TEMA 4. DESIGUALDADES RACIONALES

Una desigualdad racional es aquella formada por un polinomio en el numerador y otro polinomio en el denominador como se ilustra a continuación:

$$\frac{x+2}{5x-3} > 0 \qquad\qquad \frac{x^2-9}{2-x} \leq 0$$

Para resolverlas se sigue un esquema de pasos parecido al de las desigualdades cuadráticas:

1. Agrupe todos los términos en el primer miembro de la desigualdad de forma tal que el segundo miembro sea cero.
2. Reduzca el primer miembro a un solo término es decir una expresión con un denominador común.
3. Factorice los polinomios tanto del numerador como del denominador.
4. Determine las raíces de los polinomios resultantes en el numerador y en el denominador, luego iguala a cero cada factor y despeja la variable.
5. Defina los intervalos.
6. Construya una tabla.
7. Determine la solución.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación $\frac{3x}{x+2} - 5 < 0$

Solución:

Todos los términos ya están de un solo lado (el lado izquierdo) así que procedemos con el siguiente paso.

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es menor buscamos un negativo.

$\frac{3x-5(x+2)}{x+2} < 0 \rightarrow$ Buscamos el mínimo común múltiplo para colocar todo en un solo denominador.

$\frac{3x-5x-10}{x+2} < 0 \rightarrow$ Realizamos la multiplicación

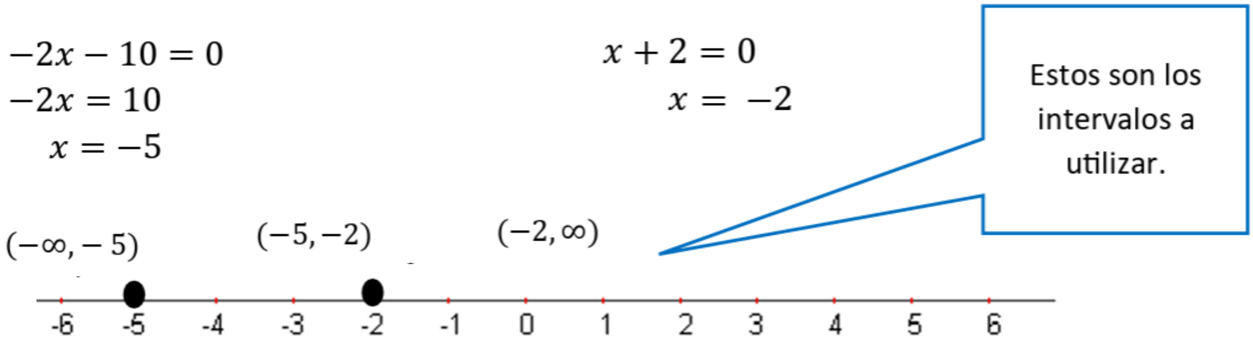
$\frac{-2x-10}{x+2} < 0 \rightarrow$ Reducimos los términos semejantes.

Debemos tener en cuenta que como el símbolo expresa que la expresión racional es menor a cero, es decir negativa, hay dos opciones para que una división nos de signo negativo. Siendo estas: $\frac{+}{-} = -$ y $\frac{-}{+} = -$

Para encontrar los intervalos analizamos nuestros factores $(-2x-10)$ y $(x+2)$. Los igualaremos a cero para ver donde se anulan.

$$-2x-10=0$$
$$-2x=10$$
$$x=-5$$

$$x+2=0$$
$$x=-2$$



Utilizaremos la tabla alternativa explicada anteriormente para resolver

Intervalo	$(-\infty,-5)$	$(\mathbf{-5},\mathbf{-2})$	$(\mathbf{-2},\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-6}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{0}$
Signo de $-2x-10$	$+$	$-$	$-$
Signo de $x+2$	$-$	$-$	$+$
Signo de $\frac{-2x-10}{x+2}$	$-$	$+$	$-$

Signos de la respuesta

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de los tres intervalos obtenidos, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,-5)$da $-$,
- El intervalo $(\mathbf{-5},\mathbf{-2})$ da $+$, y
- El intervalo $(\mathbf{-2},\infty)$ da $-$.

Esto nos indica que los factores son cero cuando x es -5 y -2. Estos números dividen la recta en los intervalos indicados a continuación

Como el problema es menor que cero; es decir, $\frac{-2x-10}{x+2}<0.$ La solución es la unión de los dos intervalos que dan negativo, estos son$(-\infty,-5)$y $(-2,\infty)$ .Esto lo expresamos de la siguiente manera $(-\infty,-5)\cup(-2,\infty)$ y su representación gráfica es: