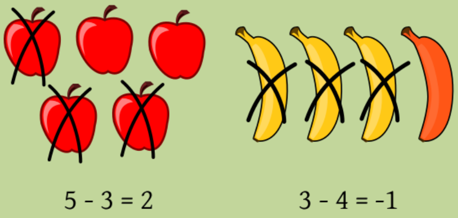
Los números enteros

La unión de los números naturales y los enteros negativos forma el conjunto de los números enteros, que se designa con la palabra Z. Está constituido por infinitos elementos y se representan de la siguiente manera:

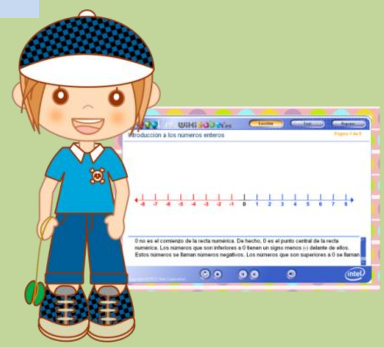


Z = {…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}

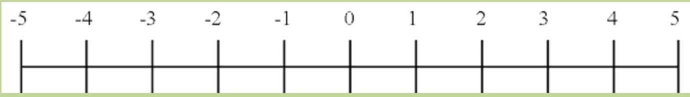
Los números negativos se introducen para poder realizar operaciones como la resta 7 – 12, en los casos en que ellos tengan sentido; por ejemplo, cuando se dice que la temperatura mínima de un día ha sido 12 ºC inferior a la anterior, que fue de 7ºC, significa que su valor es de 5 ºC bajo 0 bajo cero, es decir, -5 ºC

De modo similar al empleado con los números naturales, los enteros también pueden expresarse gráficamente mediante una recta numérica.

3.1 ubicación y orden en la recta numérica

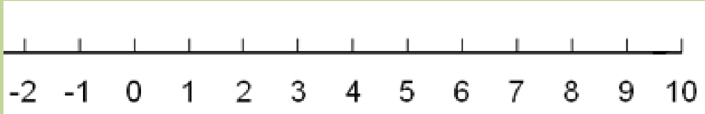


Dada una recta y un punto 0, que corresponde a la posición cero, se disponen los números enteros positivos sobre la semirrecta a la derecha de 0, y los negativos sobre la puesta. Para ello, se traza una línea horizontal y se hace una marca en un punto hacia el centro, que representa el punto cero. A su derecha, se hacen marcas, separadas por la misma distancia, y sobre ellas se escriben se escriben los números enteros positivos 1, 2, 3,…..el proceso se repite a la izquierda del cero, pero se escriben los números enteros negativos: -1, -2, -3,…. Tal como se muestra en la siguiente ilustración:

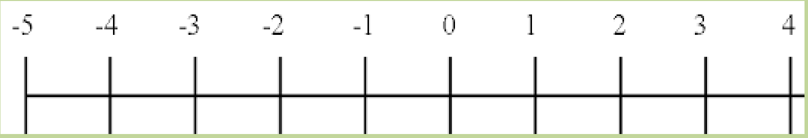


Un número entero es mayor que otro sí, en la recta numérica queda a su derecha.

Se pueden dar tres casos diferentes: que ambos enteros sean positivos, que ambos sean negativos o que uno sea positivo y el otro negativo. En todos ellos el número mayor es el que se encuentra a la derecha sobre la recta numérica. Por ejemplo, si se representan en ella los enteros positivos 4 y 9, como en la figura siguiente,



Se observa que el 9 queda a la derecha del cuatro, por lo que se puede afirmar que $9 > 4$. Cuando ambos son enteros son negativos, el mayor es de nuevo el que se encuentra más a la derecha en la recta numérica, como sucede al situar -2 y -5:



Por lo tanto, -2 es mayor que -5.

Cuando un entero es positivo y el otro negativo, se aplica de nuevo el mismo criterio y se dibujan, por ejemplo, el 3 y el -11 en la recta numérica, se observa que 3 está a la derecha de -11.

