues es el de mayor valor absoluto.

b. (3) + (−5) = −(5 − 3) = −2 → Signo − pues es el de mayor valor absoluto.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.

a. Conversen sobre situaciones cotidianas de deudas y pagos. Por ejemplo, si debo 15 balboas y pagué 10 balboas, ¿cuál es la deuda actual?

Recuerda

En los números positivos es común que el signo + no se escriba, pero se entiende que si no hay signo, el número es positivo.

¿Qué pasaría?

Al sumar dos números opuestos el resultado siempre es cero.

Por ejemplo:

a. (6) + (−6) = 0

b. (−10) + (10) = 0

c. (13) + (−13) = 0

Datos interesantes

El cero se conoce como el elemento neutro de la suma porque al sumarlo con cualquier número, el resultado siempre es igual a ese número.

Al **sumar cero con cualquier número entero**, el resultado siempre será igual al número entero. Por ejemplo:

a. 0 + (−3) = −3 **b.** (5) + 0 = 5

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes sumas.

a. 12 + (−10) **b.** (−9) + 0 **c.** (−20) + 20

Solución

a. El número de mayor valor absoluto es positivo y se resta el de menor valor absoluto del mayor. → 12 + (−10) = +(12 − 10) = 2

b. La suma con cero es igual al número. → (−9) + 0 = −9

c. La suma de opuestos es igual a cero. → (−20) + 20 = 0

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve las siguientes sumas.

a. 6 + (−3)	**b.** 8 + (−10)	**c.** (−15) + 5
d. (−2) + 7	**e.** 20 + (−4)	**f.** 10 + (−30)
g. 7 + (−7)	**h.** (−5) + 0	**i.** (−11) + 11
j. (−100) + 50	**k.** 200 + (−200)	**l.** 0 + (−35)

2. Representa cada situación mediante una suma de números enteros y resuelve el problema. Observa el ejemplo.

a. Ricardo pidió un préstamo de 500 balboas. Si ha pagado 250 balboas, ¿cuál número entero representa la deuda actual que tiene?

Suma: (−500) + 250 = −250

Respuesta (R): La deuda actual se representa con el número −250.

b. Un submarino se encuentra a 50 m bajo el nivel del mar. Si sube 15 m, ¿cuál número entero representa su altura final con respecto al nivel del mar?

c. Gabriela recibió 100 balboas por un trabajo que realizó. Si gastó 75 balboas en unas compras, ¿cuál número entero representa la cantidad de dinero que le quedó?

d. Elena le debía 5 balboas a su hermana. Si le dio 5 balboas, ¿cuál número entero representa la deuda actual que tiene?

e. Un buzo se sumerge a −12 m bajo el nivel de mar. Si sube 7 m y luego baja 7 m, ¿cuál número entero representa su altura final con respecto al nivel del mar?

1.3 Propiedad conmutativa y asociativa de la suma

Problema

Para cada actividad, ¿son iguales los resultados obtenidos en la **Operación a** y **Operación b**?

a. Operación a: $(-3) + 4$
Operación b: $4 + (-3)$

b. Operación a: $[(-5) + (-7)] + 15$
Operación b: $(-5) + [(-7) + 15]$

Solución

a. Operación a: $(-3) + 4 = +(4 - 3) = 1$
Operación b: $4 + (-3) = +(4 - 3) = 1$

b. Operación a:
$$\begin{aligned}[(-5) + (-7)] + 15 &= [-(5 + 7)] + 15\\ &= (-12) + 15\\ &= +(15 - 12)\\ &= 3\end{aligned}$$

Operación b:
$$\begin{aligned}(-5) + [(-7) + 15] &= (-5) + [+(15 - 7)]\\ &= (-5) + 8\\ &= +(8 - 5)\\ &= 3\end{aligned}$$

R: Los resultados de la **Operación a** y **Operación b** son iguales en ambos ejercicios.

Conclusión

La suma de dos números enteros positivos o negativos no depende del orden de los sumandos. A esto se le llama **propiedad conmutativa**. Es decir, si **a** y **b** son dos números enteros, entonces:

$$a + b = b + a$$

Por ejemplo, el resultado de $(-3) + 6 = 3$ es igual que el de $6 + (-3) = 3$.

La suma de varios números enteros positivos o negativos no depende de la forma en que se asocian. A esto se le llama **propiedad asociativa**. Es decir, si **a**, **b** y **c** son números enteros, entonces:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Por ejemplo, veamos que el resultado de $[(-4) + 7] + (-5) = -2$ es igual que el de $(-4) + [7 + (-5)] = -2$.

Desarrollo sostenible

Dos personas distintas pueden realizar un mismo trabajo en forma exitosa sin importar su género, su nacionalidad o creencias.

Recuerda

En las operaciones con paréntesis se resuelve primero lo que está dentro de ellos.

Cuando en una operación ya se ha utilizado paréntesis, y se requiere utilizar otro signo de agrupación se utilizan los corchetes.

¿Qué pasaría?

La resta no cumple con las propiedades conmutativa y asociativa. Por ejemplo, $4 - 2 = 2$, pero $2 - 4 = -2$. De forma similar, podemos ver que $4 - (5 - 2) = 1$, pero $(4 - 5) - 2 = -3$.

¿Qué pasaría?

Las propiedades de la suma se pueden aplicar para facilitar cálculos. Por ejemplo, en este caso se ordenan según el signo (aplicando la propiedad conmutativa) y luego se agrupan (aplicando la propiedad asociativa):

$$\begin{aligned}&(-5) + 8 + 4 + (-2)\\ &= (-5) + (-2) + 8 + 4\\ &= -(5 + 2) + (8 + 4)\\ &= (-7) + 12\\ &= +(12 - 7)\\ &= 5\end{aligned}$$

Observa cómo se hace

1. Comprueba la propiedad conmutativa mediante la siguiente suma.

$$18 + (-6)$$

Solución

Se resuelve la operación cambiando el orden de los sumandos para verificar que se obtiene el mismo resultado.

- $18 + (-6) = +(18 - 6) = 12$
- $(-6) + 18 = +(18 - 6) = 12$

2. Comprueba la propiedad asociativa mediante la siguiente suma.

$$(-10) + 5 + (-4)$$

Solución

Se resuelve la operación asociando los sumandos de dos formas distintas para verificar que se obtiene el mismo resultado.

- $$\begin{aligned}[(-10) + 5] + (-4) &= -(10 - 5) + (-4)\\ &= -(5) + (-4)\\ &= -(5 + 4)\\ &= -9\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(-10) + [5 + (-4)] &= (-10) + (5 - 4)\\ &= (-10) + 1\\ &= -(10 - 1)\\ &= -9\end{aligned}$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Explica en qué consiste la propiedad conmutativa de la suma.
- Aporta un ejemplo.

2. Explica en qué consiste la propiedad asociativa de la suma.
- Aporta un ejemplo.

3. Comprueba la propiedad conmutativa mediante las siguientes sumas.

a. $14 + 15$
b. $(-10) + (-15)$
c. $(-2) + 5$
d. $(-23) + 16$
e. $14 + (-6)$
f. $(-15) + (-42)$

4. Comprueba la propiedad asociativa mediante las siguientes sumas.

a. $7 + 3 + 11$
b. $(-6) + (-12) + (-25)$
c. $15 + (-5) + (-10)$
d. $22 + 5 + (-10)$
d. $(-2) + 8 + (-12)$
e. $(-11) + (-9) + (-20)$

5. Aplica las propiedades de la suma para simplificar los cálculos.

a. $(-6) + 4 + 1 + (-4)$
b. $(-2) + 5 + 3 + (-5)$
c. $(-6) + (-4) + 9 + (-8)$
d. $11 + (-10) + 4 + 5$
e. $12 + (-4) + 8 + (-16)$
f. $(-20) + 10 + 3 + (-2)$

¡Atención!

Ordena los sumandos de manera que puedas sumar los negativos con los negativos y los positivos con los positivos.

1.4 Resta de números enteros

Problema

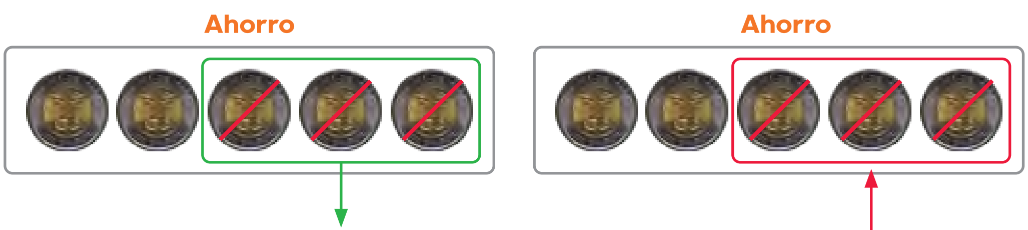
a. ¿Cómo se relacionan las operaciones 5 − 3 y 5 + (−3)?

b. ¿Cómo se relacionan las operaciones (−5) − (−3) y (−5) + (+3)?

Solución

Analicemos con la situación de ahorro y deuda.

1. Hay 5 balboas de ahorro.

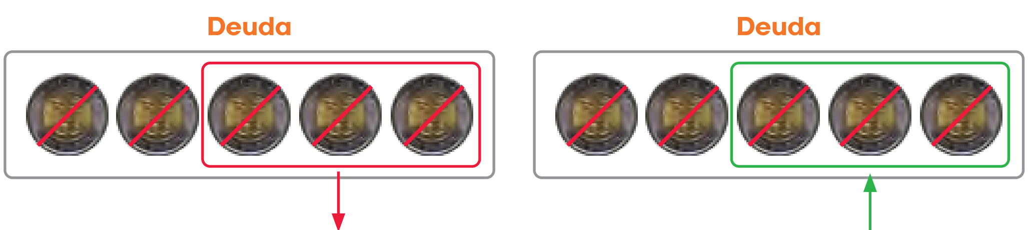


Quitar 3 balboas del ahorro resulta lo mismo que agregar 3 balboas de deuda.

Por lo tanto, la operación que representa la situación es 5 − 3 = 2 o 5 + (−3) = 2

---

2. Hay 5 balboas de deuda.



Quitar 3 balboas de deuda resulta lo mismo que agregar 3 balboas de ahorro.

Por lo tanto, la operación que representa la situación es (−5) − (−3) = −2 o (−5) + (+3) = −2

Conclusión

Al **restar números enteros** se toma en cuenta que restar un número es igual a sumar el opuesto del mismo número. Por ejemplo:

- Al resolver 16 − 20 se obtiene el mismo resultado que en 16 + (−20).

Datos interesantes

En la Antigüedad y hasta la Edad Media en Europa, los números enteros negativos no se estudiaban formalmente, porque algunas personas no comprendían muy bien cómo se podía quitar algo que no existiera, como sucede, por ejemplo, al considerar 45 − 100.

Recuerda

El opuesto de un número es aquel que posee el mismo valor absoluto, pero diferente signo. Como 3 y −3.

¿Qué pasaría?

Considera que la resta $0 - (+5)$ se escribe comúnmente como $0 - 5$, pues no es necesario escribir el signo positivo.

Al **resolver restas con el número cero**, se presentan dos casos:

- Si se resta un número del cero, la diferencia es el opuesto del sustraendo. Por ejemplo: $0 - (+5) = -5$
- Si se resta cero de un número, la diferencia es el minuendo. Por ejemplo: $(-4) - 0 = -4$

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes restas.

a. $(-7) - 10$ **b.** $25 - (-15)$ **c.** $0 - 12$

Solución

a. Se expresa como la suma del opuesto para calcular.
Así, $(-7) - 10$ es igual que $(-7) + (-10)$. $\longrightarrow$ $(-7) - 10 = -(10 + 7) = -17$

b. Se expresa como la suma del opuesto para calcular.
Así, $25 - (-15)$ es igual que $25 + (+15)$. $\longrightarrow$ $25 - (-15) = +(25 + 15) = 40$

c. Es igual al opuesto del sustraendo. $\longrightarrow$ $0 - 12 = -12$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes restas.

a. $5 - 8$ **b.** $14 - 20$ **c.** $(-5) - 2$
d. $16 - (-3)$ **e.** $(-15) - (-5)$ **f.** $24 - (-12)$
g. $25 - 50$ **h.** $0 - 18$ **i.** $(-15) - 0$
j. $0 - (-100)$ **k.** $(-100) - (-200)$ **l.** $500 - 1000$

2. Representa cada situación mediante una resta de números enteros y resuelve el problema. Observa el ejemplo.

a. Marta tiene 56 balboas. Si desea comprar un vestido que cuesta 80 balboas, ¿cuál número entero representa la cantidad de dinero que le falta?
Resta: $56 - 80 = -24$
R: La cantidad de dinero que le falta se representa con el número -24.

b. La temperatura al medio día en una ciudad era de 5 °C. Si al llegar la noche descendió 7 °C, ¿cuál número entero representa la temperatura en ese momento?

c. Carlos tenía una deuda de 2000 balboas en el banco. Si solicitó otro préstamo por 1000 balboas, ¿cuál número entero representa la deuda actual que tiene?

d. Un pez se encuentra 6 m bajo el nivel del mar. Si desciende 5 m, ¿cuál número entero representa la altura a la que se ubica respecto al nivel del mar?

1.5 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Ayuda a Marta a agrupar las operaciones con el mismo resultado para ganar en el videojuego.
   - Considera que se deben obtener 4 grupos con 4 operaciones cada uno.

(−5) − 5	50 − 60	2 − (−8)	10 − 20
50 − 50	(−3) + 8	(−8) − (−8)	5 − (−5)
(−15) + 25	10 + (−10)	(−2) + (−3)	5 − 10
(−5) + 0	(−8) − 2	(−50) + 60	(−5) + 5

2. Justifica mediante un ejemplo cada una de las siguientes afirmaciones.

   a. A diferencia de la suma, la resta de números enteros no cumple con la propiedad conmutativa.

   b. Al restar cualquier número entero negativo de sí mismo el resultado siempre será igual a cero.

3. Representa cada situación mediante una operación de números enteros y resuelve el problema.

   a. En un laboratorio, la temperatura de una sustancia es de −10 °C. Si luego de un proceso químico la temperatura aumentó en 5 °C, ¿cuál es la temperatura final de la sustancia?

   b. Un alpinista descendió 54 m desde el pico de una montaña y se detuvo a descansar. Si luego bajó 30 m más, ¿cuál número entero representa el descenso total que realizó el alpinista?

   c. Un congelador en mal estado estaba a una temperatura de 3 °C. Si luego de repararlo la temperatura bajó en 20 °C, ¿cuál es la temperatura actual del aparato?

   d. En el reporte mensual de una empresa se indicó que los ingresos fueron por 5500 balboas, mientras que los gastos reportados fueron por 7200 balboas. ¿Cuál número entero representa el cierre mensual de la empresa? Diga si fue ganancia o pérdida.

La programación de un juego de video involucra la aplicación de muchos conocimientos matemáticos.

Sumas y restas combinadas con números enteros

2.1 Sumas y restas combinadas sin paréntesis

Problema

Luis ganó 15 puntos en un juego de video, luego perdió 32 y ganó 20 más. Si finalmente perdió 5 puntos, ¿cuál número entero representa la cantidad de puntos con los que finalizó el juego?

Solución

Se plantean las operaciones involucradas en la situación una a una, sin colocar paréntesis.

Ganó 15 puntos, corresponde a un número positivo. $\longrightarrow$ 15

Perdió 23 puntos, se representa con una resta. $\longrightarrow$ $15 - 32$

Ganó 20 puntos más, corresponde a una suma. $\longrightarrow$ $15 - 32 + 20$

Perdió 5 puntos, se expresa mediante una resta. $\longrightarrow$ $15 - 32 + 20 - 5$

Se resuelve la operación anterior agregando paréntesis y convirtiendo todas las operaciones en sumas para aplicar las propiedades.

$$\begin{aligned} 15 - 32 + 20 - 5 &= 15 + (-32) + 20 + (-5) \\ &= (15 + 20) + [(-32) + (-5)] \\ &= (35) + (-37) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: La cantidad de puntos final se representa con el número -2.

Conclusión

Para **resolver sumas y restas combinadas sin paréntesis**, conviene convertir todas las operaciones en suma. Por ejemplo, $15 - 32 + 20 - 5$ se puede escribir como $15 + (-32) + 20 + (-5)$. Además, en la operación $15 - 32 + 20 - 5$, a los números 15, -32, 20 y -5 se les llama **términos**.

Con el fin de facilitar el cálculo de este tipo de operaciones se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, de manera que se suman los términos positivos entre sí, los negativos entre sí y finalmente se suma el resultado positivo y el negativo obtenidos.

Por ejemplo, en la operación $15 + (-32) + 20 + (-5)$, se suman primero los términos positivos; es decir, $15 + 20$ y luego los negativos, $[(-32) + (-5)]$.

¿Qué pasaría?

