2| CÁLCULO DIFERENCIAL

TEMA 6. LAS FUNCIONES

Generalmente se hace uso de las funciones reales, (aun cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios con el costo en dólares para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano cartesiano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función “x” como el precio y la cantidad de producto como “y”. El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no solo en matemática sino también en física y en otras áreas del conocimiento, por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Una función es entonces una relación que existe entre dos magnitudes donde el valor de una depende de la otra. Como ya hemos explicado, te mostramos otros ejemplos:

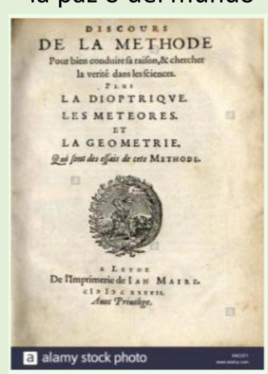
- El costo de una llamada depende de los minutos consumidos.
- La dosis de un medicamento depende del peso del individuo.
- La temperatura del día depende de la hora.

SABÍAS QUE…

La construcción de tablas numéricas para la astronomía y para cálculos aritméticos condujo a una primera aproximación de las funciones, estableciendo el carácter de dependencia entre diferentes magnitudes.

El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia “x” de la variable x.

Si bien ya había logrado un gran reconocimiento como matemático investigó ciertas cuestiones sobre la tangente- y como inventor de una máquina para tallar lentes, en 1633 escribió el Tratado de la paz o del mundo

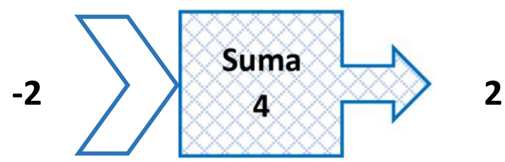


"ego cogito ergo sum" (pienso luego existo). René Descartes.

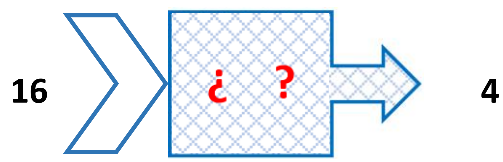
Para facilitar la comprensión de este concepto, recurriremos a la idea de una caja mágica que transforma nuestros elementos de entrada en algo nuevo, dependiendo de las características que tenga nuestra caja.

Ejemplo 1:

a) Supongamos que el código a ejecuta es sumar 4 y que nuestro valor de entrada es -2

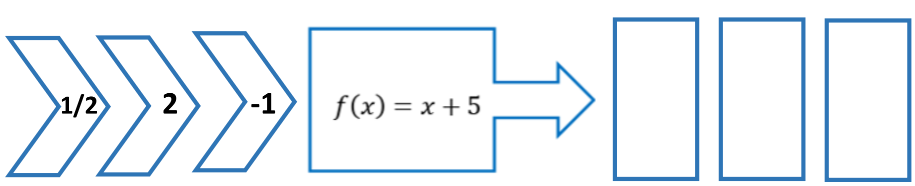


b) Supongamos ahora que nuestro valor de entrada es 16 y nuestro valor de salida es 4. Podría decir ¿cuál fue el código que se le introdujo a la máquina para obtener esta respuesta?



c) Como ya habrás podido deducir, este código de ejecución también puede ser escrito a través de expresiones algebraicas.

¿Qué resultados obtendríamos?



- **Definición de Función:**

Antes de definir una función, te hablaremos de su utilidad: las funciones son utilizadas para representar mediante modelaje relaciones entre variaciones de magnitudes. De esta manera podemos cuantificar mediante fórmulas, las variaciones y predecir el comportamiento de los fenómenos. Por ejemplo, en física el movimiento rectilíneo uniforme, en química las leyes de presión y volumen de los gases, en la economía.

Entonces podemos definir una función como:

> Una relación tal que a cada valor del dominio le corresponde uno y solo un valor del codominio y que se puede representar a través de una expresión algebraica, en un plano cartesiano o en una tabla de valores.