Por lo tanto, 3 es mayor que -11.

3.2 Valores absoluto y simétrico de un número

El valor absoluto es un entero es el valor del número, prescindiendo del signo. Para indicar el valor absoluto de un numero entero, se encierra este entre dos barras verticales: el valor absoluto de + 4, por ejemplo, se escribe como:

$|+4| = 4$

De la misma manera, el valor absoluto de -4 es:

$|-4| = 4$

Como se puede apreciar, + 4 y -4 tienen el mismo valor absoluto, 4, aunque su signo sea diferente. Dos números enteros de distintos signos pero de igual valor absoluto se llaman números opuestos de 9 es -9, y el de -14 es 14.

Comparación

Mediante el examen de los valores absolutos y de los signos de dos enteros, es posible determinar cuál es el mayor.

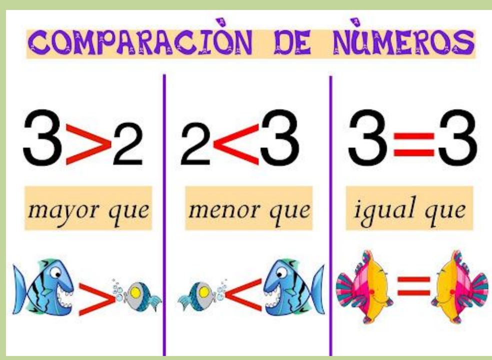
Dos números enteros son iguales cuando tienen igual valor absoluto y el mismo signo. El número 0, que es su propio opuesto, es mayor que cualquier número entero negativo y menor que cualquier número entero negativo y menor que cualquier positivo. Por tanto, cualquier entero positivo será mayor que cualquier otro negativo, y en particular, entre dos enteros con igual valor absoluto y distinto signo, el positivo siempre será el mayor.

Si se trata de dos enteros positivos, el mayor será el que tenga valor absoluto más elevado, mientras que si ambos tienen signos negativos, la situación es la opuesta: es mayor el que tiene valor absoluto. Por ejemplo, si se toman los números – 2 y -5, sus valores absolutos son:

$|-2| = 2$

$|-5| = 5$

Dado que $2 < 5$, entonces $-2 > -5$.



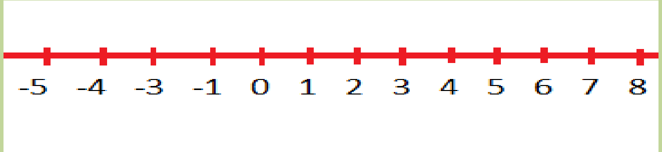
3.3 operaciones con números enteros

Suma

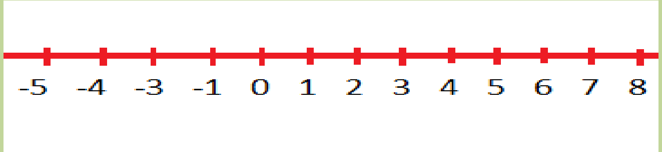
Sumar 2 números es añadir la cantidad del segundo al primero. En caso de los números enteros, hay que tener en cuenta la cantidad que se añaden son positivas o negativas. Por ejemplo, si se quieren sumar

(-3) + (+5)

Al representar el número -3 en la recta numérica, su posición es:



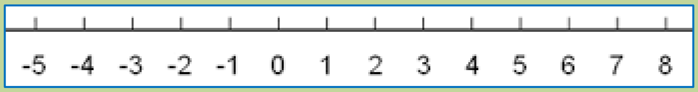
Añadir 5 unidades positivas equivale, entonces, a contar 5 divisiones hacia la derecha desde la posición de -3:



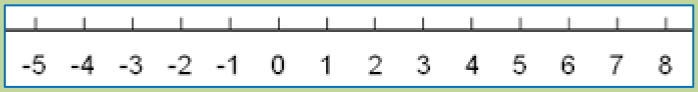
Según esto, 2 es el resultado de añadir 5 unidades positivas al número -3:
(-3) + (+ 5) = 2

En cambio, si se quiere sumar: (+2) + (-4)

Se trata de añadir unidades negativas. Para empezar se ubica en la recta numérica el número + 2:



Añadir 4 unidades negativas es restar (-4) equivale a contar hacia la izquierda cuatro divisiones, a partir de +2



El resultado de añadir 4 unidades negativas a +2 es, por tanto, -2:

$(+2) + (-4) = -2$

Así pues, sumar unidades negativas es restar (quitar) unidades positivas.