Considera que en este tipo de operaciones combinadas se omiten inicialmente los paréntesis y se colocan solamente para convertir en sumas todas las operaciones entre los términos. Sin embargo, es importante que aprendas a analizar este tipo de operaciones sin los paréntesis, pues comúnmente no se utilizan.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes sumas y restas combinadas.

a. $5 - 6 + 8 - 4$

b. $-12 + 15 + 6 + 10$

Solución

a. Se expresa en forma de suma. → $5 + (-6) + 8 + (-4)$
Se agrupan positivos y negativos. → $(5 + 4) + [(-6) + (-4)]$
Se suma. → $9 + (-10) = -1$

a. Se expresa en forma de suma. → $(-12) + 15 + 6 + 10$
Se agrupan positivos y negativos. → $(15 + 6 + 10) + (-12)$
Se suma. → $31 + (-10) = 21$

Recuerda

Cada número en la operación se llama "término". Por ejemplo, ambas operaciones en el **Observa cómo se hace** poseen 4 términos.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Determina la cantidad de términos que posee cada operación.
   - **a.** $5 + 7 - 3 - 5$
   - **b.** $7 + 4 - 2 + 9 - 3$
   - **c.** $15 + 12 - 20$
   - **d.** $-11 + 5 - 21 - 6 - 7$
   - **e.** $-6 + 3 - 5$
   - **f.** $8 - 22 + 15 - 7$
   - **g.** $1 - 8$
   - **h.** $25 - 15 + 12 - 3 + 7 - 10$

2. Resuelve las siguientes sumas y restas combinadas.
   - **a.** $8 - 5 + 9 - 12$
   - **b.** $-15 + 5 - 6 + 20$
   - **c.** $15 - 7 - 11$
   - **d.** $-12 + 5 + 15$
   - **e.** $-6 + 9 - 10 - 5 + 3$
   - **f.** $8 - 18 + 4 - 3 + 2$
   - **g.** $7 + 2 - 5 + 12 - 15$
   - **h.** $-3 + 8 + 12 - 7 - 9$

3. Representa cada situación mediante una combinación de sumas y restas y resuelve el problema. Observa el ejemplo.
   - **a.** La temperatura mínima en una ciudad en octubre fue de 4 °C, en noviembre bajó 5 °C con respecto a octubre y en diciembre bajó 3 °C más que en noviembre. Si en enero se dio un aumento de 2 °C en la temperatura mínima respecto al mes anterior, ¿cuál fue la temperatura mínima registrada en ese mes?
     Operación: $4 - 5 - 3 + 2 = -2$
     R: La temperatura mínima registrada en enero fue de -2 °C.
   - **b.** Un buzo que nada a 12 m bajo el nivel del mar observa un coral y desciende 4 m más. Luego sube 7 m para observar una mantarraya y desciende 10 m hasta llegar al lugar más profundo del sitio de observación. ¿Cuál número entero representa la profundidad de ese lugar?
   - **c.** Tatiana tiene una deuda de 250 balboas en su cuenta bancaria, si depositó 500 balboas para cancelar la deuda y luego gastó 100 balboas más, ¿cuánto dinero le quedó en la cuenta?

Recuerda

En una combinación de operaciones con paréntesis siempre se deben resolver primero las operaciones que están dentro de ellos.

2.2 Sumas y restas combinadas con paréntesis

Problema

Observa las dos formas en que se resolvió la misma operación y descubre cuál es incorrecta y por qué.

$$5 - (22 + 4) + 15$$

Estrategia 1

$$\begin{aligned} 5 - (22 + 4) + 15 &= 5 + (-22) + 4 + 15 \\ &= (5 + 4 + 15) + (-22) \\ &= 24 + (-22) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Estrategia 1

$$\begin{aligned} 5 - (22 + 4) + 15 &= 5 - 26 + 15 \\ &= (5 + 15) + (-26) \\ &= 20 + (-26) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Solución

Estrategia 1

En esta estrategia de solución se extrajeron los términos del paréntesis sin resolver la operación, lo cual es incorrecto. Cuando hay una operación dentro de paréntesis se debe resolver antes.

Estrategia 2

En este caso se solucionó en forma correcta, primero la operación del paréntesis y luego agrupando los positivos y negativos para resolver la combinación de sumas y restas.

Conclusión

Para **resolver sumas y restas combinadas con paréntesis**, se debe resolver primero las operaciones que están dentro de ellos antes de eliminarlos. Luego, se procede de forma similar que lo expuesto en la clase anterior. Se convierten todas las operaciones en una suma y se agrupan positivos y negativos para facilitar los cálculos.

Si en una misma operación hay más de un paréntesis, se deben resolver todas las operaciones dentro de ellos antes de convertir a sumas.

También puede presentarse el caso de que hayan sumas y restas combinadas dentro de un paréntesis. Por ejemplo, en la operación $15 - (6 + 4 - 11)$ se resuelve lo que está dentro del paréntesis con la estrategia conocida para luego eliminar el paréntesis.

Trabajo colaborativo

1. Trabaja en pareja.
   - a. Investiguen sobre los diferentes tipos de paréntesis que se utilizan en las combinaciones de operaciones y cuál es la prioridad en su uso.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes sumas y restas combinadas con paréntesis.

a. $-15 + (12 - 8) - (3 - 10)$ **b.** $9 - (15 - 8 + 3) - 7$

Solución

a. Se resuelven los paréntesis. → $-15 + (4) - (-7)$
Se expresa en forma de suma. → $-15 + 4 + 7$
Se agrupan positivos y negativos. → $(4 + 7) + (-15)$
Se suma. → $11 + (-15) = -4$

b. Se convierten en sumas las operaciones dentro del paréntesis. → $9 - [15 + (-8) + 3] - 7$
Se agrupa lo del paréntesis. → $9 - [(15 + 3) + (-8)] - 7$
Se resuelve el paréntesis. → $9 - 10 - 7$
Se convierte en suma y se agrupa. → $9 + [(-10) + (-7)]$
→ $9 + (-17) = -8$

Recuerda

Restar un número entero es igual que sumar el puesto, por esa razón la operación $-15 + 4 - (-7)$ se puede escribir como $-15 + 4 + 7$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes sumas y restas combinadas con paréntesis.
   a. $5 - (4 + 6) + 2$
   b. $(8 - 10) + [(-7) + 3]$
   c. $(11 + 7) - (4 + 6) - 15$
   d. $(-1) + (14 - 7 + 8)$
   e. $(16 - 7 - 13) + 3$
   f. $(3 - 5) - (5 + 6 - 2)$
   g. $[(-6) + 5 - 17] + 1$
   h. $[4 - (6 - 8 + 3)] - 5$

2. Identifica y explica cuál es el error cometido en cada procedimiento de solución. Luego resuelve la operación en forma correcta.

   a. Operación: $(15 - 7) - (8 - 10)$

$$\begin{aligned}(15 - 7) - (8 - 10) &= 15 - 7 - 8 - 10\\ &= 15 + (-7) + (-8) + (-10)\\ &= 15 + [(-7) + (-8) + (-10)]\\ &= 15 + (-25)\\ &= -10\end{aligned}$$

   b. Operación: $6 + 5 - (12 + 2 - 3)$

$$\begin{aligned}6 + 5 - (12 + 2 - 3) &= 6 + 5 + (-12) + (2 - 3)\\ &= 11 + (-12) + (-1)\\ &= 11 + [(-12) + (-1)]\\ &= 11 + (-13)\\ &= -2\end{aligned}$$

3. Representa la situación mediante una combinación de sumas y restas con paréntesis y resuelve el problema.
   a. Una empresa obtuvo ingresos por 4500 balboas y 3700 balboas durante enero y febrero. Si en esos mismos meses, los gastos fueron por 4600 balboas y 4200 balboas. ¿Cuál número entero representa las ganancias o pérdidas durante ese periodo?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Resuelvo sumas con números enteros de igual signo.			
2. Resuelvo sumas con números enteros de diferente signo y el cero.			
3. Comprendo la propiedad conmutativa de la suma.			
4. Comprendo la propiedad asociativa de la suma.			
5. Resuelvo restas con números enteros.			
6. Soluciono problemas relacionados con sumas y restas de números enteros.			
7. Resuelvo sumas y restas combinadas de números enteros sin paréntesis.			
8. Resuelvo sumas y restas combinadas de números enteros con paréntesis.			
9. Aplico las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para simplificar los cálculos de operaciones de suma y restas combinadas.			

Unidad 3

Teoría de números

Eratóstenes fue un matemático, astrónomo y geógrafo que nació en Cirene, una antigua ciudad griega. Además, fue considerado de los más sobresalientes estudiosos de su época.

Dentro de sus principales aportes a las matemáticas está la Criba de Eratóstenes, que es un método o algoritmo que permite determinar los números primos menores que un número natural dado. La Criba se trata de ir buscando los números que sean múltiplos de algún otro número y por tanto sean compuestos, para descartarlos como primos. Los números que nos queden sin descartar, serán declarados números primos. Por ejemplo, en una tabla como la de la derecha se escribieron los números hasta el 100 y con la aplicación de este método se determina que los números que quedan sin marcar son todos los números primos menores que 100.

El algoritmo propuesto por Eratóstenes, aunque no es tan utilizado actualmente en la matemática, es aplicado en otras áreas; por ejemplo, para comparar la velocidad de ejecución de diferentes lenguajes de programación en computadoras.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Criba de Eratóstenes

En esta unidad aprenderás a...

- Comprender los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
- Descomponer un número en factores primos.
- Aplicar la descomposición en factores primos para determinar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Recuerda

Los múltiplos de un número natural se obtienen al multiplicar ese número por todos los números naturales. Por ejemplo, los múltiplos de 6 se obtienen así: 6 • 1, 6 • 2, 6 • 3, ...

Los divisores de un número natural son todos los números naturales que lo dividen en forma exacta. Por ejemplo, 6 es divisor de 48 porque 48 ÷ 6 es una división exacta; es decir, que el residuo es 0 y el cociente es un número natural.

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

1.1 Conceptos básicos

Problema

a. Escribe los primeros ocho múltiplos de estos dos números: 2 y 3.
¿Cuáles múltiplos tienen en común y cuál es el menor de ellos?

b. Escribe los divisores de estos dos números: 18 y 24.
¿Cuáles divisores tienen en común y cuál es el mayor de ellos?

Solución

a. Múltiplos de 2 : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
Múltiplos de 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

Múltiplos en común: 6 y 12
El menor es 6.

b. Divisores de 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18
Divisores de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisores en común: 1, 2, 3, 6
El mayor es 6.

Conclusión

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números se llama **mínimo común múltiplo** y su abreviatura es **m. c. m.**
El mayor de los divisores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** y su abreviatura es **m. c. d.**

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina los primeros 5 múltiplos de cada pareja de números y calcula el m. c. m.

a. 2 y 5 **b.** 5 y 10 **c.** 3 y 6 **d.** 6 y 8 **e.** 7 y 21

2. Determina los divisores de cada pareja de números y calcula el m. c. d.

a. 6 y 9 **b.** 12 y 8 **c.** 18 y 15 **d.** 20 y 10 **e.** 25 y 5

1.2 Descomposición en factores primos

Problema

Representa el número 24 como una multiplicación de números primos. Se pueden repetir números primos si es necesario.

Solución

Para expresar 24 como una multiplicación de números primos, buscamos qué números primos son divisores de 24 para dividir.

- 2 es un número primo y es divisor de 24, entonces dividimos todas las veces que sea posible, así:

$$24 \div 2 = 12$$
$$12 \div 2 = 6$$
$$6 \div 2 = 3$$

- Como 3 ya no se puede dividir entre 2, dividimos entre el siguiente número primo que sería 3, así:

$$3 \div 3 = 1$$

- Al llegar a 1 nos detenemos y escribimos 24 como la multiplicación de todos los números primos entre los que se dividió, es decir:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Recuerda

Los números que tienen solo dos divisores (el 1 y el mismo número) se llaman **números primos**. Los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**.

Trabajo colaborativo

1. Trabaja en un grupo de 3 personas.
   a. Construyan una Criba de Eratóstenes para determinar todos los números primos menores que 100.

Conclusión

Cualquier número compuesto puede ser expresado como producto de números primos. A este procedimiento se le llama **descomposición en factores primos**. Para aplicar este procedimiento se siguen estos pasos:

- Se escribe el número que se desea descomponer y se traza una línea vertical a la derecha de este.
- Se determina cuál es el menor número primo que es divisor de este y se anota a la derecha de la línea.
- Se divide el número dado entre ese número primo y se anota el cociente debajo del número inicial.
- Se repite el procedimiento las veces que sea necesario hasta que el cociente sea 1. Si el número primo es divisor del cociente obtenido, se sigue dividiendo entre él mismo las veces que sea posible, en caso contrario se busca el siguiente número primo que sea divisor.
- Se escribe el número dado como el producto de los números primos.

Número por descomponer	Divisores primos
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Cocientes

Descomposición en factores primos:

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

¿Qué pasaría?

Observa que cuando las descomposiciones tienen factores repetidos estos se pueden expresar en forma de potencia. Por ejemplo: $2 \cdot 2$ se escribe como 2^2 y $3 \cdot 3$ como 3^2.

Observa cómo se hace

Determina la descomposición de estos números en factores primos.

a. 36 **b.** 60 **c.** 49 **d.** 55

Solución

a.

36	2	→ $36 \div 2 = 18$
18	2	→ $18 \div 2 = 9$
9	3	→ $9 \div 3 = 3$
3	3	→ $3 \div 3 = 1$
1		

Descomposición:
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$

b.

60	2	→ $60 \div 2 = 30$
30	2	→ $30 \div 2 = 15$
15	3	→ $15 \div 3 = 5$
5	5	→ $5 \div 5 = 1$
1		

Descomposición:
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$36 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

c.

49	7	→ $49 \div 7 = 7$
7	7	→ $7 \div 7 = 1$
1		

Descomposición:
$49 = 7 \cdot 7$
$49 = 7^2$

d.

55	5	→ $55 \div 5 = 11$
11	11	→ $11 \div 11 = 1$
1		

Descomposición:
$55 = 5 \cdot 11$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina la descomposición de los siguientes números en factores primos.

a. 12 **b.** 35 **c.** 64
d. 30 **e.** 54 **f.** 150
g. 50 **h.** 110 **i.** 77
j. 100 **k.** 20 **l.** 78
m. 16 **n.** 56 **o.** 65

2. Calcula el número que corresponde a cada descomposición.

a. $2 \cdot 2 \cdot 3$
b. $2 \cdot 3 \cdot 5$
c. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
d. $2 \cdot 3 \cdot 7$
e. $3 \cdot 11$
f. $2^3 \cdot 5^2$
g. $3^2 \cdot 7^2$
h. $2 \cdot 5$
i. $5 \cdot 3$

¡Atención!

En una potenciación, el exponente indica la cantidad de veces que se multiplica el número. Por ejemplo, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ o también $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

1.3 Máximo común divisor por descomposición en factores primos

Problema

Observa la estrategia de cálculo del m. c. d. de 8 y 12.

- Divisores de 8 : 1, 2, 4, 8
- Divisores de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Por lo tanto, el m. c. d. de 8 y 12 es 4.

Observa el proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 8 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 12 = 2 \bullet 2 \bullet 3$$

¿De qué manera se podría calcular el máximo común divisor a partir de la descomposición prima de 8 y 12?

Solución

Observa los factores en común que hay en las descomposiciones de 8 y 12.

$$8 = \boxed{2} \bullet \boxed{2} \bullet 2$$
$$12 = \boxed{2} \bullet \boxed{2} \bullet 3$$

De esa manera se determina que el m. c. d. se puede calcular multiplicando los factores primos que tienen en común; es decir, $2 \bullet 2 = 4$.

Conclusión

Para **calcular el m. c. d. de dos o más números** de una forma más simple, se aplica un procedimiento similar al de la descomposición en factores primos, de acuerdo con los siguientes pasos:
- Se colocan todos los números dados a la izquierda de la línea.
- Se identifica un factor primo que sea divisor de **todos los números dados a la vez**.
- Se dividen los números entre el factor primo y se repite el procedimiento las veces que sea posible.
- Se multiplican los factores primos y el resultado es el m. c. d.

Datos interesantes

Los ingenieros industriales son profesionales que se encargan de optimizar el funcionamiento de empresas o procesos de producción. Como parte de su trabajo siempre deben buscar la forma más ágil de llevar a cabo un procedimiento. Muchos algoritmos matemáticos, como el de esta clase, permiten también simplificar la búsqueda de un dato.

Desarrollo sostenible

La búsqueda de estrategias para reducir procesos en las fábricas contribuye tanto a la economía como a la sostenibilidad del ambiente, pues permite la disminución de gastos innecesarios de energía y reduce la generación de contaminantes.

¿Qué pasaría?

Para indicar cuál es el m. c. d. de dos o más números, estos se colocan entre paréntesis, separados por comas, luego de la abreviatura. Si son 3 o más números se escriben de forma similar.

¡Atención!

En el ejemplo **a** no se continúa, pues no existe un número primo que divida al 2 y al 3 a la vez. De la misma manera, en **b**, no hay un número primo que divida a 6, 2 y 5 a la vez.

Observa cómo se hace

Encuentra el m. c. d. para cada grupo de números a través de la descomposición en factores primos.

a. 12 y 18 **b.** 72, 24 y 60

Solución

a.

12	18	2	→ 12 ÷ 2 = 6 y 18 ÷ 2 = 9
6	9	3	→ 6 ÷ 3 = 2 y 9 ÷ 3 = 3
2	3		

m. c. d. (12, 18) = 2 • 3 = 6

b.

72	24	60	2	→ 72 ÷ 2 = 36, 24 ÷ 2 = 12 y 60 ÷ 2 = 30
36	12	30	2	→ 36 ÷ 2 = 18, 12 ÷ 2 = 6 y 30 ÷ 2 = 15
18	6	15	3	→ 18 ÷ 3 = 6, 12 ÷ 2 = 6 y 30 ÷ 2 = 15
6	2	5		

m. c. d. (72, 24, 60) = 2 • 2 • 3 = 12

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Calcula el m. c. d. por descomposición en factores primos.

a. 12 y 15 **b.** 9 y 27 **c.** 8 y 20
d. 44 y 66 **e.** 30 y 36 **f.** 10 y 20
g. 32 y 24 **h.** 50 y 100 **i.** 10, 15 y 20
j. 6, 12 y 30 **k.** 10, 50 y 120 **l.** 15, 30, 90

2. Explica cuál es el error en cada cálculo del m. c. d. y determina el valor correcto.

a.

20	30	2
10	15	2
5	15	5
1	3	

→ m. c. d. (20, 30) = 2 • 2 • 5
= 20

b.

36	72	108	2
18	36	54	2
9	18	27	3
3	6	9	3
1	2	3	

→ m. c. d. (36, 72, 108) = 2 • 3
= 6

1.4 Mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos

Problema

Observa la estrategia de cálculo del m. c. m. de 8 y 12.

- Múltiplos de 8 : 8, 16, 24, 32, 40...
- Múltiplos de 12 : 12, 24, 36, 48...
- Por lo tanto, el m. c. m. de 8 y 12 es 24.