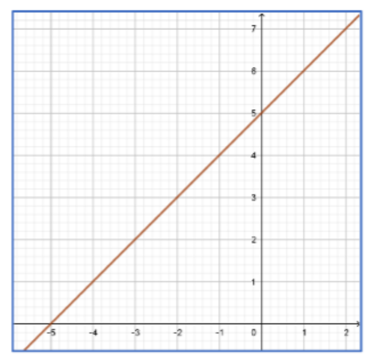
Expresión algebraica

$$f(x) = x + 5$$

Tabla de valores

x	-3	0	5
y	1	2	7

Plano cartesiano



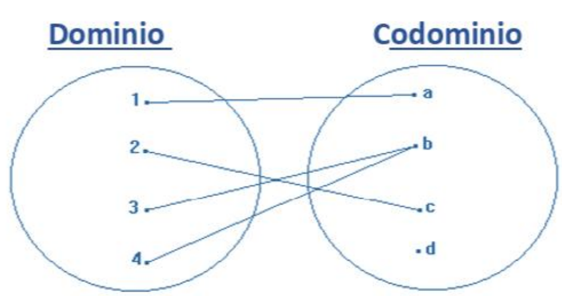
En lenguaje matemático, al valor de entrada se le llama:

- **<u>Dominio:</u>** es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (*x)* en una función.

Y a los valores de **salida se les llama**:

- **<u>Codominio:</u>** es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente (*y)* en una función.

Gráficamente lo representamos de la siguiente manera:



El proceso de determinar el valor de $f(x)$ para un valor de x determinado se le llama valorar la función, es decir el proceso de obtener el valor de salida se llama **<u>Valorización.</u>**

Ejemplo 1:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 5x}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(3),\ f(-2)}$

Solución:

- $f(3) = 3(3)^2 + 5(3) = 3(9) + 5(3) = 27 + 15 = 42$

  Entonces; $\boldsymbol{f(3) = 42}$

  Realizando el mismo procedimiento, tenemos que $\boldsymbol{f(-2) = 2}$

Ejemplo 2:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+4}}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(5),\ f(-3)}$

Solución:

- entonces $\boldsymbol{f(5) = 3}$
- entonces $\boldsymbol{f(-3) = 1}$

Ejemplo 3:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+2}{2x+3}}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(-4)}$

Solución:

- entonces $\boldsymbol{f(-4) = \frac{2}{5}}$

Ejemplo 4:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = 2\,sen\,2x}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(45°)}$

Solución:

- $f(45º) = 2\,sen\,2(45º) = 2\,sen\,90º = 2(1) = 2$ entonces $f(45°) = 2$

Ejemplo 5:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = e^{x+3}}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(-3)}$

Solución:

- $f(x) = e^{(-3)+3} = e^0 = 1$ entonces $f(-3) = 1$

Ejemplo 6:

- **Si** $\boldsymbol{f(x) = log(2x+4)}$ **encontrar** $\boldsymbol{f(48)}$

Solución:

- $f(48) = log\,(2(48) + 4 = log\,(96 + 4) = log\,100 = 2$ entonces $f(48) = 2$

- ## Representación de una función

Existen varias formas de representar una función, entre estas tenemos:

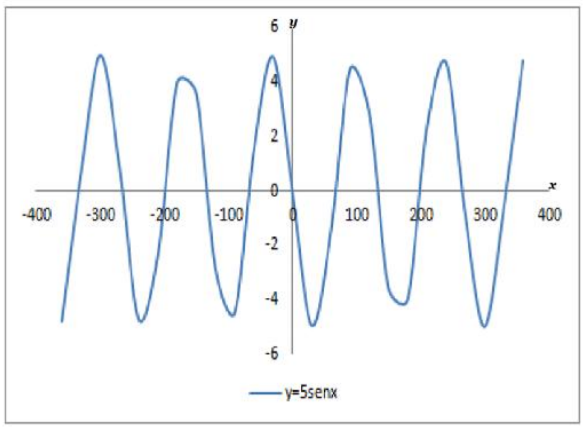
Verbal: *V (t),* velocidad en el instante t del tiempo.

Algebraica: $A = \pi r^2$ área de un círculo

Numérica: por medio de tablas de valores

Visual: por medio de gráficas.

