TEMA 8. OPERACIONES CON FUNCIONES

Después que usted ha comprendido el concepto de función en los ejemplos anteriores, ahora en esta sesión estudiaremos algunas de las operaciones que se pueden realizar cuando trabajamos con funciones. Veremos que, al igual que los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir; así como obtener su dominio.

❖ FUNCIÓN SUMA:

Si f y g son funciones: Su suma f + g es la función definida por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de f y g.

❖ FUNCIÓN DIFERENCIA:

Si f y g son funciones: Su diferencia f – g es la función definida por:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de f y g.

EJEMPLO 1: Dadas las funciones: $f(x) = x^2 + 5x - 4$ y $g(x) = 3x^2 - 7x - 3$ determine $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$

Solución:

a. La adición de las funciones es:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$= (x^2 + 5x - 4 + 3x^2 - 7x - 3) \rightarrow$$ Identifique $f(x)$ y $g(x)$. Reemplace $f(x)$ y $g(x)$
$$= 4x2 - 2x - 7 \rightarrow$$ Sume y combine los términos semejantes.

Como $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R}$, tenemos que: $D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}$

b. La sustracción de las funciones es:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$= (x^2 + 5x - 4) - (3x^2 - 7x - 3)$$ → Identifique $f(x)$ y $g(x)$. Reemplace $f(x)$ y $g(x)$
$$= x^2 + 5x - 4 - 3x^2 + 7x + 3 \rightarrow$$ Cambie de signo paréntesis precedido del signo menos
$$= -2x^2 + 12x - 1 \rightarrow$$ Sume y combine los términos semejantes.

Como $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R}$, tenemos que: $D(f-g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}$

También se puede realizar operaciones entre dos o más funciones. **Observe el siguiente ejemplo.**

EJEMPLO 2: Dadas las siguientes funciones; calcular las operaciones que se piden.

1. $f(x) = -3x^2 - 6x + 3$
2. $g(x) = -x + 2$
3. $h(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13$

a. $(h - f)(x)$ b. $(h + g + f)(x)$ c. $(h - g + f)(x)$ d. $(f + h)(x)$ e. $(g - h)(x)$

Solución:

a. $(h - f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) - (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13 + 3x^2 + 6x - 3$ → **Recuerde cambio de signo**

$= 4x^3 - 2x^2 - x + 10$

b. $(h + g + f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) + (-x + 2) + (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 8x^2 - 13x + 18$ → **Sumando y restando términos semejantes**

c. $(h - g + f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) - (-x + 2) + (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13 + x - 2 - 3x^2 - 6x + 3$

$= 4x^3 - 8x^2 - 12x + 14$

EJEMPLO 3: Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$, vamos a hallar $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$:

a. $f(x) = x - 5$; $g(x) = \frac{5}{x+1}$

Solución: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 5) + \left(\frac{5}{x+1}\right)$ → Busque el MCM

$= \frac{(x-5)(x+1)+5}{x+1}$

$= \frac{x^2-4x}{x+1}$ → reduzca los términos semejantes

Como $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$, tenemos que:

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \cap [\mathbb{R} - \{1\}] = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Significa que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos en 1, pues hace que el denominador de la función que resulta sea igual a 0.

Veamos ahora las siguientes operaciones:

FUNCIÓN PRODUCTO:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones: Su producto $(f \cdot g)(x)$ es la función definida por:

$$(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

Multiplicar y dividir funciones también es como multiplicar y dividir polinomios.

❖ FUNCIÓN COCIENTE:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones: Su cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la función definida por: $\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$

El **dominio** de la función resultante consta de los números que son comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, pero los números x para los cuales $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ deben excluirse del dominio del cociente $\frac{f}{g}$.

EJEMPLO 4: Dadas las funciones: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 5x - 3$. Encuentre el producto y cociente de las funciones.

Solución:

a. **Producto** $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$= (2x + 1)(5x - 3)$ → **Identifique** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **y** $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

Reemplace $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **y** $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

$= (10x^2 - 6x + 5x - 3)$ → **Multiplique los polinomios**

$= 10x^2 + x + 3$ → **Sume y combine los términos semejantes**

Como $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$, tenemos que: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) \cap \boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$

b. Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{2x + 1}{5x - 3}$

Dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$. Significa que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos $\frac{3}{5}$, pues hace que el denominador de la función cociente sea igual a 0.

Recuerde que la división entre cero no está definida, por esta razón eliminamos del dominio el número que hace cero el denominador.