Observa el proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

¿De qué manera se podría calcular el mínimo común múltiplo a partir de la descomposición prima de 8 y 12?

Solución

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\qquad$ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

El m. c. m. de 8 y 12 se puede calcular multiplicando los números primos diferentes en cada descomposición, de manera que se tomen en cuenta todos. Es decir, m. c. m. (8, 12) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, pues ahí se están considerando los tres factores primos de 8 y los tres del 12.

Conclusión

Para **calcular el m. c. m. de dos o más números** de una forma más simple, se aplica un procedimiento similar al de la descomposición en factores primos, de acuerdo con los siguientes pasos:

- Se colocan todos los números dados a la izquierda de la línea.
- Se identifican factores primos que sean divisores de todos los números dados a la vez y se divide.
- Si no hay factores primos comunes a todos los números, se descompone cada uno o los que sean divisibles entre un número primo y los que no, se bajan, para luego dividirlos entre otro número primo, renglón por renglón, hasta llegar a 1 al final de todos los casos.
- Se multiplican los factores primos y el resultado es el m. c. m.

Datos interesantes

El cálculo del mínimo común múltiplo te será de utilidad posteriormente para resolver operaciones entre fracciones.

¡Atención!

Tomar en cuenta todos los factores de cada descomposición no es juntarlos todos, sino que todos estén presentes. Por ejemplo, en $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ se pueden observar los tres factores de 8 y los tres factores de 12.

Recuerda

Un número primo solo es divisible entre 1 y él mismo; por esa razón, si se obtiene un número primo al final de una descomposición, solo se podrá dividir entre él mismo.

¿Qué pasaría?

Para indicar cuál es el m. c. m. de dos o más números, se escribe en forma similar que el m. c. d., colocando los números entre paréntesis seguidos de la abreviatura.

Observa cómo se hace

Encuentra el m. c. m. para cada grupo de números a través de la descomposición en factores primos.

a. 20 y 24 **b.** 2, 4 y 6

Solución

a.

20	24	2
10	12	2
5	6	2
5	3	3
5	1	5
1	1	

Se baja el 5

Se baja el 5

1 al final de cada caso

Se descomponen por separado cuando no tienen factores en común. Bajando el número que no permita descomponerse por el factor en ese renglón.

m. c. m. (20, 24) = 2 • 2 • 2 • 3 • 5 = 120

b.

2	4	6	2
1	2	3	2
	1	3	3
		1	

Se baja el 3

1 al final de cada caso

Se descomponen por separado cuando no tienen factores en común. Bajando el número que no permita descomponerse por el factor en ese renglón.

m. c. m. (2, 4, 6) = 2 • 2 • 3 = 12

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Calcula el m. c. m. por descomposición en factores primos.

a. 12 y 18 **b.** 9 y 27 **c.** 8 y 20
d. 12 y 16 **e.** 15 y 20 **f.** 6 y 21
g. 7 y 14 **h.** 6 y 8 **i.** 5 y 15
j. 2, 4 y 10 **k.** 9, 12 y 24 **l.** 6, 15 y 20

2. Explica cuál es el error en cada cálculo del m. c. m. y determina el valor correcto.

a.

48	16	2
24	8	2
12	4	2
6	2	2
3	1	

m. c. m. (48, 16) = 2 • 2 • 2 • 2
= 16

b.

12	24	2
6	12	2
3	6	3
1	3	2
	1	3

m. c. m. (12, 24) = 2 • 2 • 3 • 2 • 3
= 72

1.5 Aplicación del m. c. d. y del m. c. m.

Problema

En una fiesta hay 126 niños y 12 dirigentes. Si se quiere formar la mayor cantidad de grupos de manera equitativa (la misma cantidad de niños y dirigentes en cada uno), ¿cuántos grupos se formarían?, ¿cuántos niños habrá en cada grupo?

Solución

Como cada grupo debería de tener la misma cantidad de niños, entonces el número de grupos debe ser un divisor de la cantidad de niños. De la misma manera, el número de grupos debe ser divisor de la cantidad total de dirigentes. Por lo tanto, el número de grupos debe ser un divisor común de 126 y 12, pero como se quiere la mayor cantidad de grupos, este divisor debe ser el máximo común divisor de 126 y 12. Es decir m. c. d. (126, 12) = 2 • 3 = 6.

R: Se formarían 6 grupos con 21 niños en cada uno.

126	12	2
63	6	3
21	2	
↑ niños por grupo	↑ maestros por grupo	

Conclusión

Se puede utilizar el **m. c. d. y el m. c. m. para resolver problemas** del entorno. Ciertas características de la situación pueden dar una idea del procedimiento que se debe utilizar:

- En grupos equitativos o al hablar de máximos conviene usar el m. c. d.
- En situaciones de coincidir o de mínimos conviene usar el m. c. m.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Se repartirán equitativamente 90 cuadernos y 72 lápices entre la mayor cantidad de niños que se pueda. ¿Entre cuántos niños se pueden repartir? ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices recibirá cada niño?
2. Carlos hornea galletas y las empaqueta para venderlas; si ha hecho 90 galletas de vainilla y 60 de chocolate, y cada paquete debe ser idéntico, ¿cuál es el máximo número de paquetes que se pueden preparar?, ¿cuántas galletas de cada sabor debe tener un paquete cualquiera?
3. José va a jugar fútbol cada 6 días y Carlos cada 21 días. Si hoy coincidieron en ir a jugar, ¿cuántos días pasarán para que vuelvan a coincidir?
4. Para la fiesta de cumpleaños de Julia se quieren comprar vasos y platos. Los vasos vienen en paquetes de 6 unidades, mientras que los platos en paquetes de 8 unidades; considerando que el número de platos y vasos debe ser el mismo y el mínimo posible, ¿cuál es la cantidad de platos y vasos que se tendrán?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Comprendo qué es el mínimo común múltiplo de dos números.			
2. Comprendo qué es el máximo común divisor de dos números.			
3. Descompongo un número en factores primos.			
4. Aplico la descomposición en factores primos para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números.			
5. Aplico la descomposición en factores primos para calcular el máximo común divisor de dos o más números.			
6. Resuelvo problemas mediante el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.			

Unidad 4

Más operaciones con números enteros

El planteamiento formal de las reglas de la multiplicación y la división fue establecido por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler; en cambio la justificación de las reglas de la multiplicación fueron replanteadas por diferentes matemáticos, entre ellos los franceses Laplace y D'Alembert. Sin embargo, es en 1985 que se hizo la justificación a partir de patrones numéricos por Crowley y Dunn.

A partir de las reglas de la multiplicación de números negativos, se ha podido facilitar el trabajo algebraico y la modelación de situaciones del entorno para solucionar problemas de la vida cotidiana.

Leonhard Euler (1707-1783)

En esta unidad aprenderás a...

- Identificar las operaciones de multiplicación y división, sus términos, signos y propiedades.
- Enunciar correctamente la ley de los signos de multiplicaciones y divisiones con números enteros.
- Resolver multiplicaciones y divisiones de números enteros, aplicando la ley de los signos.
- Identificar la operación y los elementos conocidos y desconocidos en la solución de problemas.
- Resolver problemas de multiplicación y división en situaciones del contexto, aplicando reglas y la ley de los signos.
- Deducir el concepto de potenciación a través de multiplicación de factores iguales.
- Construir el concepto de radicación a partir de la potenciación.
- Resolver potenciaciones y radicaciones de números enteros, aplicando la definición y la ley de los signos.
- Resolver operaciones combinadas de números enteros aplicando el procedimiento.
- Resolver problemas de situaciones concretas que involucren las operaciones básicas.

Recuerda

En primaria se usó con mayor frecuencia el símbolo × para denotar la multiplicación. Considera que de ahora en adelante solamente se utilizará el punto (•) para referirse a esta operación. Además, se omitirá el uso de los paréntesis para los números negativos.

Multiplicación, división, potenciación y radicación

1.1 Multiplicación de números con diferente signo

Problema

Observa la secuencia de números y analiza, ¿qué números deben ir en los recuadros vacíos?

$2 \cdot 2 = \boxed{4}$ $2 \cdot 1 = \boxed{2}$ $2 \cdot 0 = \boxed{0}$ $2 \cdot -1 = \boxed{}$ $2 \cdot -2 = \boxed{}$

Solución

La secuencia de números sigue un patrón de restar 2 cada vez. Es decir:

$2 \cdot 2 = \boxed{4} \xrightarrow{-2} 2 \cdot 1 = \boxed{2} \xrightarrow{-2} 2 \cdot 0 = \boxed{0} \xrightarrow{-2} 2 \cdot -1 = \boxed{-2} \xrightarrow{-2} 2 \cdot -2 = \boxed{-4}$

Datos interesantes

Para recordar esta ley de signos puedes decirla así: "Al multiplicar signos distintos el resultado es negativo".

Conclusión

Para **multiplicar números enteros con diferente signo**, se multiplican sus valores absolutos y al resultado se le coloca el signo de negativo. Por ejemplo:

- $2 \cdot -3 = -(2 \cdot 3) = -6$
- $-5 \cdot 8 = -(5 \cdot 8) = 40$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.
   a. $6 \cdot -2$
   b. $-4 \cdot 8$
   c. $-9 \cdot 7$
   d. $-5 \cdot 5$
   e. $6 \cdot -4$
   f. $7 \cdot -3$
   g. $10 \cdot -9$
   h. $-3 \cdot 11$
   i. $-12 \cdot 5$
   j. $-23 \cdot 2$
   k. $-5 \cdot 15$
   l. $100 \cdot -6$

2. Indica si la afirmación es falsa o verdadera.
   a. El resultado de $-7 \cdot 6$ es un número negativo.
   b. El resultado de $7 \cdot -6$ es un número positivo.
   c. Al multiplicar un número negativo por uno positivo el resultado es positivo.
   d. Al multiplicar un número positivo por uno negativo el resultado es negativo.

1.2 Multiplicación de números con igual signo

Problema

Observa la secuencia de números y analiza, ¿qué números deben ir en los recuadros vacíos?

$-4 \bullet 2 = \boxed{-8}$ $\quad -4 \bullet 1 = \boxed{-4}$ $\quad -4 \bullet 0 = \boxed{0}$ $\quad -4 \bullet -1 = \boxed{}$ $\quad -4 \bullet -2 = \boxed{}$

Solución

La secuencia de números sigue un patrón de sumar 4 cada vez. Es decir:

$-4 \bullet 2 = \boxed{-8} \xrightarrow{+4} -4 \bullet 1 = \boxed{-4} \xrightarrow{+4} -4 \bullet 0 = \boxed{0} \xrightarrow{+4} -4 \bullet -1 = \boxed{4} \xrightarrow{+4} -4 \bullet -2 = \boxed{8}$

Conclusión

Para **multiplicar números enteros con igual signo**, se multiplican sus valores absolutos y el resultado se considera positivo. Por ejemplo:

- $2 \bullet 3 = 2 \bullet 3 = 6$
- $5 \bullet 8 = 5 \bullet 8 = 40$
- $-2 \bullet -3 = 2 \bullet 3 = 6$
- $-5 \bullet -8 = 5 \bullet 8 = 40$

Datos interesantes

Para recordar esta ley de signos puedes decirla así: "Al multiplicar signos iguales el resultado es positivo".

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.
   a. $-7 \bullet -2$
   b. $-4 \bullet -9$
   c. $9 \bullet 8$
   d. $4 \bullet 4$
   e. $9 \bullet 9$
   f. $-11 \bullet -6$
   g. $10 \bullet 5$
   h. $-2 \bullet -12$
   i. $-13 \bullet -4$
   j. $-20 \bullet -5$
   k. $7 \bullet 16$
   l. $-100 \bullet -3$

2. Indica si la afirmación es falsa o verdadera.
   a. El resultado de $-7 \bullet -6$ es un número negativo.
   b. El resultado de $-7 \bullet -6$ es un número positivo.
   c. Al multiplicar un número negativo por uno negativo el resultado es positivo.
   d. Al multiplicar un número positivo por uno positivo el resultado es negativo.

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Investiguen sobre los orígenes del número cero.
   b. Compartan los datos que les parezcan más interesantes en la próxima clase.

1.3 Multiplicaciones que incluyen -1, 0 y 1

Problema

Observa la secuencia de números y analiza, ¿qué números deben ir en los recuadros vacíos?

$-1 \bullet 1 = \boxed{-1} \quad -1 \bullet 2 = \boxed{-2} \quad -1 \bullet 3 = \boxed{-3} \quad -1 \bullet 4 = \boxed{} \quad -1 \bullet 5 = \boxed{}$

Solución

La secuencia de números sigue un patrón de restar 1 cada vez. Es decir:

$-1 \bullet 1 = \boxed{-1} \xrightarrow{-1} -1 \bullet 2 = \boxed{-2} \xrightarrow{-1} -1 \bullet 3 = \boxed{-3} \xrightarrow{-1} -1 \bullet 4 = \boxed{-4} \xrightarrow{-1} -1 \bullet 5 = \boxed{-5}$

Datos interesantes

El 1 es llamado el elemento neutro de la multiplicación porque el resultado no cambia, es decir, es el mismo número por el que se multiplica, mientras que el 0 es el **elemento absorbente**, porque al multiplicar por 0 el resultado es el mismo 0.

Conclusión

El resultado de multiplicar cualquier número entero por -1 es el opuesto del número. Además, si se multiplica por 1, el resultado es el mismo número y si se multiplica por 0 el resultado es 0. En forma simbólica esto se representa así:

Si **a** es un número entero, entonces:

- a • 0 = 0
- a • 1 = a
- a • -1 = -a
- 0 • a = 0
- 1 • a = a
- -1 • a = -a

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.
   a. -7 • 1
   b. 8 • 0
   c. 12 • -1
   d. 0 • 15
   e. -1 • -10
   f. 1 • 25
   g. -32 • -1
   h. 0 • 26
   i. -34 • 1
   j. 0 • 65
   k. 41 • -1
   l. 1 • -54

1.4 Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

Problema

Determina qué diferencia hay entre el desarrollo de las operaciones y el resultado de la **Operación a** con el de la **Operación b**.

Operación a: $(-3 \cdot 2) \cdot 4$ Operación b: $-3 \cdot (2 \cdot 4)$

Solución

La diferencia entre las operaciones es la forma en que están agrupados los factores.

Operación a: $(-3 \cdot 2) \cdot 4 = -6 \cdot 4 = -24$

Operación b: $-3 \cdot (2 \cdot 4) = -3 \cdot 8 = -24$

R: Los resultados son iguales en ambas operaciones.

Recuerda

En una multiplicación cada uno de los números que se multiplican se llaman **factores**.

Conclusión

Al igual que la suma, la multiplicación con números enteros también cumple con la **propiedad conmutativa** y la **propiedad asociativa**. En forma simbólica esto se representa así:

Si **a**, **b** y **c** son números enteros, entonces:

- $a \cdot b = b \cdot a$ → Conmutatividad
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ → Asociatividad

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Comprueba la propiedad conmutativa mediante las siguientes multiplicaciones.
   - a. $8 \cdot -2$
   - b. $-12 \cdot -4$
   - c. $-5 \cdot 11$
   - d. $21 \cdot 3$
   - e. $6 \cdot -42$
   - f. $-54 \cdot -10$

2. Comprueba la propiedad asociativa mediante las siguientes multiplicaciones.
   - a. $-2 \cdot 4 \cdot -5$
   - b. $3 \cdot 6 \cdot -7$
   - c. $9 \cdot -3 \cdot -2$
   - d. $-5 \cdot -3 \cdot -8$
   - e. $-11 \cdot 6 \cdot 8$
   - f. $-12 \cdot -7 \cdot 2$

¡Atención!

Utiliza paréntesis para agrupar los factores en dos formas distintas y comprobar que los resultados obtenidos en ambos casos son iguales.

Recuerda

Al resultado de una multiplicación también se le llama **producto**.

1.5 Signo del producto según el número de factores de la multiplicación

Problema

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. 2 • 3 • 4 • 10
b. −2 • −3 • −4 • 10
c. −2 • 3 • 4 • 10
d. −2 • −3 • −4 • −10

¿Qué relación existe entre la cantidad de números negativos y el signo del producto de la multiplicación?

Solución

a. 2 • 3 • 4 • 10 = 240
b. −2 • −3 • −4 • 10 = −240
c. −2 • 3 • 4 • 10 = −240
d. −2 • −3 • −4 • −10 = 240

Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el producto es negativo.

Conclusión

- Cuando hay una cantidad par de factores negativos en una multiplicación, el signo del producto es positivo. Por ejemplo:
  −5 • −2 • 7 • 10 → El producto será positivo porque hay 2 factores negativos y 2 es un número par.
- Cuando hay una cantidad impar de factores negativos en la multiplicación, el signo del producto es negativo. Por ejemplo:
  −5 • −2 • −7 • 10 → El producto será negativo porque hay 3 factores negativos y 3 es un número impar.

Recuerda

Los números pares son 0, 2, 4, 6, 8...

Los números impares son 1, 3, 5, 7, 9...

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Clasifica las siguientes multiplicaciones en dos grupos: Las que tienen un producto positivo y las que tienen un producto negativo.
   - No debes resolver las operaciones.

a. −7 • 1 • −9 • 9
b. 8 • −6 • 5 • 3
c. 12 • −1 • −7 • −10
d. −4 • −7 • −5 • −15
e. −1 • 6 • 3 • −10
f. 4 • −8 • −6 • 25
g. −15 • −9 • 7 • −1
h. −70 • −50 • 26
i. −34 • 24 • 10
j. 12 • −6 • 65
k. 41 • −13 • −8 • 6 • −2
l. 5 • −54 • −3 • −9 • −8

1.6 Potencia de un número entero

Problema

El producto de multiplicar un número por sí mismo 2 o 3 veces se representa de la siguiente forma:

$4 \bullet 4 = 4^2$ $\qquad$ $4 \bullet 4 \bullet 4 = 4^3$

¿Cómo se representan las siguientes multiplicaciones?

a. $-4 \bullet -4$ $\qquad$ **b.** $-4 \bullet -4 \bullet -4$

Solución

a. $-4 \bullet -4 = (-4)^2$ → $(-4)^2$ representa −4 multiplicado 2 veces

b. $-4 \bullet -4 \bullet -4 = (-4)^3$ → $(-4)^3$ representa −4 multiplicado 3 veces

Conclusión

La multiplicación de un número entero por sí mismo, cierta cantidad de veces, se representa con la operación llamada **potenciación**. En esta operación se identifica la base, que es el número que se multiplica, el exponente, que indica la cantidad de veces y la potencia que es el resultado. Por ejemplo:

$$\text{base} \leftarrow (-4)^{3 \;\to\; \text{exponente}} = -64 \rightarrow \text{potencia}$$

Cálculo de una potencia

Para determinar el valor de una potencia de base entera, se multiplica la base por sí misma la cantidad de veces que indique el exponente. Para simplificar el cálculo, si la base es negativa, se multiplica omitiendo el signo y se coloca el signo en el resultado según las leyes que se indican abajo.

