

TEMA 5. DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a se denota encerrándolo entre dos barras verticales, observe $|a|$ y se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} +a, & \text{si } a \geq 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |0| &= 0 \\ |-5| &= 5 \end{aligned}$$

Geoméricamente el valor absoluto de un número real nos indica la distancia a la cual se encuentra este número del cero. Por ejemplo, $|5|$ (léase valor absoluto de 5) es igual a 5, y nos indica que la distancia del punto 5 al origen (en la recta real), o sea al cero, es 5 unidades.

- **Propiedades del valor absoluto:**

1. $|x| < c \leftrightarrow -c < x < c$
2. $|x| \leq c \leftrightarrow -c \leq x \leq c$
3. $|x| > c \leftrightarrow x < -c \text{ ó } c < x$
4. $|x| \geq c \leftrightarrow x \leq -c \text{ ó } c \leq x$

Estas propiedades se cumplen cuando x es sustituida por cualquier expresión algebraica. Resolvamos una desigualdad con valor absoluto.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación $|x - 5| < 2$

Solución:

La desigualdad aplicando las propiedades de valor absoluto es equivalente a:

$$\begin{aligned} -2 < x - 5 < 2 &\rightarrow \text{Aplicando la primera propiedad} \\ -2 + 5 < x < 2 + 5 &\rightarrow \text{Se procede a resolver la doble desigualdad como se} \\ &\text{explicó anteriormente. De tener dudas repasa ese} \\ &\text{punto de la guía} \\ 3 < x < 7 &\text{El conjunto solución es el intervalo } (3,7) \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $|3x + 2| \geq 4$

Solución:

La desigualdad aplicando las propiedades de valor absoluto es equivalente a:

$$\begin{aligned} 3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4 &\text{Aplicando la propiedad 4} \\ 3x \geq 2 \quad \text{o} \quad 3x \leq -6 &\text{Restamos 2 al lado derecho en ambas ecuaciones.} \\ x \geq \frac{2}{3} \quad \text{o} \quad x \leq -2 &\text{Dividimos entre 3} \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$.