A partir de estos ejemplos se pueden extraer las siguientes reglas:

- Si los números tienen el mismo signo, se suman los valores absolutos y el signo es el mismo de los números. Por ejemplo, para sumar (-5) + (-6), primero se hallan los valores absolutos:

$|-5| = 5;$ $|-6| = 6$

Se suman ambos resultados:

$5 + 6 = 11$

Y, por fin se añade el signo correspondiente, en este caso, negativo:
$(-5) + (-6) = -11$

En resumen, cuando se suman números enteros de igual signo, el resultado es otro número entero del mismo signo.

- Para sumar números enteros de distinto signo, se restan sus valores y se absolutos coloca el resultado el signo del número de mayor valor absoluto. Por ejemplo, para sumar (+ 2) + (- 6), los valores absolutos son:

$|+2| = 2;$ $|-6| = 6$

Se resta 6 – 2 = 4. Como 6 es el mayor absoluto y el signo del número el que procede es negativo, el resultado es negativo:

(+2) + (-6) = - 4

Como regla, debe recordarse que, cuando se suman números enteros de distintos signos, se resta el menor valor absoluto al mayor, y el resultado lleva el signo del número del mayor valor absoluto.

Propiedades

- ***Operación interna*****:** la suma de los dos números enteros es siempre otro número entero.

- ***Asociativa:*** *tres* números se pueden sumar en cualquier orden, sin que el resultado cambie. En forma algebraica, se escribe:

  (a +b) + c = a + (b + c)

  Donde a, b y c representan tres enteros cualesquiera. Por ejemplo, si se toman – 3, + 2 y -1, se cumple la siguiente igualdad:

  [(- 3) + (+ 2)]+ (- 1) =   (- 3) + [(+ 2) + (- 1)]

- ***Conmutativa:*** Dos números se pueden sumar sin que importe en qué orden. De forma algebraica, se escribe:

  a+ b = b + a

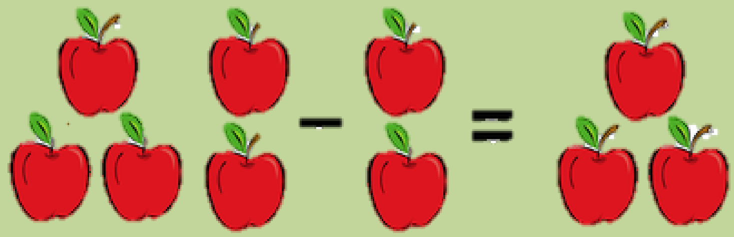
- ***Elemento neutro:*** en el conjunto de los enteros existe un número que, sumado a cualquier otro, da siempre ese otro. Este número se llama elemento neutro de la suma y es el cero. Por ejemplo:

- (-2) + 0 = - 2
  0   + (+ 5) = + 5

- ***Elemento simétrico*****:** Para todo número entero, existe otro con tal que, sumado con el da como resulta el elemento neutro; en tal caso se dice de estos enteros que son cada uno el elemento simétrico del otro. En concreto, el simétrico de un entero es el que posee de igual valor absoluto pero distinto signo, es decir, su opuesto: 17 y -17 son cada uno el simétrico del otro.