Signo de una potencia

El signo de la potencia se determina según el exponente:

- Si el exponente es un número par y la base negativa, la potencia es positiva. Por ejemplo, $(-3)^4$ es positiva porque el exponente 4 es par.
- Si el exponente es un número impar y la base negativa, la potencia es negativa. Por ejemplo, $(-3)^5$ es negativa porque el exponente 5 es impar.
- Si la base es positiva, no importa si el exponente es par o impar, el resultado siempre va ser positivo. Por ejemplo, $(3)^4 = 81$ y $(7)^3 = 343$.

Recuerda

A la potencia de exponente 2 se le llama **potencia cuadrada**, y a la potencia de exponente 3 se le llama **potencia cúbica**. Por ejemplo, $(-4)^2$ se lee "el cuadrado de menos cuatro" o "menos cuatro al cuadrado" y $(-4)^3$ se lee "el cubo de menos cuatro" o "menos cuatro al cubo".

¿Qué pasaría?

Al escribir una potenciación en la cual la base es un número negativo, este se debe colocar dentro de paréntesis. Por ejemplo, de la siguiente manera: $(-4)^3$. Pues no es lo mismo -4^3 que $(-4)^3$.

¡Atención!

Observa que el exponente indica la cantidad de veces que se multiplica la base. En la potencia $(-3)^4$ se repite 4 veces, que es un número par y por eso el resultado es positivo. En $(-3)^5$ se repite 5 veces, que es un número impar y por eso el resultado es negativo.

Observa cómo se hace

Expresa cada multiplicación en forma de potenciación y viceversa.

a. $-2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2$ → La base es -2 y el exponente 4 → $(-2)^4$
b. $-1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1$ → La base es -1 y el exponente 5 → $(-1)^5$
c. $(8)^2$ → Se multiplica dos veces 8 → $8 \cdot 8$
d. $(-5)^3$ → Se multiplica tres veces -5 → $-5 \cdot -5 \cdot -5$

Determina el resultado de cada potenciación.

a. $(6)^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$
$= 216$ → El resultado es positivo porque la base es positiva.

b. $(-3)^2 = -3 \cdot -3$
$= 9$ → El resultado es positivo porque el exponente es par.

c. $(-2)^5 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2$
$= -32$ → El resultado es negativo porque el exponente es impar.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Expresa cada multiplicación en forma de potenciación.
a. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
b. $-2 \cdot -2 \cdot -2$
c. $10 \cdot 10$
d. $-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3$
e. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$
f. $-1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1$

2. Expresa cada potenciación en forma de multiplicación.
a. $(-9)^5$
b. 4^3
c. $(-6)^6$
d. 2^8
e. $(-11)^4$
f. $(-15)^7$

3. Indica si la potencia es negativa o positiva, sin resolver la potenciación.
a. $(-4)^3$
b. $(-8)^5$
c. $(-3)^8$
d. $(-5)^6$
e. $(-12)^{10}$
f. $(-20)^{11}$

4. Calcula el resultado de las siguientes potenciaciones.
a. 6^3
b. $(-2)^6$
c. $(-3)^4$
d. 10^2
e. $(-3)^5$
f. $(-4)^2$

5. Indica si la afirmación es falsa o verdadera.
a. Toda potenciación de base par es positiva.
b. Toda potenciación de exponente impar es negativa.
c. La potenciación de cualquier número positivo es un número positivo.
d. Cualquier potenciación de exponente 2 es positiva.
e. Cualquier potenciación de exponente 3 es negativa.
f. Si una potencia es negativa, el exponente es impar.

1.7 Raíz de un número entero

Problema

a. Si la potencia cuadrada de un número entero es 25, ¿cuál puede ser ese número?
b. Si la potencia cúbica de un número entero es 8, ¿cuál puede ser ese número?

Solución

a. Descomponemos la potencia en factores primos para observar la forma que tiene.
Así, se obtiene que $25 = 5^2$.
Sin embargo, considerando la ley de signos para las potencias, sabemos que $(-5)^2$ también es igual a 25.
Por lo tanto, el número entero puede ser 5 o también -5.

25	5
5	5
1	

b. Descomponemos la potencia en factores primos para observar la forma que tiene.
Así, se obtiene que $8 = 2^3$.
En este caso, como el exponente es impar (3), la potenciación de base negativa no es igual; es decir, 8 no es igual a $(-2)^3$. Por lo tanto, el número entero solo puede ser 2.

8	2
4	2
2	2
1	

Conclusión

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación. Si **a** y **b** son dos números enteros y **n** un número natural, de manera que $a^n = b$, entonces se tiene que:

$$\text{índice} \leftarrow \sqrt[n]{b} = a \rightarrow \text{raíz}$$

subradical o radicando

Para calcular una raíz se descompone el subradical en factores primos para luego extraer los factores que sean posibles, dividiendo el exponente de cada factor primo entre el índice. Para realizar este procedimiento se aplican estas dos propiedades de las raíces:

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$ → Raíz de una potencia
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ → Raíz de un producto

Recuerda

Según la ley de signos para las potencias, se puede deducir que las potenciaciones con bases opuestas pero exponentes pares iguales, tienen el mismo resultado. Por ejemplo:

$(5)^2 = (-5)^2$

$(3)^2 = (-3)^2$

Datos interesantes

Cuando el índice de una raíz es par se pueden obtener dos resultados distintos, uno negativo y otro positivo, sin embargo, en este caso solo se trabajará con la raíz positiva, que también es conocida como la **raíz principal**.

¿Qué pasaría?

Cuando el índice de una radicación es 2, la raíz recibe el nombre de **raíz cuadrada** y no es necesario anotar ese número para indicar el índice. Es decir, cuando en una raíz no aparece el índice, se asume que es una raíz cuadrada. Por ejemplo, $\sqrt{25}$ es la raíz cuadrada de 25.

Cuando el índice de una radicación es 3, la raíz recibe el nombre de **raíz cúbica**, si el índice es 4, se llama raíz cuarta, si es 5, es raíz quinta y así sucesivamente.

Observa cómo se hace

Determina la radicación que se relaciona con cada potenciación.

a. $5^2 = 25 \rightarrow \sqrt[2]{25} = 5$ **b.** $2^3 = 8 \rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

c. $4^4 = 256 \rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$ **d.** $1^5 = 1 \rightarrow \sqrt[5]{1} = 1$

Calcula cada raíz.

a. $\sqrt{9}$

9	3
3	3
1	

Descomposición del radicando en factores primos:

$9 = 3^2$

$\sqrt{9} = \sqrt{3^2}$

$= 3^{2 \div 2}$ Propiedad raíz de una potencia

$= 3$

b. $\sqrt[3]{729}$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Descomposición del radicando en factores primos:

$729 = 3^6$

c. $\sqrt{225}$

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Descomposición del radicando en factores primos:

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2}$

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2}$ Propiedad raíz de un producto

$= 3 \cdot 5$ Propiedad raíz de una potencia

$= 15$

d. $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6}$

$= 3^{6 \div 3}$ Propiedad raíz de una potencia

$= 3^2$

$= 9$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina la radicación que se relaciona con cada potenciación.

a. $6^2 = 36$ **b.** $5^3 = 125$ **c.** $4^4 = 256$

d. $10^5 = 100\ 000$ **e.** $15^2 = 225$ **f.** $11^3 = 1331$

2. Calcula el resultado de las siguientes radicaciones.

a. $\sqrt{16}$ **b.** $\sqrt[3]{27}$ **c.** $\sqrt[4]{256}$

d. $\sqrt{144}$ **e.** $\sqrt[3]{216}$ **f.** $\sqrt[5]{32}$

g. $\sqrt{121}$ **h.** $\sqrt{256}$ **i.** $\sqrt[3]{1000}$

j. $\sqrt{196}$ **k.** $\sqrt{400}$ **l.** $\sqrt{625}$

1.8 División de números enteros

Problema

Piensa qué número debe ir en cada recuadro.

$6 \div 2 = 3$ porque $2 \cdot 3 = 6$

$-6 \div -2 = \square$ porque $-2 \cdot \square = -6$

$-6 \div 2 = \square$ porque $2 \cdot \square = -6$

$6 \div -2 = \square$ porque $-2 \cdot \square = 6$

Solución

Aplicando la ley de signos para las multiplicaciones de números de igual signo y de distinto signo se obtiene lo siguiente.

$-6 \div -2 = 3$ porque $-2 \cdot 3 = -6$

$-6 \div 2 = -3$ porque $2 \cdot -3 = -6$

$6 \div -2 = -3$ porque $-2 \cdot -3 = 6$

Conclusión

Para **dividir números enteros**, se divide el valor absoluto de ambos y al cociente se le coloca el signo según la misma regla que se emplea en la multiplicación. Es decir, si se dividen números del mismo signo el cociente será positivo, si son de distinto signo, el cociente será negativo. Por ejemplo:

- $-45 \div -9 = 5$
- $64 \div -4 = -14$
- $-100 \div 25 = -4$

Recuerda

Al multiplicar números de igual signo, el producto será positivo. Al multiplicar números de distinto signo el producto será negativo.

Datos interesantes

Al dividir cero entre cualquier número diferente de cero, el cociente es cero. Por ejemplo, $0 \div -6 = 0$. En caso de dividir cualquier número entre 0, la operación es indefinida, es decir, no se puede hacer.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes divisiones.

a. $50 \div -2$	b. $-125 \div 5$	c. $75 \div -15$
d. $-35 \div 7$	e. $240 \div 8$	f. $-4000 \div -4$
g. $-100 \div -20$	h. $-210 \div -3$	i. $-5000 \div 1000$

2. Escribe dos divisiones de números enteros en las que el cociente sea negativo y dos en las que el cociente sea positivo.

1.9 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Clasifica las siguientes operaciones según las que tienen un resultado positivo y las que tienen un resultado negativo.
   - No debes resolverlas.

-150 • -30 | 150 ÷ -30 | 150 ÷ 30 | 26 • 13

-26 ÷ 13 | 26 ÷ -13 | 26 • -13

-26 ÷ -13 | -150 • 30

-150 ÷ -30 | -26 • 13 | 150 • -30

150 • 30 | 26 ÷ 13 | -26 • -13 | -150 ÷ 30

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a. $(-5)^3$	b. $\sqrt{25}$	c. 8^4	d. $\sqrt[3]{64}$
e. $(-10)^2$	f. $\sqrt[4]{625}$	g. $(-3)^5$	h. $\sqrt{324}$

3. Represente cada situación mediante una operación de números enteros y resuelve el problema.
   - Observa el ejemplo.

   a. En un videojuego se registra una pérdida de 10 puntos. Si después de realizar una misión los puntos perdidos se reducen a la mitad, ¿cuál número entero representa los puntos perdidos en ese momento?
   Operación: $-10 \div 2 = -5$
   R: Los puntos perdidos se representan con el número -5.

   b. Un pez se ubica 10 cm debajo del nivel del agua de una pecera. Si un momento después triplicó su profundidad, ¿cuál número entero representa la ubicación del pez respecto al nivel del agua?

   c. En el mes de enero, una empresa reportó pérdidas por 4000 balboas. Si en febrero las pérdidas se redujeron a la cuarta parte respecto a enero, ¿cuál número entero representa las pérdidas de ese mes?

   d. Elena gastó 20 balboas en una camisa. Si gastó cinco veces más en un par de zapatos, ¿cuál número entero representa lo que gastó en los zapatos?

Operaciones combinadas

2.1 Operaciones con multiplicación y división

Problema

Realiza la siguiente operación que combina multiplicación y división:

$$-45 \cdot 6 \div 18$$

Solución

- Se resuelve primero la multiplicación.

$$-45 \cdot 6 = -270$$

- El resultado anterior se divide entre 18.

$$-270 \div 18 = -15$$

- Así, $-45 \cdot 6 \div 18 = -15$.

Conclusión

Para resolver **operaciones que combinan multiplicación y división de números enteros**, se resuelven en el orden en que aparecen de izquierda a derecha, considerando las reglas de los signos tanto para la multiplicación como para la división.

Observa cómo se hace

Resuelve cada operación que combina multiplicación y división.

a. $72 \div -4 \cdot -12 = (72 \div -4) \cdot -12$
$= -18 \cdot -12$
$= 216$

b. $6 \cdot 15 \div -3 \div 3 = (6 \cdot 15) \div -3 \div 3$
$= (90 \div -3) \div 3$
$= -30 \div 3$
$= -10$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división.

a. $60 \div -3 \cdot 5$ **b.** $-18 \cdot 2 \div -6$ **c.** $45 \div 15 \cdot -12$
d. $-3 \cdot 4 \div 6 \cdot 5$ **e.** $72 \div -9 \cdot 7 \div 4$ **f.** $6 \cdot -13 \cdot -2 \div -26$
g. $100 \div -25 \div 2$ **h.** $-10 \cdot -2 \div -5 \div -1$ **i.** $-81 \div -9 \cdot 3 \div 27$

Desarrollo sostenible

Para lograr un verdadero impacto en la reducción de contaminantes en el medio ambiente, se deben combinar esfuerzos, tanto de la industria como de cada individuo por separado.

Recuerda

Los paréntesis en una operación combinada indican cuál operación se debe resolver primero.

2.2 Operaciones combinadas

Problema

Realiza las siguientes operaciones combinadas.

a. $40 \div (-10 + 5)$

b. $32 \div (-2)^2 - 6$

Recuerda

Cuando el exponente de una potencia es par, el resultado es siempre positivo aun cuando la base sea negativa.

Solución

a. $40 \div (-10 + 5) = 40 \div -5$
$= -8$

b. $32 \div (-2)^2 - 6 = (32 \div 4) - 6$
$= 8 - 6$
$= 2$

Conclusión

Para realizar **operaciones con números enteros que combinan suma, resta, multiplicación, división o potenciación**, se trabaja de igual forma como se hace con los números naturales. La prioridad para resolver las operaciones es la siguiente:

1. Potencias
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

En las operaciones con paréntesis, se deben resolver primero las que están dentro de ellos, respetando la prioridad indicada anteriormente.

También se pueden plantear operaciones combinadas según cierta relación propuesta entre los números, usando términos como el doble, la mitad, el cuadrado, agregar y quitar, entre otros.

Trabajo colaborativo

1. Trabaja en pares.
   a. Compara los resultados que obtengas en los ejercicios con los de un compañero. Si hay diferencias, juntos indaguen la causa del error cometido.

Observa cómo se hace

Resuelve cada combinación de operaciones.

a. $8 \cdot -5 + -78 \div 6 - 3 = -40 + (-13) - 3$ → Se multiplica y se divide.
$= -53 - 3$ → Se suma, los dos primeros.
$= -56$ → Se resta el último.

b. $-4 \cdot (-7 + 4)^2 + 4^2 = -4 \cdot (-3)^2 + 4^2$ → Se suma lo del paréntesis.
$= -4 \cdot 9 + 16$ → Se resuelven las potencias.
$= -36 + 16$ → Se resuelve la multiplicación.
$= -20$ → Se resuelve la suma.

Observa cómo se hace

Observa de qué manera se plantea y se resuelve la operación combinada según el texto dado.

La quinta parte de veinticinco menos el doble del cuadrado de seis.

La quinta parte de 25. → $25 \div 5$

El doble del cuadrado de 6. → $2 \cdot 6^2$

La quinta parte de veinticinco menos el doble del cuadrado de seis. → $25 \div 5 - 2 \cdot 6^2$

Se resuelve siguiendo la prioridad:

$$\begin{aligned} 25 \div 5 - 2 \cdot 6^2 &= 25 \div 5 - 2 \cdot 36 && \rightarrow \text{(Potencia: } 6^2 = 36) \\ &= 5 - 2 \cdot 36 && \rightarrow \text{(División: } 25 \div 5 = 5) \\ &= 5 - 72 && \text{(Multiplicación } 2 \cdot 36 = 72) \\ &= -67 && \rightarrow \text{(Resta: } 5 - 72 = -67) \end{aligned}$$

Recuerda

Mitad: dividir entre 2.

Tercera parte: dividir entre 3.

Doble: multiplicar por 2.

Triple: multiplicar por 3.

Cuadrado: elevar a la 2.

Cubo: elevar a la 3.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas sin paréntesis.
   - a. $-12 - 18 \div 3$
   - b. $-20 \div -4 - 8$
   - c. $5 \times -2 + 4 \times 3$
   - d. $-12 \div 2 + 2 \times 3$
   - e. $150 \div 5^2 + -3 \cdot 4$
   - f. $2^3 - 9 \cdot 4 \div 18$

2. Resuelve las siguientes operaciones combinadas con paréntesis.
   - a. $(16 + 4^2 - 4) \div 7$
   - b. $5 \cdot (35 \div 7 - 8) + 2$
   - c. $(6 - 10) \cdot (-5 + 8)$
   - d. $-8 \cdot (1 - 3)^3 + 4^2$
   - e. $(-4)^2 + (-2)^3 \div (-9 + 5)$
   - f. $(-5)^2 + 20^2 \div (7 - 17)$

3. Plantea la operación combinada descrita en cada caso y resuélvela.
   - a. Cuatro menos ocho por el cubo de dos.
   - b. El cuadrado del resultado de tres menos cinco, más la mitad de catorce.
   - c. Veinticinco dividido entre el resultado de cinco menos diez.
   - d. La suma del doble de menos doce más la cuarta parte de veinticuatro.
   - e. La diferencia entre el cuadrado de diez menos dos y el doble de menos seis.
   - f. El cuadrado de la suma de menos diez y el doble de tres.