k	$C(k)$
0	1.073
1	1.133
5	1.373
10	1.673

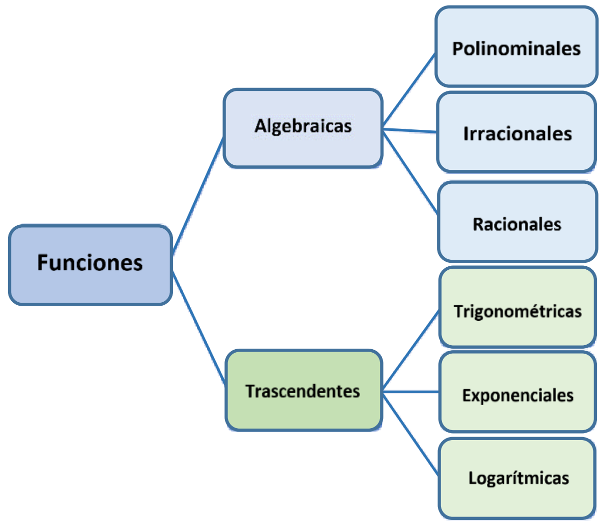


TEMA7. FUNCIONES

La gráfica de una función, que nos da una imagen de su comportamiento, está definida como el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x))/x \in A\}$ localizados en un plano cartesiano. Para realizarlas, generalmente hacemos una tabla de valores para ubicar los puntos en el plano cartesiano, luego los unimos para obtener nuestra gráfica.

Para estar seguros de que nuestra gráfica representa una función, podemos trazar una recta vertical sobre esta, si la recta solo la corta en un punto es una función, pero si la recta la corta en más de un punto entonces nuestra grafica no representa una función. Las funciones se pueden clasificar en:

Las funciones se pueden clasificar en:



Según el tipo de operaciones que se tienen que realizar para obtener sus valores, se clasifican en algebraicas y trascendentes:

- Las funciones algebraicas se refieren a aquellas cuya regla de correspondencia puede ser expresada por medio de un polinomio, una expresión racional (cociente de dos polinomios) o una expresión irracional (forma radical).

- Las funciones trascendentes se refieren a las funciones cuya regla de correspondencia NO es algebraica.

7.1 FUNCIÓN LINEAL

a) Función constante

Es un caso especial de la función lineal donde la pendiente es cero, m=0. Su expresión analítica es $\boldsymbol{f(x) = c,\ c} \in \mathbb{R}$ siendo un número determinado donde todos los valores de salida son iguales a ese número. Su gráfica es una recta horizontal.

- El dominio son todos los números reales.

$$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$$

- El codominio es un solo número.

$$\boldsymbol{C_f = c}$$

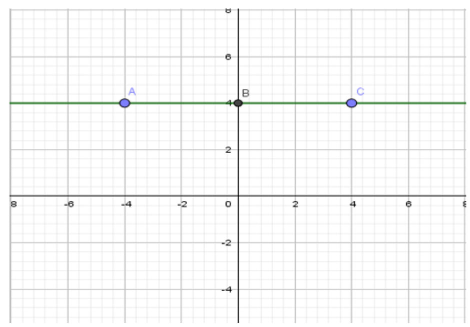
- La gráfica es una recta horizontal.

Ejemplo 1:

$$\boldsymbol{f(x) = 4}$$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $C_f = 4$

x	-4	0	4
y	4	4	4



b) Función lineal

Una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = m\,x + b}$ se denomina función lineal, su gráfica es una línea recta con pendiente (inclinación) m e intersección con el eje de las y en b, es decir el punto $(0, b)$.

Si $m > 0$ la función es creciente.

Si $m < 0$ la función es decreciente

- El dominio son todos los números reales.

$$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$$

- El codominio son todos los números reales.

$$\boldsymbol{C_f} = \mathbb{R}$$

Ejemplo 2:

Determina los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2\,x + 2}$$

Solución:

$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $m = 2$ es positiva función creciente

$\boldsymbol{C_f} = \mathbb{R}$

....

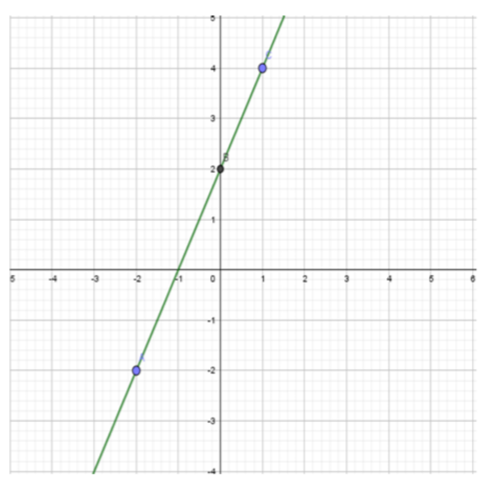
Ordenada en el origen 2 →(0,2)

....