Resta

Para efectuar la resta, basta sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Por ejemplo:



(+ 5) – (+7) =   (+5) + (- 7)

Como son los números con signos opuestos, al sumarlos se restan sus valores absolutos, y a la solución se añade el signo del número de mayor valor absoluto. Por lo tanto:

$|+5| = 5; \quad |-7| = 7$

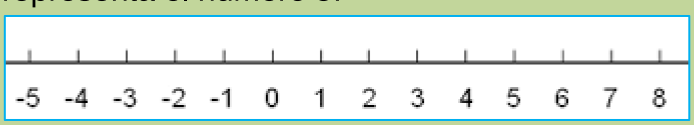
Ser restas los valores absolutos:

7 – 5 = 2

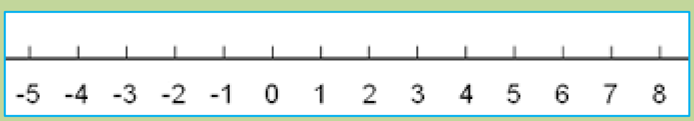
El valor absoluto mayor es 7, y su signo es negativo. La solución es por consiguiente, negativa, negativa.

(+ 5) – (+ 7) = -2

Esta resta se efectúa en la recta numérica de la siguiente manera: primero, se representa el número 5:



Restar 7 enteros equivale a contar hacia la izquierda 7 unidades, a partir del número 5:



Si el sustraendo es negativo es negativo, como sucede en

(+ 7) – (- 6)

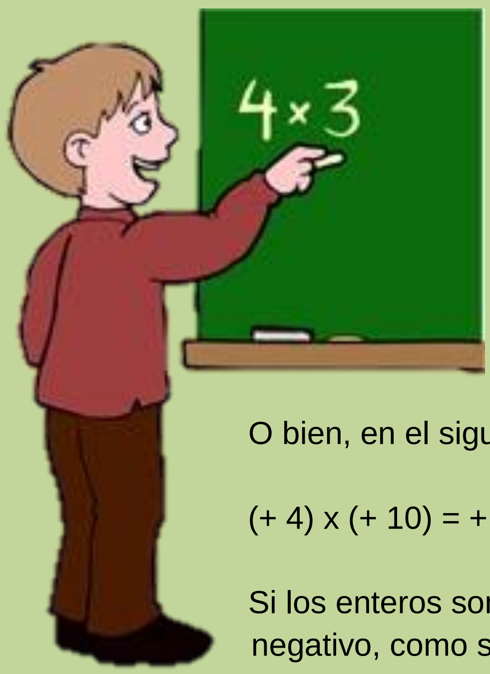
Cuando se cambia el sustraendo por su opuesto, la operación se transforma en una suma:

(+ 7) – (- 6) = (+ 7) + (+ 6) = + 13

Propiedades

La diferencia de los números enteros no es asociativa ni comunicativa aunque tiene elemento neutro, el cero.

Multiplicación



En el producto de números enteros se pueden presentar distintas situaciones:

- Si ambos números enteros tienen el mismo signo, para obtener su producto se multiplican sus valores absolutos, y el resultado en un número entero positivo. Por ejemplo:

(- 2) x (- 8) = + 16

O bien, en el siguiente caso:

(+ 4) x (+ 10) = + 40

Si los enteros son de signo contrario, el resultado tiene siempre signo negativo, como sucede en:
(- 15) x (+ 5) = -75

En síntesis:

(+a) x (+ b) = c Resultado con signo +

(- a) x (- b) = c Resultado con signo –

Propiedades

- **Operación interna:** como sucede en el caso de la suma de números enteros, la multiplicación de dos números enteros, es siempre otro número entero.

- **Asociativa:** al multiplicar tres enteros distintos, resulta indiferente el orden con el que se efectué la operación, ya que el resultado será siempre será el mismo. esta propiedad se enuncia algebraicamente del siguiente modo:

  (+ a x b) x c = a x (b x)

  La igualdad

  [(-3) x (+ 4)] x (- 2) = (-3) x [(+ 4) x (-2)]

  Sirve de muestra para comprobar esta propiedad.
  Se operan, en primer lugar, los corchetes de cada miembro de la igualdad:

  [- 12) x (- 2) = (-3) X [-8]

  Al resolver los productos, se obtiene:

  24 – 24

  El resultado de cada uno de los miembros de la igualdad es el mismo, por lo que cumple la propiedad asociativa.