Datos interesantes

Las propiedades de las operaciones dan la posibilidad de resolver una misma operación de distintas maneras, de forma tal que se puede utilizar la estrategia que facilite más los cálculos.

2.3 Propiedad distributiva de la multiplicación

Problema

Compara los resultados de las operaciones **a** y **b**. ¿Son iguales?

a. $-4 \cdot (-15 + 10)$ **b.** $-4 \cdot -15 + -4 \cdot 10$

Solución

Operación a

$$-4 \cdot (-15 + 10) = -4 \cdot -5$$
$$= 20$$

Operación b

$$-4 \cdot -15 + -4 \cdot 10 = 60 + -40$$
$$= 20$$

Los resultados de ambas operaciones son iguales; por lo tanto, $-4 \cdot (-15 + 10) = -4 \cdot -15 + -4 \cdot 10$.

¿Qué pasaría?

La multiplicación también cumple la propiedad distributiva con respecto a la resta.
Es decir:

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Conclusión

La **propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma** establece que si **a**, **b**, **c** son números enteros, entonces se cumple lo siguiente:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

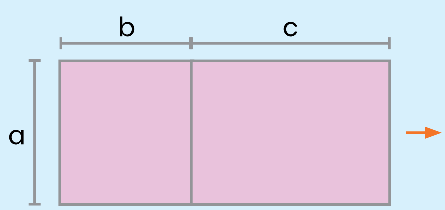
o bien

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Cuando se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación $a \cdot (b - c)$ los paréntesis desaparecen obteniéndose $a \cdot b - a \cdot c$. A la acción de quitar los paréntesis se le llama suprimir paréntesis.

Representación gráfica

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma se puede representar de manera gráfica a través de áreas de rectángulos:



El área total se puede expresar como:

- $a \cdot (b + c)$
- $a \cdot b + a \cdot c$

Recuerda

El área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho.

Observa cómo se hace

1. Comprueba la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma mediante la siguiente operación:

$$47 \cdot -9 + 13 \cdot -9$$

Solución

Estrategia 1

$$\begin{aligned} 47 \cdot -9 + 13 \cdot -9 &= -423 + -117 \\ &= -540 \end{aligned}$$

Estrategia 2

$$\begin{aligned} -9 \cdot (47 + 13) &= -9 \cdot 60 \\ &= -540 \end{aligned}$$

Como los resultados de ambas operaciones son iguales, se comprueba la propiedad.

2. Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma para simplificar los cálculos de la siguiente operación:

$$-13 \cdot -5 + -13 \cdot 15$$

Solución

Otra forma de plantear la operación es $-13 \cdot (-5 + 15)$, lo cual es más sencillo de resolver, pues $-5 + 15 = 10$ y la multiplicación por 10 se puede calcular de manera mental. Así:

$$\begin{aligned} -13 \cdot -5 + -13 \cdot 15 &= -13 \cdot (-5 + 15) \\ &= -13 \cdot 10 \\ &= -130 \end{aligned}$$

Recuerda

Para multiplicar un número por 10, 100 o 1000, se mantiene el mismo número y se agregan la cantidad de ceros correspondientes en cada caso; es decir, uno, dos o tres ceros respectivamente.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

1. Comprueba la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o la resta mediante las siguientes operaciones.

- **a.** $8 \cdot -4 + 8 \cdot 10$
- **b.** $7 \cdot (-8 + 20)$
- **c.** $5 \cdot 12 - 5 \cdot 15$
- **d.** $-2 \cdot (6 - 9)$
- **e.** $-3 \cdot 6 + 9 \cdot 6$
- **f.** $(25 + 5) \cdot -4$
- **g.** $6 \cdot -11 - 7 \cdot -11$
- **h.** $(10 - 7) \cdot 15$

2. Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o la resta para simplificar los cálculos de las siguientes operaciones.

- **a.** $12 \cdot 13 + 88 \cdot 13$
- **b.** $-21 \cdot 2 - 4 \cdot 2$
- **c.** $-2 \cdot (10 + 7)$
- **d.** $-5 \cdot (8 + 5)$
- **e.** $7 \cdot 105 - 7 \cdot 5$
- **f.** $-3 \cdot 65 + -3 \cdot 35$
- **g.** $18 \cdot 9$
- **h.** $99 \cdot (-15)$

¡Atención!

En el ejercicio 2g, considera que 9 se puede expresar como $10 - 1$, y en el 2h, considera que 99 se puede expresar como $100 - 1$.

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

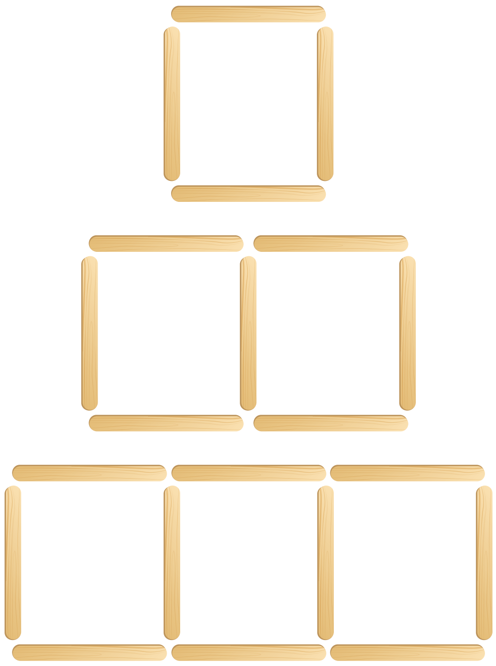
Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Aplico con seguridad las leyes de signos para resolver multiplicaciones de números enteros con diferente signo y con igual signo.			
2. Resuelvo multiplicaciones que incluyen el −1, el 0 y el 1.			
3. Comprendo las propiedades conmutativa y asociativa para la multiplicación de números enteros.			
4. Analizo el signo que tendrá el producto de una multiplicación según la cantidad de factores que posee la operación.			
5. Comprendo la potenciación de números enteros como la multiplicación repetida de factores iguales.			
6. Aplico la ley de signos para al calcular el resultado de potenciaciones con números enteros.			
7. Comprendo la radicación de números enteros como la operación inversa de la potenciación.			
8. Resuelvo radicaciones mediante la factorización en factores primos del radicando y la aplicación de las propiedades de las raíces.			
9. Aplico con seguridad las leyes de signos para resolver divisiones de números enteros con diferente signo y con igual signo.			
10. Resuelvo problemas de multiplicación y división de números enteros en situaciones del contexto, aplicando reglas y la ley de los signos.			
11. Calculo el resultado de operaciones con números enteros que combinan multiplicación y división.			
12. Aplico la prioridad de las operaciones para resolver operaciones combinadas de números enteros sin paréntesis.			
13. Aplico la prioridad de las operaciones y los signos de agrupación para resolver operaciones combinadas de números enteros con paréntesis.			

Unidad 5

El lenguaje simbólico del álgebra

Los primeros aportes al álgebra surgieron por parte de matemáticos indios como Aryabhata, sin embargo, el matemático árabe que logró rescatar estos aportes de la matemática india y griega hacia el mundo arábigo fue Abu Abdallah Muhammad ibn Musa (Al-Juarismi) quien además, logró sistematizar de manera didáctica lo que conocemos en la actualidad como álgebra en su libro "*Álgebra, guarismo* y *algoritmo*".

El álgebra surge y se mantiene como una herramienta muy útil para la modelación de situaciones de la realidad, con el fin de determinar acontecimientos relacionados con el comercio, repartición de objetos, herencias, créditos, obras de ingeniería, etc.



En la figura se muestra una secuencia de construcciones creada con paletas de madera.

En esta unidad aprenderás a...

- Clasificar los términos algebraicos según sus características.
- Identificar y clasificar las expresiones algebraicas según la cantidad de términos.
- Traducir expresiones verbales a expresiones simbólicas y viceversa.
- Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.
- Determinar con seguridad el grado relativo y absoluto de una expresión algebraica.
- Ordenar ascendente y descendentemente los términos de una expresión algebraica de acuerdo con el grado.
- Identificar términos semejantes en expresiones algebraicas y reducirlos.

Expresiones algebraicas

1.1 Patrones numéricos

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   a. Investiguen sobre las tarifas de taxi según los kilómetros recorridos.
   b. Calculen lo que se debe pagar por 1 km, 2 km, 3 km y 50 km.

Problema

Para instalar una lámina de techo se necesitan 20 tornillos. ¿Cuántos se necesitan para instalar 2 o 3 láminas? ¿Y si son 10 láminas?

Solución

- Una lámina → 20 tornillos
- Dos láminas → 40 tornillos
- Tres láminas → 60 tornillos

...
- Diez láminas → 200 tornillos (Se multiplica 10 por 20)

Recuerda

Una secuencia es un conjunto de números ordenados según un patrón dado. Cada uno de esos números recibe el nombre de término de la secuencia. Por ejemplo, en la secuencia 20, 40, 60, ... el primer término es 20, el segundo 40 y así sucesivamente.

Conclusión

El descubrimiento de **patrones numéricos** en ciertas situaciones facilita el conteo de elementos o el cálculo de los mismos. Por ejemplo, en la situación inicial se puede obtener la cantidad de tornillos con la expresión:

número de láminas • 20

Observa cómo se hace

Determina el patrón y calcula el décimo término.

7, 12, 17, 22, 27, 32, 37...

- El patrón es multiplicar la posición por 5 y sumar 2. Es decir, en la posición 1, es 1 • 5 + 2, en la posición 2, 2 • 5 + 2 = 12...
- Por lo tanto, el décimo término se calcula así:

10 • 5 + 2 = 52

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina el patrón y calcula el término 15 en cada secuencia.
   a. 3, 5, 7, 9, 11
   b. 4, 9, 14, 19, 24
   c. 15, 25, 35, 45
   d. 98, 96, 94, 92, 90

1.2 Generalización de un patrón numérico

Problema

El costo de imprimir cierta cantidad de libros en una imprenta es de 4 balboas por libro más un monto fijo de 50 balboas. ¿Cuánto se debe pagar por imprimir 1, 2, 3 o 4 libros? ¿Y cuánto por imprimir 100 libros?

Si el número de libros se representa con ■, ¿cuál expresión representa el costo total?

Solución

Libros	1	2	3	4
Costo total	1 • 4 + 50 = 54	2 • 4 + 50 = 58	3 • 4 + 50 = 62	4 • 4 + 50 = 66

Si el número de libros es ■, entonces el costo total se calcula así:

■ • 4 + 50

Conclusión

Cuando se realizan operaciones con cantidades variantes se pueden utilizar figuras para representar esas cantidades en las operaciones.

Mediante este tipo de operaciones se puede calcular cualquier término de una secuencia, planteando la **fórmula general del patrón**.

Observa cómo se hace

En una tienda las camisetas cuestan 5 balboas cada una. Si la cantidad que se compra se representa con ■, ¿de qué manera se expresa el total a pagar? ¿Cuál es el cambio al pagar con 100 balboas?

- Total por pagar: ■ • 5
- Cambio: 100 – (■ • 5)

Datos interesantes

La invención de la imprenta moderna se le atribuye a Johannes Gutenberg en el año 1440. Este fue uno de los inventos que más influyó en el desarrollo cultural e intelectual de la historia.

Recuerda

La fórmula general de una secuencia es una fórmula que se plantea a partir del patrón descubierto, con la cual se puede calcular rápidamente cualquier término de la secuencia.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Si un estuche de geometría vale 3 balboas.
   a. ¿Cuál es el costo al comprar ■ estuches?
   b. ¿Cuál es vuelto al pagar con 20 balboas?
2. Si la entrada al estadio cuesta 10 balboas.
   a. ¿Cuánto se debe pagar por ■ personas?
   b. ¿Cuál es vuelto al pagar con 50 balboas?

Datos interesantes

Se conoce como álgebra a la rama de la matemática que generaliza las operaciones empleando números, letras y signos que representan simbólicamente un número o un objeto matemático.

1.3 Expresiones algebraicas de una variable o más variables

Problema

Una calculadora tiene un precio de 10 balboas, ¿cuál es el costo al comprar ■ calculadoras?

Solución

Cantidad	Costo
1	10 • 1 = 10 (balboas)
2	10 • 2 = 20 (balboas)
3	10 • 3 = 30 (balboas)
...	...
■	10 • ■ (balboas)

Conclusión

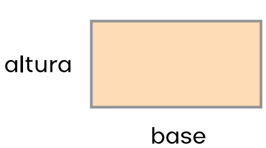
Se ha utilizado un cuadrado para representar cantidades variantes, pero regularmente para referirse a este tipo de cantidades se utilizan letras; por ejemplo la expresión 10 • ■ se puede escribir como **10 • a**. Se utilizó la letra **a** pero puede usarse cualquier otra letra.

Las expresiones como **10 • a** se llaman **expresiones algebraicas**. Las letras que representan cantidades variantes se llaman **variables**. En la expresión algebraica **10 • a** la letra **a** es la variable.

Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones. Puede tener una sola variable o varias.

Recuerda

En un rectángulo la base y la altura son las siguientes:



Observa cómo se hace

En el rectángulo de la ilustración la base es 2 cm más larga que la altura. Representa con una expresión algebraica la base del rectángulo.

Solución

La altura es **x**.

La base mide 2 cm más; es decir + 2.

Entonces la base es **x + 2**.

Observa cómo se hace

Un entrenador de fútbol comprará **b** balones que cuestan 15 balboas cada uno y **t** botellas de bebida rehidratante que cuestan 2 balboas cada una. ¿Cuál expresión representa el costo total de la compra?

Solución

Costo de los balones → $b \cdot 15$

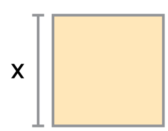
Costo de las botellas → $t \cdot 2$

Total por pagar → $b \cdot 15 + t \cdot 2$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

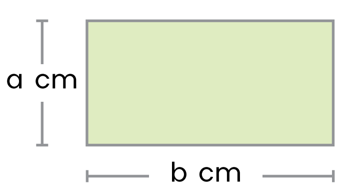
1. Escribe una expresión algebraica con una variable que responda la pregunta planteada en cada situación.
   a. Si la edad de Mario se representa con **m**, ¿cuál expresión representa la edad de su hermano que es 5 años mayor que él?
   b. Si se compra un pantalón que vale **p** dólares, ¿cuál expresión representa el vuelto si se paga con un billete de 20 dólares?
   c. Si **n** representa un número entero, ¿cómo se representa el doble de ese número?
   d. ¿Cómo se representa el perímetro del siguiente cuadrado?



¡Atención!

Recuerda que el doble se obtiene al multiplicar por 2. Y el perímetro de un cuadrado al multiplicar la medida del lado por 4.

2. Escribe una expresión algebraica con dos variables que responda la pregunta planteada en cada situación.
   a. Si un cuaderno pesa **x** gramos y una mochila **y** gramos, ¿cuál expresión representa el peso total de la mochila con 5 cuadernos en ella?
   b. Si una cartuchera cuesta **m** dólares y un cuaderno **n** dólares, ¿cuál expresión representa el vuelto al comprar 4 cartucheras y 3 cuadernos con un billete de 10 dólares?
   c. Un autobús tiene **a** filas de asientos de 3 pasajeros cada una y **b** filas de 2 pasajeros cada una. ¿Cuál expresión representa la cantidad de pasajeros que pueden viajar sentados en el autobús?
   d. ¿Cómo se representa el área del siguiente rectángulo?



¡Atención!

Recuerda que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura.

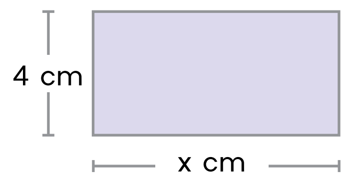
Recuerda

El perímetro de cualquier polígono se calcula sumando las medidas de todos sus lados. En un rectángulo también se puede sumar la base y la altura y multiplicarlo por 2.

1.4 Símbolo de multiplicación en expresiones algebraicas

Problema

Representa el perímetro del rectángulo mediante una expresión algebraica.



Solución

Se suma **x + 4** y se multiplica por 2, así:

$$(x + 4) \cdot 2$$

Otra forma de escribir la expresión anterior es **2(x + 4)**.

Conclusión

En una expresión algebraica que incluya multiplicación se acostumbra:

- Omitir el signo de multiplicación "•" cuando esté indicada entre variables, entre una variable y un número o antes de un paréntesis.
  Ejemplos: $x \cdot y = xy$ $5 \cdot x = 5x$ $7 \cdot (x + 9) = 7(x + 9)$
- Escribir primero el número cuando se multiplique por una variable o expresión algebraica entre paréntesis.
  Ejemplos: $x \cdot 6 = 6x$ $(x + 2) \cdot 3 = 3(x + 2)$
- En multiplicaciones por 1 omitir tanto el 1 como el símbolo "•". Y en multiplicaciones por −1 solo mantener el símbolo "−".
  Ejemplos: $x \cdot 1 = x$ $-1 \cdot x = -x$ $-1 \cdot (x + 2) = -(x + 2)$
- En un producto de varias letras, acostumbramos a escribirlas en orden alfabético. Ejemplos: $zxy = xyz$ $3c \cdot 4a \cdot 2b = 24abc$

¿Qué pasaría?