Tabla de valores

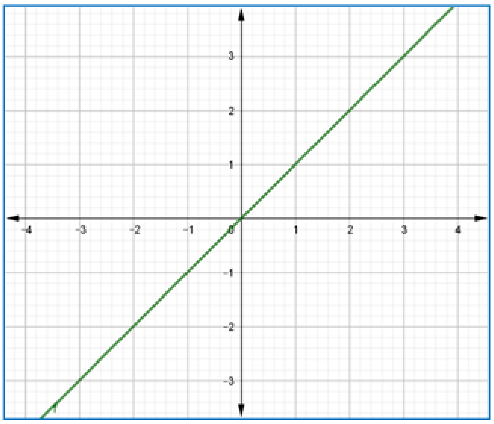
x	-2	0	1
y	-2	2	4

- La **gráfica** es una **recta.**

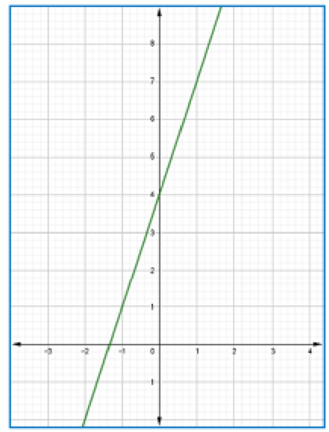


Para cada tarjeta encuentra una razón por la cual se puede considerar es un intruso en el grupo de las tarjetas.

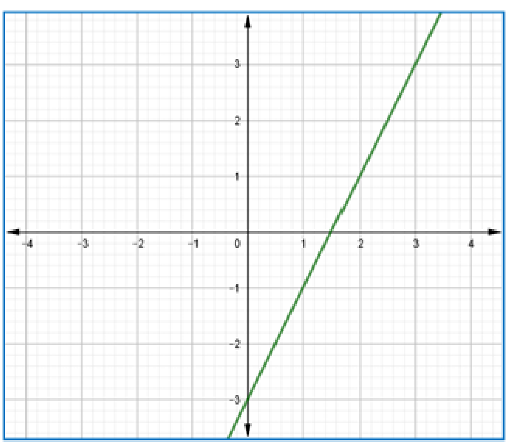
Tarjeta 1



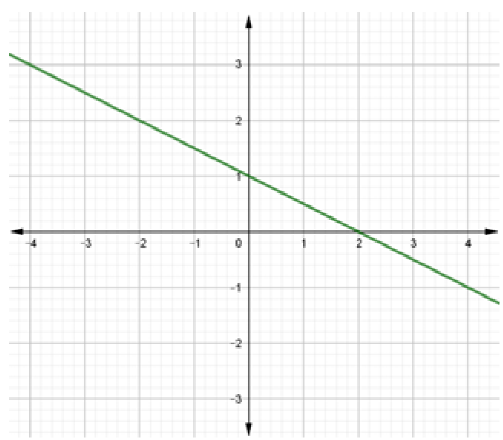
Tarjeta 2



Tarjeta 3



Tarjeta 4



7.2. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función cuadrática

Es una función polinomial de grado dos. Su escritura característica es:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \quad a \neq 0$, pero también la podemos encontrar escrita como:

$f(x) = a(x-h)^2 + k$ donde ***V (h,k)***

Aspectos importantes:

- $a > 0$ concavidad hacia arriba.
- $a < 0$ concavidad hacia abajo.
- El dominio son todos los números reales. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- *Vértice:* $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- Posee intervalos creciente y decreciente.
- El valor Máximo o Mínimo de una función cuadrática se presenta en $X = -\frac{b}{2a}$, de aquí:
  - Si $a > 0$ entonces tendrá un valor mínimo y será $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$,
  - Si $a < 0$ entonces tendrá un valor máximo y será $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- La intersección con el eje y se da cuando $x = 0$, por tanto, en $(0, c)$
- Su representación gráfica es una parábola de eje de simetría vertical.
- El eje de simetría corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$

Si $a < 0$ entonces el codomino son los valores menores e iguales "$\leq$" al valor de la ***"y"*** del vértice.

$$C_f = (-\infty, y_{\text{vértice}}]$$

- Si $a > 0$ entonces el codomino son los valores menores e iguales "$\geq$ " al valor de la "y" del vértice: $C_f = [y_{\text{vértice}}, \infty)$