- **PROPIEDAD CONMUTATIVA:**

  Según esta propiedad, el orden de los factores no altera el producto.
  Algebraico se enuncia como:

  a x b = b x a

  Si se analiza
  (- 6) x 2 = 2 x (-6)

Se constata que el resultado de la multiplicación de cada uno de los miembros es:
- 12= - 12

Es decir, el orden de los factores no ha variado el resultado del producto.

- **Elemento neutro:** el número uno es el elemento neutro de la multiplicación de los números enteros, pues cualquier cantidad multiplicada por 1 permanece invariable.
  En cambio, el producto de la multiplicación por cero de cualquier número entero da como resultado el mismo cero, que, por esta propiedad, recibe el nombre de elemento absorbente.

- **Propiedad distributiva respecto de la suma:**

  Para multiplicar una suma algebraica por un entero, se procede a multiplicar cada uno de los términos de dicha suma por el entero (aplicando la regla de los signos) y a continuación se suman los resultados.
  Por ejemplo:

  (-3) x (+ 4 -2 + 1 -3)

  El número (- 3) multiplica a todos los valores contenidos en paréntesis. Por tanto:

  (-3) x 4 + (-3) x (- 2) + (- 3) x 1 + (-3) x (-3)

  El resultado de estos productos es:

  -12 + 6 -3 + 9

  Se suman por una parte los valores positivos:

  6 + 9 = 15

  Y, por la otra, los negativos:

  12 + 3= 15

  Se restan, finalmente, valores positivos y negativos.
  El resultado es:

  15 - 15 = 0

La operación inversa se denomina ***extracción del factor común.*** Con este procedimiento, la suma:

(+ 10) + (-15)

Se puede transformaren una multiplicación. Primero se descomponen los factores cada número:

(+10)= 2 x 5

(-15) = (-3) x 5

Ambos números tienen un factor común, 5, y en consecuencia, la suma se puede expresar por medio el producto:

(+ 10) + (- 15) = 5 x (2 – 3)

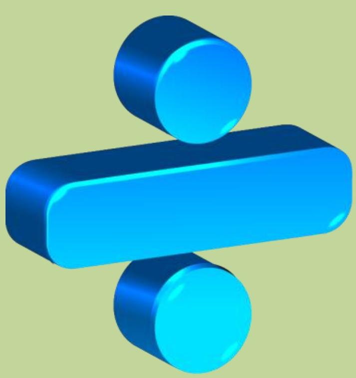
División

La división con números enteros se efectúa del modo que con los naturales en relación con los signos, hay que tener en cuenta las siguientes normas:

Cuando se dividen dos números enteros con el mismo signo, el resultado tiene un signo, el resultado tiene un signo positivo; y los signos de ambos enteros son diferentes, el resultado es negativo. En síntesis:

$$\left.\begin{array}{l}(+\ a) \div (+\ b) = +\ c \\ (-\ a) \div (-\ b) = +\ c\end{array}\right\} \text{resultado con signo +}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-\ a) \div (-\ b) = +\ c \\ (+\ a) \div (+\ b) = +\ c\end{array}\right\} \text{resultado con signo -}$$



Por ejemplo, si se divide

(-10) ÷ (-2)

Primero se dividen ambos numeros prescindiendo de signos:

10 ÷ 2 = 5

Como ambos tienen signos negativo,el resultado ha de ser positivo. Por tanto:

(- 10) ÷ (- 2) = + 5

En cambio, si se divide:

(+ 30) ÷ (- 15)

Como antes, se efectúa la división,sin considerar los signos y, por tanto:

30 ÷15 = 2

Como los enteros tenían signos diferentes, el resultado es negativo, es decir:

(+ 30) ÷ (- 15) = - 2

Propiedades

Ningun número se puede dividir por cero. La división tiene la propiedad distributiva respecto de la suma, que se aplica de la misma manera como en el caso del producto, pero sustituyendo esta operación por la división.