Cuando la multiplicación está indicada entre dos números el signo "•" no se puede omitir. Lo que se puede hacer es resolver la multiplicación, por ejemplo: $4 \cdot 2 \cdot x = 8x$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Representa cada expresión omitiendo el símbolo de la multiplicación.
   a. $6 \cdot b$ b. $3 \cdot a$ c. $m \cdot n$
   d. $-5 \cdot y$ e. $6 \cdot (a + 7)$ f. $(5 - y) \cdot -3$
   g. $p \cdot q \cdot r$ h. $x \cdot y \cdot -4$ i. $(k - 3) \cdot 5 \cdot m$
   j. $(x + 3) \cdot (x - 3)$ k. $-8 \cdot 6 \cdot b$ l. $(q - 1) \cdot 4 \cdot 5$

2. Representa cada expresión omitiendo la multiplicación por 1 o −1.
   a. $1 \cdot r$ b. $x \cdot 1$ c. $-1 \cdot y$
   d. $p \cdot -1$ e. $1 \cdot c \cdot d$ f. $-1 \cdot m \cdot n$
   g. $1 \cdot (q + 2)$ h. $(s + 3) \cdot -1$ i. $z \cdot -1 \cdot w$

1.5 Potencia de una expresión algebraica

Problema

Representa el área del siguiente cuadrado de lado **a** mediante una expresión algebraica.

Solución

Se multiplica el lado por el lado.

El área del cuadrado es **a • a**.

Conclusión

El producto repetido de la misma variable o la misma expresión algebraica se representa con el uso de exponentes. Por ejemplo: **a • a** también se representa como $\mathbf{a^2}$.

Recuerda

La potenciación es la forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. Por ejemplo, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

Observa cómo se hace

Representa las siguientes expresiones algebraicas mediante potencias.

- $b \cdot b \cdot b = b^3$
- $(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) = (x + 1)^3$
- $-2 \cdot b \cdot b \cdot a = -2ab^2$
- $(1 - x) \cdot (1 - x) \cdot -2 = -2(1 - x)^2$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas mediante potencias.
   - a. $x \cdot x$
   - b. $y \cdot y \cdot y$
   - c. $x \cdot x \cdot y$
   - d. $x \cdot x \cdot y \cdot y$
   - e. $x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
   - f. $2 \cdot a \cdot a$
   - g. $b \cdot b \cdot 7$
   - h. $-8 \cdot w \cdot w$
   - i. $(k - 1) \cdot (k - 1)$
   - j. $(x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x + 3)$
   - k. $-2 \cdot (5 - m) \cdot (5 - m)$
   - l. $(x + y + w) \cdot (x + y + w)$

2. Represent las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (•) y sin potencia.
   - Observa el ejemplo.
   - a. $5a^2 = 5 \cdot a \cdot a$
   - b. $-7b^3$
   - c. $2a^2b$
   - d. $-3x^2y^2$
   - e. $4x^3y$
   - f. $-5x^3y^2$
   - g. $-a^3b^3$
   - h. $(m + 4)^2$
   - i. $5(4 - n)^3$

Recuerda

Una fracción es un cociente indicado.

Por ejemplo: $2 \div 3 = \frac{2}{3}$.

1.6 Expresión algebraica con división

Problema

Si hay **x** litros de jugo, y se quiere repartir entre 3 personas equitativamente, ¿cuántos litros de jugo le corresponden a cada persona?

Solución

Como hay **x** litros y quieren repartir equitativamente entre 3, lo que le corresponde a cada persona se calcula dividiendo **x** entre 3, así:

$$x \div 3 = \frac{x}{3}$$

Trabajo colaborativo

1. Trabaja en pares.
   a. Investiguen y conversen sobre la diferencia entre la igualdad y la equidad.

Conclusión

La **división de una variable o expresión algebraica** se escribe en forma de fracción omitiendo el signo (÷). El dividendo se convierte en el numerador de la fracción y el divisor en el denominador. Por ejemplo:

dividendo

$$x \div 3 = \frac{x}{3}$$

divisor

Desarrollo sostenible

En ciertos contextos la equidad resulta ser más beneficiosa que la igualdad para contribuir con un adecuado desarrollo de la sociedad.

Observa cómo se hace

Escribe las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

- $(x + y) \div 5 = \frac{x + y}{5}$
- $n \div -7 = \frac{n}{-7} = -\frac{n}{7}$ → Se coloca el signo negativo a la fracción.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a. $x \div 2$	b. $y \div -2$	c. $(r - s) \div 4$
d. $r \div t$	e. $2 \div m$	f. $2p \div 3$
g. $(m + n) \div -5$	h. $10 \div -x$	i. $x^2 \div 2$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (÷).
   - Observa el ejemplo.

a. $\frac{a}{4} = a \div 4$ b. $-\frac{y}{2}$ c. $\frac{x - y}{3}$ d. $\frac{2y}{3}$ e. $\frac{1}{5m}$

1.7 Expresiones algebraicas con multiplicación y división

Problema

En una veterinaria compran **x** sacos de alimento para perros con 25 kg cada uno y lo separan en paquetes de 2 kg, ¿cuál expresión representa la cantidad de paquetes que obtendrán?

Solución

La cantidad total de kilogramos que compran se calcula multiplicando **x** por 25. Así:

$$x \cdot 25 = 25x \rightarrow \text{Se omite el símbolo } \cdot$$

La cantidad total de kilogramos se divide entre 2 para obtener la cantidad de paquetes.

$$25x \div 2 = \frac{25x}{2} \rightarrow \text{Se omite el símbolo } \div$$

Conclusión

En las operaciones de multiplicación y división se pueden omitir los signos (•) y (÷), cuando ambas operaciones aparecen combinadas en una expresión algebraica.

¿Qué pasaría?

A diferencia con (•) y (÷), los signos (+) y (−) no se pueden omitir dentro de las expresiones algebraicas.

Observa cómo se hace

Escribe las expresiones algebraicas omitiendo los signos (•) y (÷).

- $x \cdot y \div 10 = \frac{xy}{10}$
- $a \div 4 + b \div 5 = \frac{a}{4} + \frac{b}{5}$ → El signo + no se puede omitir.

Práctica

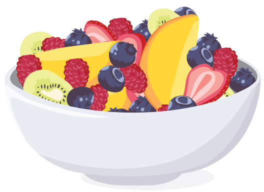
Trabaja en tu cuaderno

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo los signos (•) y (÷).

a. $3 \cdot x \div 2$	b. $(3 \cdot a \cdot a) \div (1 - b)$
c. $3 \div y + 5 \div w$	d. $(z \cdot z) \div (-1 \cdot x)$
e. $-1 \cdot x \div 2$	f. $(r \cdot s) \div (q \cdot r)$
g. $-4 \cdot a + 7 \cdot b$	h. $(c - d) \div 3 - (f + r) \div 5$

1.8 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico

Problema



x balboas cada uno

Se compran 8 ensaladas de frutas como la de la imagen y se pagan con 50 balboas. Si sabes que una porción de ensalada cuesta **x** balboas, representa con una expresión algebraica:

a. El costo total de la compra.
b. El vuelto que se recibe al hacer la compra.

Solución

a. El costo de la compra es el precio de cada una por el número de ensaladas, es decir:

$$x \cdot 8 = 8x \text{ (balboas)}$$

b. El vuelto es lo que se obtiene de restar el costo de la compra del total de balboas pagados:

$$50 - 8x \text{ (balboas)}$$

Conclusión

El **lenguaje algebraico** es la traducción del lenguaje coloquial a variables y números relacionados, mediante operaciones. Para realizar esta traducción se debe extraer del lenguaje coloquial palabras clave que indican las operaciones que se debe incluir en la expresión algebraica.

- El doble, triple, cuádruple o quíntuple de un número se obtiene al multiplicar por 2, 3, 4 y 5, respectivamente.
- La mitad, tercera, cuarta o quinta parte de un número se obtiene a dividir entre 2, 3, 4 y 5, respectivamente.
- Los repartos equitativos se representan mediante divisiones.
- Los aumentos corresponden a suma y las disminuciones a restas.

Algunas relaciones especiales

Cualquier tipo de relación entre cantidades se puede representar de manera algebraica si se conoce la relación que existe entre las variables. Por ejemplo:

- Las situaciones de distancia, rapidez y tiempo expresadas en lenguaje coloquial también se pueden traducir al lenguaje algebraico. Considerando estas relaciones:
  distancia = rapidez • tiempo
  tiempo = distancia ÷ rapidez
  rapidez = distancia ÷ tiempo

Datos interesantes

En la historia humana, la notación algebraica pasó por tres etapas: **1) Álgebra terminológica**, expresada en palabras como "el producto de dos números es independiente del orden en que los coloquemos".

2) Álgebra abreviada, en la cual se acortaban algunas palabras, cada vez más, pero sin llegar a un lenguaje simbólico.

3) Álgebra simbólica moderna, cuando se alcanzó el mayor nivel de abstracción con un lenguaje simbólico basado en letras sin ninguna relación con palabras.

Observa cómo se hace

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes situaciones.

a. El cuádruple de un número disminuido en 5.

$4x - 5 \rightarrow$ **x** es el número desconocido

b. La mitad del costo total de 2 pantalones y 4 blusas, si cada pantalón cuesta **p** balboas y cada blusa **b** balboas.

$2p + 4b \rightarrow$ costo total de los 2 pantalones y las 4 blusas

$\frac{2p + 4b}{2} \rightarrow$ mitad del costo total

c. La rapidez de Ana si caminó **w** km en 2 horas.

$\frac{w}{2}$ km/h $\rightarrow$ La rapidez es igual que la distancia entre el tiempo.

Recuerda

Cuando se debe representar una cantidad desconocida mediante lenguaje algebraico, se utiliza cualquier letra del abecedario.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones relacionadas con números desconocidos.
   a. El doble de un número aumentado en 4.
   b. La quinta parte de la suma de dos números.
   c. La cuarta parte del triple de un número.
   d. La diferencia entre el quíntuple de un número y su mitad.

¡Atención!

Cuando son números distintos en una misma expresión se usan letras distintas. Si es el mismo número, se usa la misma letra.

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes situaciones cotidianas:
   a. En una canasta hay 15 frutas, entre peras y manzanas. Expresa el número de peras cuando hay **m** manzanas.
   b. Un hombre repartirá equitativamente 180 balboas entre **n** niños. ¿Cómo se expresa la cantidad de dinero que recibirá cada niño?
   c. El cambio de pagar con 10 balboas, cuando se compran **p** pares de calcetines si cada par cuesta 2 balboas.
   d. El costo total, al comprar 4 cuadernos y 6 bolígrafos, si cada cuaderno vale **x** balboas y cada bolígrafo cuesta **y** balboas.

3. Responde las preguntas relacionadas con rapidez, distancia y tiempo.
   a. Si se camina **a** metros en ocho minutos, ¿cuál es la rapidez por minuto?
   b. María recorre **x** metros con una rapidez de 60 m/min, ¿cuánto tiempo caminó María?
   c. Si Juan toma un autobús de su casa a un parque ecológico, y su viaje dura **x** horas a una rapidez de 60 km/h, ¿qué distancia hay de su casa al parque?

Trabajo colaborativo

1. Trabaja en pares.
   a. Escribe tres expresiones algebraicas para que tu compañero de trabajo las exprese en lenguaje coloquial.

1.9 Traducción del lenguaje algebraico al coloquial

Problema

El precio de la entrada a un museo para un adulto es **a** balboas y para un menor de edad es **b**. ¿Qué representan las siguientes expresiones algebraicas?

a. $a + b$ **b.** $4a + 2b$ **c.** $10 - 2a$ **d.** $a - b$

Solución

a. El costo de la entrada de un adulto y un menor de edad.
b. El costo de la entrada de 4 adultos y 2 menores de edad.
c. El vuelto de pagar con 10 balboas la entrada de 2 adultos.
d. La diferencia entre el precio de la entrada de un adulto y el precio de la entrada de un menor de edad.

Conclusión

Traducir una expresión del lenguaje algebraico al coloquial es darle una interpretación a una expresión algebraica, según un contexto. En caso de no tener un contexto, se considera que las letras representan cualquier número.

Recuerda

Cuando en una expresión algebraica se repite una letra es porque se refiere al mismo número.

Observa cómo se hace

Expresa en lenguaje coloquial las siguientes expresiones algebraicas.

a. $3x + 2$ → El triple de un número aumentado en 2.
b. $y - \frac{y}{2}$ → La diferencia entre un número y su mitad.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Expresa en lenguaje coloquial las siguientes expresiones algebraicas sin contexto.
   a. $2x - 3$ **b.** $\frac{y + 1}{3}$ **c.** $4w + 5w$

2. El precio de un batido es de **m** balboas y el de un pastel de **n** balboas. ¿Qué representan las siguientes expresiones algebraicas?
   a. $m + n$ **b.** $5m + 8n$ **c.** $10 - (m + 2n)$

1.10 Valor numérico de una expresión algebraica

Problema

El precio de una piña y de una sandía en un supermercado son los que se muestran a continuación:

a. ¿Cómo se representa el total por pagar por **p** piñas y **s** sandías?
b. ¿Cuál sería el total por pagar si se compran 3 piñas y 4 sandías?
c. ¿Cuál sería el total por pagar si se compran 10 piñas y 20 sandías?

Solución

a. El precio de **p** piñas es **2p**. → Cada piña cuesta 2 balboas.
El precio de **s** sandías es **3s**. → Cada sandía cuesta 3 balboas.
Por lo tanto, el total por pagar por **p** piñas y **s** sandías será:

$$2p + 3s$$

b. Si se compran 3 piñas y 4 sandías, el total por pagar se calcula así:
- Se cambia **p** y **s** por las cantidades dadas.
- En este caso **p = 3** y **s = 4**.

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$$

- El total por pagar sería 18 balboas.

c. Si se compran 10 piñas y 20 sandías, el total por pagar se calcula así:
- Se cambia **p** y **s** por las cantidades dadas.
- En este caso **p = 10** y **s = 20**.

$$2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 = 80$$

- El total por pagar sería 80 balboas.

Conclusión

Al sustituir un número en una variable, el resultado obtenido después de realizar las operaciones indicadas en la expresión se conoce como **valor numérico de la expresión**. Por ejemplo, para calcular el valor numérico de la expresión **3x + 3** cuando **x = 6** se reemplaza **x** por 6 en la expresión dada y se resuelven las operaciones, así: $3 \cdot 6 + 3 = 18 + 3 = 21$.

Datos interesantes

La piña y la sandía son dos de las frutas que se producen en tierras panameñas y se exportan en grandes cantidades a otras regiones del mundo, entre ellas a Estados Unidos y algunos países europeos. Recientemente se busca potenciar la exportación de otras frutas como la papaya, que también es producida en muchos lugares del país y en variedades de muy buen sabor.

Desarrollo sostenible

La producción agrícola es importante para el desarrollo del país; sin embargo, se deben buscar las estrategias que procuren el desarrollo sostenible de la tierra, como la reducción en el uso de plaguicidas y el descanso de las áreas de siembra por periodos.

Recuerda

En las operaciones combinadas se resuelven primero las potenciaciones, luego las multiplicaciones y las divisiones y por último las sumas y las restas.

Además, al sumar y restar con números negativos debes tener en cuenta tanto el signo del número como las operaciones indicadas en las expresiones.

Observa cómo se hace

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $3x^2 + 1$, cuando $x = 4$

Se sustituye $x = 4$ en $3x^2 + 1$. → $3 \cdot 4^2 + 1$

Se resuelven las operaciones. → $3 \cdot 16 + 1$

→ 49

b. $\frac{1}{x + 2}$, cuando $x = -1$

Se sustituye $x = -1$ en $\frac{1}{x + 2}$. → $\frac{1}{-1 + 2}$

Se resuelven las operaciones. → $\frac{1}{1}$

→ 1

c. $m - n$, cuando $m = 10$ y $n = -8$

Se sustituye $m = 10$ y $n = -8$ en $m - n$. → $10 - (-8)$

Se resuelve la operación. → $10 + 8$

→ 18

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{x - 18}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $x = 20$ **b.** $x = 8$ **c.** $x = 4$ **d.** $x = 0$

2. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{9 - 4t}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $t = 1$ **b.** $t = 2$ **c.** $t = -3$ **d.** $t = -4$

3. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{-8 - 5n}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $n = -1$ **b.** $n = -2$ **c.** $n = 3$ **d.** $n = 4$

4. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{y^2 + 1}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $y = 5$ **b.** $y = 10$ **c.** $y = -5$ **d.** $y = -10$

5. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{5p - q}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $p = 3, q = 1$ **b.** $p = -2, q = 2$ **c.** $p = -1, q = -5$ **d.** $p = -3, q = 5$

6. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{\frac{m + n}{2}}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a. $m = 1, n = 1$ **b.** $m = 5, n = 3$ **c.** $m = -4, n = 2$ **d.** $m = -7, n = 1$

1.11 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Escribe las siguientes expresiones algebraicas omitiendo los signos (•) y (÷).
   - a. $(5 \cdot x) \div 2 + 3 \cdot y$
   - b. $p \cdot p \cdot p - p \cdot (1) \cdot p$
   - c. $1 \div (w \cdot -5 \cdot z)$
   - d. $-4 \div (x - y) - y \cdot y \cdot y$
   - e. $y \cdot y \cdot 3 - (r + t)$
   - f. $m \cdot m \cdot 4 - n \cdot (-1) \cdot n$

2. Responde las siguientes preguntas:
   - a. En un salón de clases hay 25 estudiantes. Si hay **m** mujeres, ¿cuál expresión representa la cantidad de hombres?
   - b. Pamela compró un libro y un bolso y pagó 45 balboas. Si el precio del bolso es de **x** balboas, ¿cuál expresión representa el precio del libro?
   - c. Gabriel cosechó **p** kilogramos de porotos de su finca. Si los desea repartir en 8 sacos con la misma cantidad cada uno, ¿cuál expresión representa lo que debe colocar en cada saco?
   - d. El precio de una papaya es de 2 balboas. Si una persona compra una cantidad **p** de papayas y paga con 10 balboas, ¿cuál expresión representa el cambio?
   - e. A un concierto asintieron **m** mujeres y el doble de hombres. ¿Cuál expresión representa el total de asistentes al concierto?