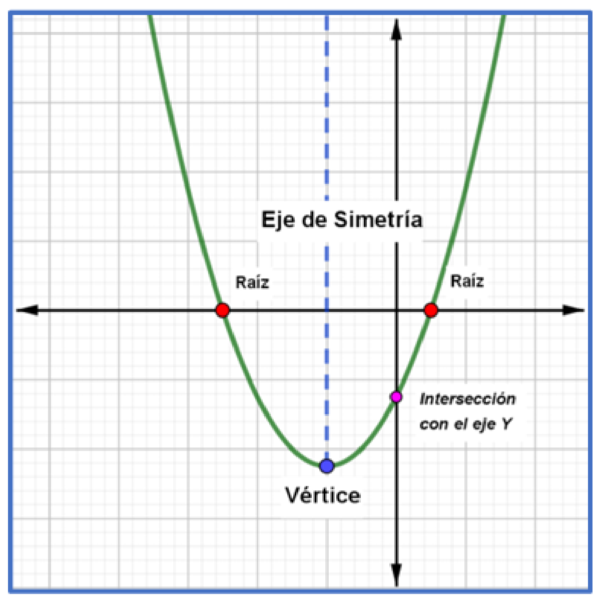
- La intersección con el eje x (raíces de la función) corresponde a un par ordenado, donde $y = 0$.

Para determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$; se puede hacer uso de la fórmula,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

la misma puede tener: dos raíces reales, una raíz real (de multiplicidad 2) o no tener raíces reales.



7.3 FUNCIÓN RACIONAL

Son funciones de la forma

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ donde $h(x)$ y $g(x)$ son polinomios además $g(x) \neq 0$.

El dominio son todos los números reales excepto los valores que hacen 0 el polinomio del denominador $g(x)$, es decir:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$$

Aspectos importantes:
Una función racional que no posee factores comunes en los polinomios que la forman, tendrá rectas que nos ayudan en su trazado llamadas asíntotas, las mismas orientan sobre el comportamiento de la función en sus cercanías.

Asíntota Vertical: ocurren en los valores que hacen cero al polinomio del denominador, tendrá la forma ***x = a***, siendo ***a*** un valor que anula al polinomio del denominador.

Asíntota horizontal: Para determinarla seguiremos la siguiente regla: Sea ***m*** el grado del polinomio del numerador y ***n*** el grado del polinomio del denominador.

- Si $m < n$ entonces la recta $y = 0$ es la Asíntota horizontal
- Si $m = n$ entonces la recta $y = \frac{a_m}{b_n}$ es la Asíntota horizontal siendo a_m el coeficiente del término de mayor potencia en el numerador y b_m el coeficiente del término de mayor potencia en el denominador.
- Si $m < n$ entonces no tiene Asíntota horizontal

El codominio se determinará por medio del gráfico.
Si ***x* = 0** pertenece al dominio de la función racional, entonces la función tendrá intersección con el eje ***y*** en $f(0)$.

Si tiene intersección con el eje ***x,*** esta se da en los valores que hacen que el polinomio del numerador en la función racional reducida, $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, de cero; es decir $h(x) = 0$.

Ejemplo 1: Determine los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Solución

Para determinar el dominio, se debe tener presente que la función no está definida cuando el denominador vale cero.

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$
$$C_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

....

Intersección con el eje ***y***, se da para ***x* = 0**

$$f(0) = \frac{0}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0 \rightarrow (0,0).$$

Asíntota Vertical

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

....

Asíntota Horizontal

El grado de *h (x)* es uno y el grado de *g (x)* es uno, de donde tenemos que los grados son iguales, por lo tanto, se tiene que la recta

$$y = \frac{a_m}{b_n}$$

es una asíntota horizontal

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

La intersección con el eje *x*. se da para ***y = 0***

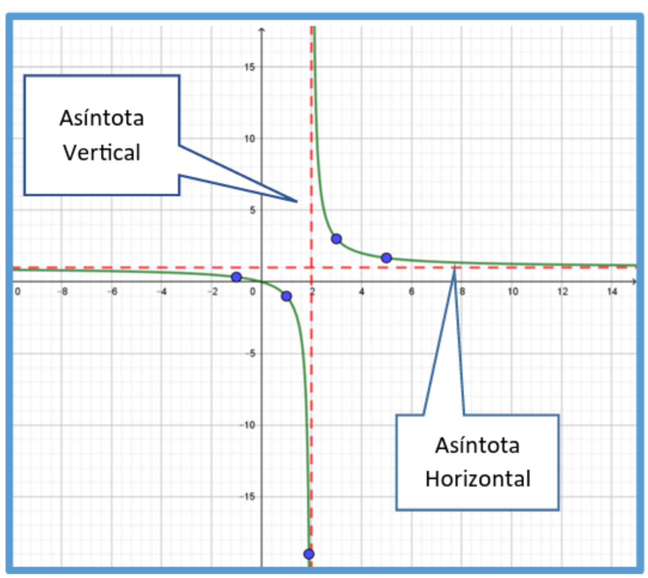
$$0 = \frac{x}{x-2}$$

$x = 0 \rightarrow (0,0)$

....

