1.4. División de números complejos

A. Problema

Sean **z = a + bi** y **w = c + di**. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$, realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.

2. Efectúa los productos indicados.

3. Encuentra el resultado.

B. Solución

1. Multiplica $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$, toma en cuenta que, como $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = 1$, la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \bullet \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

2. Efectúa los productos:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{[ac-(-bd)]+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

3. Por lo tanto, el resultado de la división de z entre w es el siguiente número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

C. Conclusión

Sean los números complejos z = a + bi y w = c + di. La **división** de **z** entre **w** se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo: Divide 4 + 3i entre 5 - i.

Aplica el procedimiento indicado, así:

Recuerda

Una fracción cuyo numerador y denominador sean iguales equivale a 1.

Por ejemplo:

$\frac{2}{2} = 1$ y $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = 1$

¡Atención!

El desarrollo de la multiplicación de un número complejo y su conjugado es el siguiente:

$(c + di)(c - di) =$

$(c^2 - -d^2) + (cd - dc)i =$

$(c^2 + d^2) + 0i =$

$c^2 + d^2$

$$\frac{4+3i}{5-i}=\frac{4\cdot 5+3\cdot(-1)}{5^2+1^2}+\frac{-4\cdot(-1)+3\cdot 5}{5^2+1^2}$$

$$=\frac{20+(-3)}{25+1}+\frac{4+15}{25+1}i=\frac{17}{26}+\frac{19}{26}i$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i}=\frac{17}{26}+\frac{19}{26}i$.

Observa cómo se hace

Resuelve la operación $\frac{2+4i}{-3-9i}$.

$$\frac{2+4i}{-3-9i}=\frac{2\cdot(-3)+4\cdot(-9)}{(-3)^2+(-9)^2}+\frac{-2\cdot(-9)+4\cdot(-3)}{(-3)^2+(-9)^2}i$$

Aplica la fórmula de la división entre números complejos.

$$=\frac{-6+(-36)}{9+81}+\frac{18+(-12)}{9+81}i$$

Resuelve las operaciones planteadas en cada fracción.

$$=\frac{-42}{90}+\frac{6}{90}i$$

Simplifica las fracciones.

$$=\frac{-7}{15}+\frac{1}{15}i$$

Por lo tanto, $\frac{2+4i}{-3-9i}=\frac{-7}{15}+\frac{1}{15}i$.

D. Práctica

1. Anota el resultado de $\frac{z}{w}$.

a. z = 3, w = 2 + 4i

b. z = -7i, w = 6 - 2i

c. z = -4 + 6i, w = 2 + 7i

d. z = 4 - 2i, w = -5i

e. z = 2, w = -2 - 3i

f. z = 3 - i, w = -9 - 6i

g. z = -2 + 9i, w = -1

h. z = -5i, w = -7 + 6i

i. z = -9 - 6i, w = 3

j. z = i, w = -9 - 5i

k. z = 5, w = 2 - 7i

l. z = 2 + 9i, w = -3 -i

m. z = -3 - 2i, w = 5 + 2i

n. z = -2 + 6i, w = 3i

2. Escribe el resultado de las siguientes divisiones de números complejos.

a. $(-15 - 5i) \div (1 - 6i)$

b. $(10 - 4i) \div (-10 - 2i)$

c. $(-8 + i) \div (6 + 9i)$

d. $(5 - 3i) \div 3$

e. $\left(\frac{3}{4} + i\right) \div \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\right)$

f. $\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2}i\right) \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)$

g. $(18 + 7i) \div 3i$

h. $(-9 + 8i) \div (3 - 6i)$

i. $[(6 + 2i) + (-16 + 7i)] \div 3$

j. $[(-3 + 5i) \div (-7 - 7i)] - (-1 + 8i)$

k. $(6 - 7i) \div (6 + 9i)$

l. $(-3 + 7i) \div (1 + 8i)$

m. $(-9 + 9i) \div (3 + i)$

n. $(2 - 4i) \div (-8 - 2i)$

3. Calcula el resultado de cada operación si $z = 6 + 2i$ y $w = 2$.

a. $\frac{z}{w}$

b. $\frac{w}{z}$.

c. El conjugado de $\frac{z}{w}$.

d. El conjugado de $\frac{w}{z}$.

e. $\overline{z} \div \overline{w}$

f. $\overline{w} \div \overline{z}$