3. El precio de un almuerzo en un restaurante es de **w** balboas. Explica lo que representa cada una de las siguientes expresiones según la situación descrita.
   - a. $2w$
   - b. $20 - w$

4. En una reunión hay una cantidad **x** de profesores de primaria y una cantidad **y** de profesores de premedia. Explica lo que representa cada una de las siguientes expresiones según la situación descrita.
   - a. $x + y$
   - b. $x - y$

5. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{-5 + a}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos.
   - a. $a = 1$
   - b. $a = 7$
   - c. $a = -3$
   - d. $a = -4$

6. Si se tiene la expresión algebraica $\mathbf{12y - 2x}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   - a. $y = 1, x = 1$
   - b. $y = 2, x = 8$
   - c. $y = -1, x = -4$
   - d. $y = -2, x = -6$

7. Determina el valor de las siguientes expresiones algebraicas cuando $y = 48$.
   - a. $\frac{y}{6}$
   - b. $-\frac{y}{8}$
   - c. $\frac{y + 2}{5}$
   - d. $\frac{y - 8}{y - 38}$

Operaciones con expresiones algebraicas

2.1 Términos de una expresión algebraica y su clasificación

Trabajo colaborativo

1. Forma grupos.
   - **a.** Investiguen la historia de algunos matemáticos que hayan realizados aportes al desarrollo del álgebra.
   - **b.** Ubiquen cuál de ellos es el más reciente y hace cuántos años desarrolló sus trabajos.

Problema

Al expresar en lenguaje algebraico la siguiente situación:

El doble de un número más el triple de otro número.

¿Cuáles son los números que involucra la expresión algebraica?

Solución

Representamos la situación mediante lenguaje algebraico para observar sus elementos.

- El doble de un número. → $2x$
- El triple de un número. → $3y$

La expresión algebraica que representa la situación es $\mathbf{2x + 3y}$; por lo tanto, los números involucrados son 2 y 3.

Conclusión

Cada parte de una expresión algebraica que se encuentra separada por operaciones de suma y resta, se llama **término** de la expresión algebraica. Por ejemplo, $\mathbf{2x + 3y}$ es una expresión algebraica que posee dos términos, separados por la operación indicada con **+**.

Elementos de un término algebraico

En un término algebraico se distinguen el signo, el coeficiente numérico y el factor literal. Por ejemplo:

signo → $-5x^2y$ ← factor literal

coeficiente numérico

Clasificación de los términos algebraicos

- **Enteros:** términos algebraicos en donde no hay un denominador literal. Por ejemplo:

  $2ab^2$ $\quad$ $-5x$ $\quad$ 6 $\quad$ $12m^2n^3p$

- **Fraccionarios:** términos que cuentan con un denominador literal. Se expresan en forma de fracciones. Por ejemplo:

  $\frac{1}{2x}$ $\quad$ $\frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{2p^2}{mn}$ $\quad$ $\frac{-2y^2}{5wz}$

¿Qué pasaría?

Cuando el coeficiente numérico de un término algebraico es 1 o −1, el número 1 se omite, pues no es necesario escribirlo, de esta manera se sabe que expresiones como $\mathbf{x}$, $\mathbf{mn}$ y $\mathbf{a^2b}$ tienen coeficiente numérico 1, mientras que expresiones como $\mathbf{-x}$, $\mathbf{-mn}$ y $\mathbf{-a^2b}$ tienen coeficiente numérico −1.

- **Racionales:** términos algebraicos en los que ninguno de los literales está incluido en un signo radical. Por ejemplo:

$2x$ $\sqrt{32}ab^2$ $\frac{3a}{b}$ $\frac{2p^5}{5mn}$

- **Irracionales:** términos algebraicos con un radical en su parte literal. Por ejemplo:

$\sqrt{x^3}$ $25\sqrt{ab}$ $-2\sqrt{5n}$ $\frac{-\sqrt{3p}}{5pq}$

Datos interesantes

Observa que cualquier término entero o fraccionario también es un término racional.

Observa cómo se hace

a. Determina todos los términos que forman la expresión $7x + 5xy - y^2$.

- Los símbolos de suma y resta separan los términos; por lo tanto, la expresión está formada por estos tres términos:

$7x$ $5xy$ $-y^2$

b. Identifica el coeficiente numérico y el factor literal en cada término de la expresión anterior.

- $7x$ → Coeficiente numérico: 7 Factor literal: x
- $5xy$ → Coeficiente numérico: 5 Factor literal: xy
- $-y^2$ → Coeficiente numérico: -1 Factor literal: y^2

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Anota los términos que forman cada expresión.

a. $4x + 5y$ **b.** $3x^2 + 2x + y^2$ **c.** $6mn + 1$

d. $7a^2b - b$ **e.** $-w + 5z^3$ **f.** $10 - r^2t + 8t - r$

2. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y completa.

Término	$4ab$	$-5x^2$	m^3n	$-wz^5$	$2{,}5p^3qr$	$\sqrt{3}wz^4$
Coeficiente numérico						
Factor literal						

3. Escribe tres términos algebraicos enteros.

4. Escribe tres términos algebraicos fraccionarios.

5. Escribe tres términos algebraicos racionales.

6. Escribe tres términos algebraicos irracionales.

Desarrollo sostenible

Respetar las opiniones de las demás personas, sean o no semejantes a las nuestras, es necesario para fomentar una buena convivencia en la sociedad.

2.2 Términos semejantes

Problema

¿Qué semejanzas observas entre los siguientes términos?

$4x^3y^2$ $-5x^3y^2$

Solución

Observemos los elementos de cada término.

- En $\mathbf{4x^3y^2}$, el coeficiente numérico es 4 y el factor literal es $\mathbf{x^3y^2}$.
- En $\mathbf{-5x^3y^2}$, el coeficiente numérico es -5 y el factor literal es $\mathbf{x^3y^2}$.

Por lo tanto, los dos términos poseen el mismo factor literal.

Conclusión

Dos términos que poseen el mismo factor literal son **semejantes**. Este concepto es de gran importancia para temas posteriores relacionados con la reducción de expresiones algebraicas.

¿Qué pasaría?

Si el coeficiente numérico de dos términos es igual, pero su factor literal no, los términos no son semejantes. Por ejemplo, **-5a** y **-5b** no son términos semejantes.

Observa cómo se hace

Escribe tres términos semejantes al siguiente: $-7ab^3$.

- Identificamos que el factor literal es $\mathbf{ab^3}$. De esa manera, cualquier término con ese mismo factor literal, será semejante al dado.
- Así, tres términos semejantes pueden ser: $2ab^3$, $-5ab^3$, $10ab^3$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Agrupa los siguientes términos en tres grupos según los que sean semejantes.

$4a^2b^3$ $-4a^3b^2$ $5a^3b^3$ $4a^3b^3$ $5a^2b^3$

a^3b^3 $-a^3b^2$ a^2b^3 $-5a^3b^2$

2. Escribe un término semejante a cada uno de los términos dados.
   a. $2ab$
   b. $-7cb^2$
   c. $15x^5y^3$

2.3 Expresiones algebraicas según la cantidad de términos

Problema

¿En qué se parece cada pareja de expresiones algebraicas?

$4x^2 + 2$	$2ab - b + 1$
$10 - 5y$	$10w - 2y + wy$

Solución

Observemos la cantidad de términos de cada pareja de expresiones.

- $4x^2 + 2$ → dos términos
  $10 - 5y$ → dos términos
- $2ab - b + 1$ → tres términos
  $10w - 2y + wy$ → tres términos

Así determinamos que cada pareja de expresiones posee la misma cantidad de términos.

Conclusión

Las expresiones algebraicas se clasifican según la cantidad de términos que poseen de la siguiente manera:

- **Monomio**: Tiene un solo término algebraico.
- **Binomio**: Posee dos términos algebraicos.
- **Trinomio**: Posee tres términos algebraicos.

Además, toda expresión algebraica formada por más de dos términos también se llama **polinomio**. Por lo tanto, los binomios y los trinomios también se consideran polinomios.

Datos interesantes

La palabra "álgebra" proviene de un término árabe que significa 'recomposición' o 'reintegración'. Los árabes llamaban "algebristas" a los practicantes de esa disciplina.

¿Qué pasaría?

A las expresiones algebraicas de cuatro, cinco, seis o más términos; se les llama: polinomio de cuatro términos, polinomio de cinco términos, polinomio de seis términos; y así sucesivamente.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en monomios, binomios y trinomios.
   a. $4x^2 + 1$
   b. $7a^2 + b^2 + c$
   c. $10m + 5n$
   d. $-6y^3$
   e. $1 - 7x + 2y$
   f. $-15abc^3$

2. Escribe una expresión algebraica con las características indicadas en cada caso.
   a. Un binomio que solo involucra la variable **x**.
   b. Un monomio que involucra las variables **p**, **q**, **r**.
   c. Un trinomio en el que un término es 5 y solo involucra la variable **w**.

Recuerda

Cuando una variable aparece sin ningún exponente se considera que este es 1, pues $x^1 = x$.

¿Qué pasaría?

Cuando un término corresponde solo a un número, como −4, se considera el exponente de la variable en cuestión como 0; porque cualquier cantidad elevada a la cero es igual a 1, así:

$$-4x^0 = -4(1) = -4$$

2.4 Grado absoluto y relativo de una expresión algebraica

Problema

¿De qué manera se pueden ordenar los términos del siguiente polinomio?

$$25xy^2 + x^2 - 3yx^3 - 4$$

Solución

Veamos los exponentes de la variable **x** en cada uno de los términos.

- $25xy^2$ → El exponente de **x** es 1.
- x^2 → El exponente de **x** es 2.
- $-3yx^3$ → El exponente de **x** es 3.
- -4 → El exponente de **x** es 0.

Podemos ordenar el polinomio considerando el exponente de la **x**, de mayor a menor.

$$-3yx^3 + x^2 + 25xy^2 - 4$$

Conclusión

Con base en los exponentes de las variables se puede determinar el **grado absoluto** y el **grado relativo** de un monomio o de un polinomio.

Grados de un monomio

- El **grado relativo (GR)** de un monomio es el exponente de cada una de las variables involucradas en este. Por ejemplo:
  $7x^2y^3z \rightarrow GR(x) = 2,\ GR(y) = 3,\ GR(z) = 1$
- El **grado absoluto (GA)** de un monomio es la suma de los exponentes de cada una de las variables involucradas en este. Por ejemplo:
  $7x^2y^3z \rightarrow GA = 2 + 3 + 1 = 6$

Grados de un polinomio

- El **grado relativo (GR)** de un polinomio es el mayor exponente de cada una de las variables involucradas en este. Por ejemplo:
  $2a^2b^4 - 5ab^5 + a^3b \rightarrow GR(a) = 3,\ GR(b) = 5$
- El **grado absoluto (GA)** es el mayor grado absoluto de sus términos. Por ejemplo:
  $a^2b^4 - 5ab^5 + a^3b \rightarrow$ El grado absoluto de los términos es 6, 6 y 4. Así, el grado absoluto del polinomio es 6.

Un polinomio puede ordenarse ascendente o descendentemente con respecto a una variable, mediante el grado relativo de cada término. Por ejemplo, el siguiente polinomio:

$$4x^2y + 5xy^3 - 3x^6y^2$$

Puede ordenarse en forma descendente con respecto a **x** así:

$-3x^6y^2 + 4x^2y + 5x^1y^3$ → Los exponentes de **x** van de mayor a menor.

Puede ordenarse en forma ascendente con respecto a **y** así:

$4x^2y^1 - 3x^6y^2 + 5xy^3$ → Los exponentes de **y** van de menor a mayor.

Recuerda

El orden ascendente es de menor a mayor, mientras que el orden descendente es de mayor a menor.

Observa cómo se hace

Determina el grado relativo y absoluto de cada expresión algebraica.

a. $-5a^3b^2c$ → GR(a) = 3, GR(b) = 2, GR(c) = 1
→ GA = 3 + 2 + 1 = 6

b. $4x^2y + 3xy^3 - 2xy^4$ → GR(x) = 2, GR(y) = 4
Para el grado absoluto se calcula el grado absoluto de cada término.
$4x^2y$ → 2 + 1 = 3 $3xy^3$ → 1 + 3 = 4 $-2xy^4$ → 5
GA = 5, pues es el mayor grado absoluto de sus términos.

Ordena el polinomio $\mathbf{2a^2b^3 + a^5b - 2a^3b^2 - ab^6}$ en forma descendente, con respecto a la variable **a**.

- Se observa el grado relativo de **a** en cada término y se ordenan del mayor al menor.

$$a^5b - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^6$$

Datos interesantes

El grado absoluto de un polinomio también se llama simplemente grado del polinomio.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Determina el grado relativo y el grado absoluto de los siguientes monomios.
a. $2x^2y^3$ **b.** $10m^2n^3p^4$ **c.** $-p^4qr$
d. $-5ab^3$ **e.** x^3y **f.** $23a^5b^2c^9$

2. Determina el grado relativo y el grado absoluto de los siguientes polinomios.
a. $2x^3y^2 - 5x^2y$ **b.** $a^2b - 3ab^3 + 5a$ **c.** $7p^2q - 2r + 6pr^3$
d. $-10s^2t^6 + 4st - 2t$ **e.** $9x^2 + 3x + 3$ **f.** $w^4z^4 - wz + w^2z^2$

3. Ordena los siguientes polinomios en forma descendente, con respecto a la variable **x**.
a. $9x + 3x^2 - 7$ **b.** $x^4 + 2 - x^2$ **c.** $10x^5 - 6 + 3x^3 - x^2$
d. $3xy - 4x^2y^2 + 4$ **e.** $3x^4y^2 + 2xy^3 + 9x^3$ **f.** $6x^2yz^3 - xy^4 + x^4z^5$

4. Ordena los siguientes polinomios en forma ascendente, con respecto a la variable **a**.
a. $2a + 8 - 3a^2$ **b.** $a^4 + 4a - 6$ **c.** $-5a + 3a^5 + 2a^2$
d. $a^2b + abc - a^4$ **e.** $3b^5 - 4a^7 + 2a^2$ **f.** $2a^3 - 2ab + 2a^4 - b^5$

Recuerda

Según la propiedad conmutativa de la multiplicación, el orden en que se ordenen los factores no afecta el producto.

2.5 Multiplicación de un monomio por un número

Problema

¿De qué manera se puede resolver la multiplicación del recuadro?

$2x \cdot 3$

Solución

Si se expresa **2x** usando el símbolo de multiplicación, obtenemos lo siguiente:

$$2 \cdot x \cdot 3$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación, se pueden ordenar los factores de la siguiente manera para resolver:

$$2 \cdot 3 \cdot x = 6 \cdot x \longrightarrow \text{(Se multiplicó } 2 \cdot 3 = 6\text{)}$$
$$= 6x$$

Con lo cual se obtiene que $2x \cdot 3 = 6x$.

¿Qué pasaría?

Si se multiplica un número por un monomio el procedimiento es el mismo, pero no es necesario aplicar la conmutatividad. Por ejemplo, $3 \cdot 4x = 3 \cdot 4 \cdot x = 12x$

Conclusión

Para **multiplicar un monomio por un número**, se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación y de esa manera se multiplica el coeficiente numérico del monomio por el número dado y se mantiene el mismo factor literal. Se deben considerar las reglas de los signos.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $3xy^2 \cdot 4 = 12xy^2$ ⟶ Se multiplica $3 \cdot 4$ y se mantiene $\mathbf{xy^2}$.

b. $12 \cdot -ab^3 = -12ab^3$ ⟶ Se multiplica $12 \cdot -1$ y se mantiene $\mathbf{ab^3}$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $2 \cdot 2x$	**b.** $3x^2 \cdot 3$	**c.** $15 \cdot m^3$
d. $y^4 \cdot 21$	**e.** $-4 \cdot 2a$	**f.** $7ab \cdot -2$
g. $-5n^2 \cdot -2$	**h.** $-10 \cdot -3p^4q^2$	**i.** $6 \cdot -x$
j. $-7 \cdot abc$	**k.** $-y^2 \cdot -1$	**l.** $-5 \cdot 5m^5n^5$

2.6 División de monomio entre un número

Problema

¿De qué manera se puede resolver la multiplicación del recuadro?

$27x \div 3$

Solución

Se expresa la división como una fracción, así:

$$27x \div 3 = \frac{27x}{3}$$

Donde se tiene que $\frac{27}{3}$ es el coeficiente numérico y **x** el factor literal.

Así, se resuelve $\frac{27}{3}$ como la división $27 \div 3 = 9$

Y se obtiene que $27x \div 3 = 9x$.

Recuerda

La división es una fracción indicada entre dos números. Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

La regla de signos establece que si se dividen dos números del mismo signo, el cociente será positivo. En cambio, si son de signos distintos, el cociente será negativo.

Conclusión

Para **dividir un monomio entre un número**, se divide el coeficiente numérico del monomio entre el número dado y se mantiene el mismo factor literal. Se deben considerar las reglas de signos.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes divisiones.

a. $-7x^2 \div 7 = -x^2$ ⟶ Se divide $-7 \div 7 = -1$ y se mantiene $\mathbf{x^2}$.

b. $48ab \div 6 = 8ab$ ⟶ Se divide $48 \div 6 = 8$ y se mantiene **ab**.

¿Qué pasaría?

Si la división entre los números no es exacta, se indica como fracción y se simplifica si es posible. Por ejemplo:

$$12m^3 \div 10 = \frac{12}{10}m^3$$

Se simplifica $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ y así se obtiene que:

$$12m^3 \div 10 = \frac{6}{5}m^3$$

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $25x \div 5$	**b.** $32a^2 \div 4$	**c.** $5xy \div 7$
d. $15m^2 \div 15$	**e.** $81w^5 \div 9$	**f.** $100p \div 10$
g. $9y \div 3$	**h.** $12mn \div -3$	**i.** $-42p^3 \div -6$
j. $-8n \div -8$	**k.** $32pqr \div 12$	**l.** $-20s^2t \div 12$

Recuerda

La propiedad distributiva de la multiplicación establece lo siguiente:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

¿Qué pasaría?