Tabla de valores

x	-1	1	1.9	2.1	3	5
y	1/3	-1	-19	21	3	5/3



7.4 FUNCIÓN IRRACIONAL

Sea $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$

Se estudiará solo para cuando la cantidad subradical *g (x)* es una expresión de primer grado, es decir g(x) = *bx + c*

- **El dominio** será el conjunto formado por todos los valores que resulten al resolver $g(x) \geq 0$, el mismo tendrá una de las siguientes formas.

D_f = $\left[-\frac{c}{b}, \infty\right)$ **o** **D_f =** $\left(-\infty, -\frac{c}{b}\right]$

- **El codominio** son todos los reales positivos incluyendo el cero.

C_f = $[0, \infty)$

- La gráfica es una semi parábola de eje de simetría horizontal. Su vértice será el punto $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

Dominio de la función

$2x - 1 \geq 0$

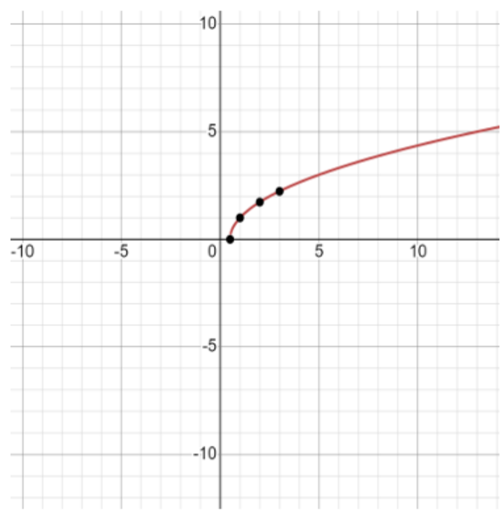
$2x \geq 1$

$x \geq$ ½ D_f = $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

C_f = $[0, \infty)$

Tabla de valores

x	**1/2**	1	2	3
y	0	1	1.73	2.23



7.5 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Dada la función

$\boldsymbol{f(x)} = |\boldsymbol{g(x)}|$

Se estudiará funciones con valor absoluto solo para cuando la cantidad dentro del valor absoluto es una expresión de primer grado.

- El **dominio** son todos los números reales. **D_f =** $\mathbb{R}$
- El **codominio** son todos los reales positivos incluyendo el cero.
- C_f = $[0, \infty)$
- La **gráfica** tiene la forma de una V, abierta hacia arriba cuando el signo que anteceda el valor absoluto es positivo.

Ejemplo 1:

$$f(x) = |2x - 4|$$

D_f = $\mathbb{R}$
C_f = $[0, \infty)$

……………………………………..

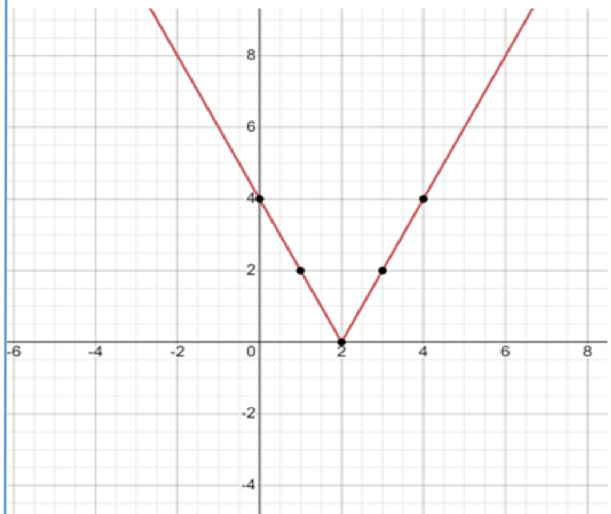
Para determinar el vértice se iguala a cero la expresión lineal dentro del valor absoluto y así se habrá determinado la abscisa del vértice que origina la gráfica.

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = \mathbf{2}$$

Para determinar la ordenada se evalúa la abscisa en la función

$$f(2) = |2(2) - 4| = 0$$

Vértice de la gráfica valor absoluto $V(2,0)$



……………………………………………………………

Tabla de valores

x	0	1	**2**	3	4
y	4	2	0	2	4