En el caso de que sea el producto de un binomio por un número, el resultado es el mismo por la propiedad conmutativa de la multiplicación. Es decir, $(x + y) \cdot a = a(x + y)$.

2.7 Multiplicación de un binomio por un número

Problema

¿De qué manera se puede resolver la multiplicación del recuadro?

$4(2x + 5)$

Solución

Se expresa en forma de multiplicación de la siguiente manera:

$$4 \cdot (2x + 5)$$

Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

$$4 \cdot 2x + 4 \cdot 5$$

Se resuelven la multiplicación del número por el monomio y de los números entre sí.

$$8x + 20$$

Conclusión

Para **multiplicar un número por un binomio**, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o a la resta.

$a(x + y) = ax + ay$ o también $a(x - y) = ax - ay$

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $-2(m + 5) = -2 \cdot m + (-2) \cdot 5$ → Se aplica la propiedad distributiva.
$= -2m + -10$ → Se resuelven las multiplicaciones.

b. $3(2p - 1) = 3 \cdot 2p - 3 \cdot 1$ → Se aplica la propiedad distributiva.
$= 6p - 3$ → Se resuelven las multiplicaciones.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $5(3x + 2)$ **b.** $8(q + 10)$ **c.** $-2(1 + 6m)$
d. $(4y + 3) \cdot 7$ **e.** $(2w + 7) \cdot -2$ **f.** $6(x - 3)$
g. $-5(2p - 5)$ **h.** $(n - 4) \cdot 6$ **i.** $9(1 - 2b)$

2.8 División de un binomio entre un número

Problema

¿De qué manera se puede resolver la división del recuadro?

$(4x - 6) \div -2$

Solución

Se divide cada término del binomio entre el número. → $(4x \div -2) - (6 \div -2)$

Se dividen las expresiones anteriores considerando las leyes de signos. → $-2x - (-3)$

Se elimina el paréntesis sumando el opuesto de -3. → $-2x + 3$

Conclusión

Para **dividir un binomio entre un número**, se divide cada uno de los términos del binomio entre el número dado, manteniendo la operación indicada entre los términos y considerando las reglas de signos. Si la división entre los números no es exacta se indica como fracción y se simplifica de ser posible.

Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes divisiones.

a. $(8x + 12) \div 4 = (8x \div 4) + (12 \div 4)$ → Se divide cada término.
$= 2x + 3$ → Se divide cada monomio entre el número.

b. $(20 - 5a) \div -8 = (20 \div -8) - (5a \div -8)$ → Se divide cada término.
$= \frac{20}{-8} - \frac{5}{-8}a$ → Se indica como fracción.
$= -\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{8}a\right)$ → Se simplifica $\frac{20}{-8}$.
$= -\frac{5}{2} + \frac{5}{8}a$ → Se suma el opuesto de $-\frac{5}{8}$.

Recuerda

La resta de un número entero es igual que la suma de su opuesto. Es decir, $a - b = a + (-b)$.

¿Qué pasaría?

Si se tiene la división de un número entre un binomio, no es posible aplicar la misma estrategia, pues la división no es conmutativa. Es decir, el resultado de **a ÷ b** es distinto al de **b ÷ a**. En ese caso, se indica la división mediante una fracción. Por ejemplo:

$2 \div (x + 2) = \frac{2}{x + 2}$.

Práctica

Trabaja en **tu cuaderno**

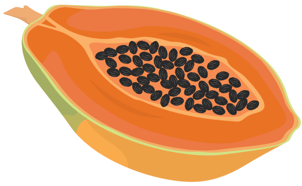
1. Resuelve las siguientes divisiones.

a. $(2x + 4) \div 2$ **b.** $(6y - 9) \div 3$ **c.** $(-15b + 10) \div 5$

d. $(-28w - 14) \div 7$ **e.** $(6m - 9) \div -3$ **f.** $(4 + 8a) \div 2$

g. $(15 - 9x) \div 6$ **h.** $(-25x + 5) \div -10$ **i.** $(y + 2) \div 2$

2.9 Reducción de expresiones algebraicas



Problema

En una venta de frutas, una papaya cuesta **x** balboas. María compra 5 y Carlos compra 3. ¿Cuál expresión algebraica representa el gasto total de María y Carlos?

Solución

El gasto total de María y Carlos se puede representar con la expresión algebraica $\mathbf{5x + 3x}$, pero una expresión algebraica reducida para esta representación es $\mathbf{8x}$; es decir, entre los dos compraron 8 papayas. También se puede aplicar la propiedad distributiva a la expresión $\mathbf{5x + 3x}$ para determinar su forma reducida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 5x + 3x &= (5 + 3) \cdot x \\ &= 8 \cdot x \\ &= 8x \end{aligned}$$

¿Qué pasaría?

Si en el problema inicial se quisiera expresar la diferencia del gasto de María y Carlos, se restaría $5x - 3x$, para lo cual aplicando la propiedad distributiva se obtiene que $5x - 3x = (5 - 3)x = 2x$.

Conclusión

Para determinar la **expresión algebraica reducida** de una expresión algebraica dada, se aplica la propiedad distributiva.

Recuerda

El resultado de multiplicar por 0 siempre es 0. Por ejemplo $0 \cdot x = 0$.

Observa cómo se hace

Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a. $12x + 6x = (12 + 6)x$ → Se aplica la propiedad distributiva.
$= 18x$ → Se suman los números.

b. $-15y^2 - 5y^2 = (-15 - 5)y^2$ → Se aplica la propiedad distributiva.
$= -20y^2$ → Se resuelve la operación entre los números.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a. $4a + 2a$	b. $y + y$	c. $3x - 8x$
d. $-5b + 2b$	e. $-3w + 7w$	f. $-2p - p$
g. $-m - m$	h. $x - x$	i. $10n - 3n$

2.10 Reducción de términos semejantes

Problema

¿De qué manera se reduce la siguiente expresión algebraica?

$$6x - 5 - 4x + 1$$

Solución

Se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para juntar los términos de la expresión que poseen el mismo factor literal y los números que no poseen factor literal.

$$6x - 5 - 4x + 1 = (6x - 4x) + (-5 + 1)$$

Se reducen los dos primeros términos y los números sin factor literal.

$$(6x - 4x) + (-5 + 1) = 2x - 4$$

Conclusión

Cuando en una expresión algebraica hay **términos semejantes**, estos se agrupan entre sí para **reducir la expresión algebraica**. Además, los números sin factor literal también se agrupan y se resuelven las operaciones indicadas entre ellos.

Observa cómo se hace

Reduce la siguiente expresión algebraica.

a. $14xy - 4x + 7 - 5xy + 2x + 1$

$= (14xy - 5xy) + (-4x + 2x) + (7 + 1)$ → Agrupar los términos semejantes.

$= 9xy - 2x + 8$ → Reducir los términos semejantes.

Datos interesantes

El *Álgebra de Baldor* es una obra del matemático cubano Aurelio Baldor, publicada en 1941. Este libro ha sido una base fundamental para el estudio formal del álgebra durante muchos años.

Recuerda

Dos términos son semejantes si poseen el mismo factor literal. Por ejemplo, $3x$ y $-8x$ son términos semejantes así como $2a^2b$ y $10a^2b$.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Reduce las siguientes expresiones algebraicas mediante la agrupación de términos semejantes.

a. $4x + 3 + 3x + 2$

b. $6m - 4 - 4m - 1$

c. $-4x + 5 + 5x - 3$

d. $2y - 4 - y - 1 + 6$

e. $2ab + 1 + 3a - 5ab - 2a + 5$

f. $-x^2 + 2x + 5 - 4x + 5x^2$

g. $6x - 2y + 2xy + 3x - 2y - 4xy$

h. $3p^2q + 2p^2 - 3q + 8q - p^2 - 2p^2q$

2.11 Suma de expresiones algebraicas

Problema

José y Julia van a comprar **x** cantidad de cuadernos y una mochila cada uno. Si ambos compran cuadernos de 3 balboas cada uno, pero la mochila de José costó 20 balboas y la de Julia 15 balboas, ¿cuáles expresiones representan lo que pagó cada uno? ¿Cuánto pagaron entre los dos?

Solución

Lo que pagó José: $3x + 20 \longrightarrow$ **x** cuadernos de B/.3 y una mochila de B/.20.

Lo que pagó Julia: $3x + 15 \longrightarrow$ **x** cuadernos de B/.3 y una mochila de B/.15.

Para determinar lo que pagaron entre los dos se suman las dos expresiones anteriores:

$$(3x + 20) + (3x + 15)$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$(3x + 20) + (3x + 15) = (3x + 3x) + (20 + 15) = 6x + 35$$

Desarrollo sostenible

Para contribuir con la conservación del medio ambiente se debe procurar seguir la regla de las tres R: reducir, reutilizar y reciclar.

Conclusión

Para **sumar dos expresiones algebraicas**, se indica la operación con el signo correspondiente y luego se identifican los términos semejantes para agruparlos y reducirlos.

Observa cómo se hace

Suma **$-3x + 7$** con **$4x - 10$**.

$(-3x + 7) + (4x - 10) \longrightarrow$ Se plantea la suma.

$(-3x + 4x) + (7 - 10) \longrightarrow$ Se agrupan los términos semejantes.

$x - 3 \longrightarrow$ Se reducen los términos semejantes.

Práctica

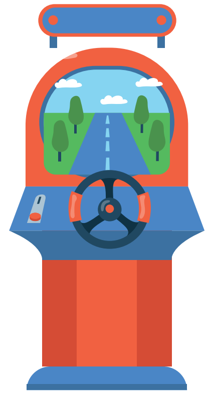
Trabaja en tu cuaderno

1. Suma las expresiones indicadas en cada caso.
   - a. $(2x) + (3x - 4)$
   - b. $(-5b) + (4b + 2)$
   - c. $(3a - 4) + (5a + 2)$
   - d. $(2m + 5) + (5m - 4)$
   - e. $(5y + 4x - 7) + (2y - 6x - 10)$
   - f. $(-9n + 2n^2 - 5) + (2n^2 + 3n + 3)$

2.12 Resta de dos expresiones algebraicas

Problema

Irene compró 10 fichas para un videojuego y Carlos compró 8 fichas. Si luego de jugar ambos compraron un combo de comida por 7 balboas cada uno, ¿cuál expresión representa lo que gastó cada uno? ¿Cuánto más gastó Irene que Carlos?



*1 ficha = **x** balboas*

Solución

Lo que pagó Irene: $10x + 7 \longrightarrow$ 10 fichas de **x** balboas y un combo de B/.7.

Lo que pagó Carlos: $8x + 7 \longrightarrow$ 8 fichas de **x** balboas y un combo de B/.7.

Para determinar lo que pagó de más Irene, de la expresión $\mathbf{10x + 7}$ se resta $\mathbf{8x + 7}$:

$$(10x + 7) - (8x + 7)$$

Se convierte en suma, cambiando el sustraendo por el opuesto.

$$(10x + 7) - (8x + 7) = (10x + 7) + (-8x - 7)$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$(10x - 8x) + (7 - 7) = 2x$$

Irene pagó **2x** más que Carlos.

¿Qué pasaría?

El opuesto de una expresión algebraica se obtiene al expresar el opuesto de cada término. Por ejemplo, el opuesto de $\mathbf{7x - 8}$ es $\mathbf{-7x + 8}$, porque el opuesto de $\mathbf{7x}$ es $\mathbf{-7x}$ y el opuesto de -8 es 8.

Conclusión

Para **restar dos expresiones algebraicas**, se indica la operación con el signo correspondiente, se transforma en suma y luego se identifican los términos semejantes para agruparlos y reducirlos. Por ejemplo:

- Para restar de $\mathbf{-5x + 9}$ la expresión $\mathbf{7x - 8}$, se convierte en suma así:

$$(-5x + 9) - (7x - 8) \longrightarrow (-5x + 9) + (-7x + 8)$$

- Luego, se resuelve de la misma manera que una suma:

$$(-5x + 9) + (-7x + 8) = (-5x - 7x) + (9 + 8) = -12x + 17$$

Recuerda

Solo se reducen los términos que son semejantes; es decir, los que tienen el mismo factor literal.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resta las expresiones indicadas en cada caso.
   a. De $3x + 7$ restar $9x + 2$
   b. De $5x - 4$ restar $3x - 4$
   c. De $-y - 5$ restar $2y + 5$
   d. De $6p - 2$ restar $-4p + 4$
   e. De $5x^2 + 2x + 5$ restar $3x^2 + x - 2$
   f. De $6xy - 7y$ restar $5x + 4xy$

2.13 Operaciones combinadas

Problema

¿De qué manera se reduce la siguiente operación combinada?

$$-2(-x + 4) + 5(-2x + 3)$$

Recuerda

Para multiplicar un número por un binomio, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o a la resta.

Solución

Se observa que la operación está formada por la suma de dos multiplicaciones. Por lo tanto se resuelven primero esas dos multiplicaciones para luego sumar sus resultados.

- $-2(-x + 4) = (-2) \bullet (-x) + (-2) \bullet 4 = 2x - 8$
- $5(-2x + 3) = 5 \bullet (-2x) + 5 \bullet 3 = -10x + 15$

Se suman:

$$\begin{aligned} &(2x - 8) + (-10x + 15) \\ &= (2x - 10x) + (-8 + 15) \\ &= -8x + 7 \end{aligned}$$

Conclusión

Para **resolver operaciones combinadas con expresiones algebraicas**, se resuelven las operaciones respetando la prioridad. Primero multiplicaciones y divisiones y por último sumas y restas.

Observa cómo se hace

Resuelve $3(4x + 2) - (6x - 12) \div 3$.

$3(4x + 2) - (6x - 12) \div 3 = (12x + 6) - (2x - 4)$ → Multiplicación y división.

$= (12x + 6) + (-2x + 4)$ → Convertir en suma.

$= 12x - 2x + 6 + 4$ → Agrupar términos semejantes.

$= 10x + 10$ → Reducir términos semejantes.

Práctica

Trabaja en tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.
   a. $6(x - 3) + 3(2x + 7)$
   b. $(y - 2) - 4(y - 1)$
   c. $-6(-n + 1) - 8(-n - 3)$
   d. $-5(3a - 2) + 5(-a - 2)$
   e. $(-2p - 4) \div 2 - (-4p - 5)$
   f. $-(-4w - 2) + (-4w - 2)$

2.14 Practica lo aprendido

Trabaja en tu cuaderno

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones.
   a. $2(3y + 1)$
   b. $7(-2a + 8)$
   c. $2(12x - 18)$
   d. $5(-2b - 4)$

2. Efectúa las siguientes divisiones.
   a. $(-16x + 8) \div 4$
   b. $(-6y - 2) \div (-2)$
   c. $(9a - 6) \div 3$
   d. $(15b - 10) \div 5$

3. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.
   a. $10x + 2x$
   b. $-4x - 2x$
   c. $18b - 8b$
   d. $-5a - 3a$

4. Agrupa los términos semejantes y reduce las siguientes expresiones algebraicas.
   a. $-4y + 2 - y - 10$
   b. $-10b + 8 + 4b - 8$
   c. $7a - 8 - 7a - 4$
   d. $-10x + 7 + 11x - 7$

5. Suma las siguientes expresiones algebraicas.
   a. $4x + 11$ con $-3x - 6$
   b. $-10y + 3$ con $5y - 3$
   c. $-10 + 6x$ con $13 - 6x$
   d. $6 + 8b$ con $5 - 3b$

6. Resta las expresiones algebraicas indicadas.
   a. De $-4x + 9$ restar $-5x - 9$
   b. De $-m + 2$ restar $-m + 7$
   c. De $3y + 4$ restar $-y + 4$
   d. De $45 - 2n$ restar $3n - 20$

7. Realiza las siguientes operaciones combinadas.
   a. $2(x - 1) - (-2x + 1)$
   b. $3(2y - 4) - 2(y + 1)$
   c. $3(4y - 5) - 2(3y - 5)$
   d. $4(2y - 3) - 2(4y - 3)$

8. Plantea cada situación con una operación de expresiones algebraicas y resuelve.
   a. Un transportista cobra **x** balboas por cada kilómetro recorrido, más un monto fijo de 5 balboas. Si realizó un viaje de 25 km y otro de 10 km, ¿Cuál expresión algebraica reducida representa el total ganado en esos dos viajes?

   b. La edad de María se representa con la letra **m** . Si Laura es dos años mayor que María y la edad de Juan es igual que el doble de la de Laura. ¿Cuál expresión reducida representa la suma de la edad de los tres?

   c. En una librería venden libros a 10 balboas cada uno. Si Pablo compró una cantidad **p** y Elsa compró 2 libros más que Pablo, ¿cuál expresión algebraica reducida representa el total que pagaron entre los dos?

Instrumento de Autoevaluación

Evalúa el nivel de desempeño que has logrado durante la unidad. Utiliza de la siguiente guía. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Criterios	Desempeños		
	Logrado	Medianamente logrado	Por lograr
1. Identifico los términos en una expresión algebraica.			
2. Clasifico términos algebraicos en enteros, fraccionarios, racionales e irracionales.			
3. Reconozco los elementos de un término algebraico.			
4. Identifico términos algebraicos semejantes.			
5. Clasifico expresiones algebraicas según la cantidad de términos en: monomios, binomios, trinomios o polinomios.			
6. Determino el grado relativo y absoluto en monomios y polinomios.			
7. Ordeno expresiones algebraicas según el grado relativo de alguna de sus variables.			
8. Resuelvo la multiplicación de un monomio por un número y viceversa.			
9. Determino el cociente al dividir un monomio entre un número.			
10. Multiplico binomios por un número y viceversa.			
11. Divido un binomio entre un número.			
12. Reduzco expresiones algebraicas semejantes.			
13. Identifico términos algebraicos semejantes en una expresión algebraica para agruparlos y reducirlos.			
14. Sumo expresiones algebraicas mediante la reducción de términos.			
15. Resto expresiones algebraicas mediante la reducción de términos.			
16. Resuelvo operaciones combinadas de expresiones algebraicas.			

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Panamática 7

Guía del estudiante
Trimestre I

2022

De la mano con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)