

1 | ÁLGEBRA

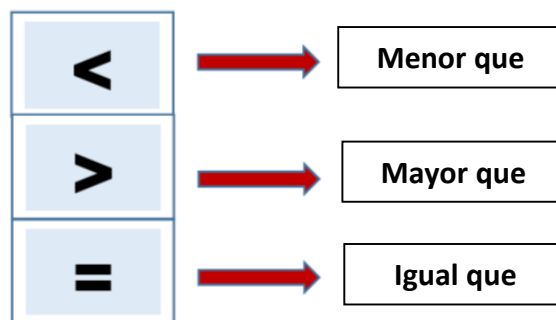
TEMA 1. INTERVALOS

Antes de iniciar el tema de las desigualdades debemos familiarizarnos con el manejo de los intervalos y repasar las relaciones de orden en los números reales.

¡COMENCEMOS! ___ .

- Orden en los números reales

SÍMBOLOS A UTILIZAR



Los números reales son magnitudes ordenadas. Un número a es mayor que un número b si en la recta numérica a está a la derecha de b . Lo cual se puede escribir de la siguiente manera:

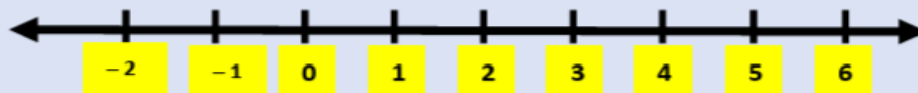
$$a > b \text{ (} a \text{ es mayor que } b \text{), o lo que es igual } b < a \text{ (} b \text{ es menor que } a \text{).}$$

Los símbolos de desigualdad $<$ y $>$ tienen una interpretación geométrica muy clara sobre la recta numérica.

Si $a < b$, entonces a está a la izquierda de b .



Si $c > b$, entonces c está a la derecha de b .



Ejemplo 1:

- a) $4 > 2$ se lee: 4 es mayor que 2 (4 se encuentra a la derecha del 2)
- b) $3 < 5$ se lee: 3 es menor que 5 (3 se encuentra a la izquierda de 5)



En muchas ocasiones se utiliza el símbolo \geq , \leq , estos símbolos describen lo siguiente:

- $a \geq b$ Indica que: a es mayor que b o a es igual a b , en forma más simple se dice que, a es mayor o igual que b .
- $a \leq b$ Indica que: a es menor que b o a es igual a b , en forma más simple se dice que, a es menor o igual que b .

Ejemplo 2:

- $x \leq 8$ se lee: x es menor o igual a 8

Donde, x representa la palabra números, lo que nos indica esta expresión es números que cumplan la condición de ser menor o igual al número 8.

Las desigualdades que no incluyen el símbolo igual se denominan **estrictas**, y las que lo incluyen se denominan **no estrictas**.

- **Propiedad axioma de la tricotomía**

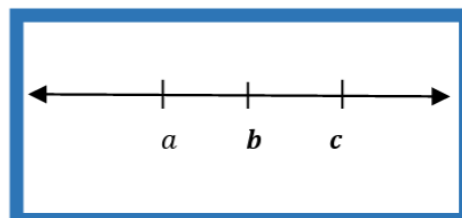
Sean a y b dos números reales entre ellos solo se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a < b$$

$$a = b$$

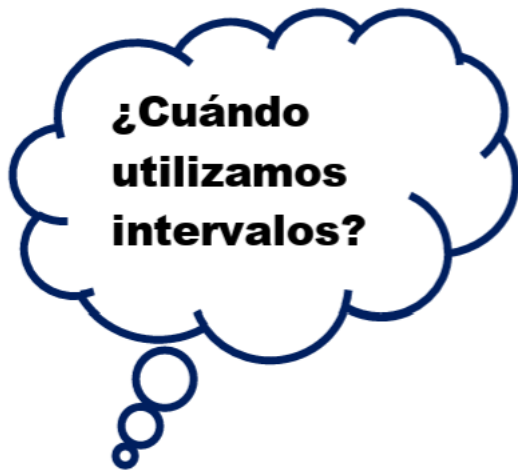
$$a > b$$

Un punto b estará entre a y c , si y solo si $a < b$ y $b < c$; cuando se presente este caso, se pueden definir estas dos relaciones mediante una sola expresión utilizando una **doble desigualdad** de la siguiente manera: $a < b < c$, con lo que se indica que " b es mayor que a y a la vez b es menor que c ".



Lo anterior define un intervalo de recta en la cual b puede adquirir distintos valores que estén entre a y c . **A los números a y c se les llama extremos del intervalo.**

- Intervalos



A menudo utilizas intervalos, en muchas situaciones y actividades de tu contexto, por ejemplo:

Cuando indicas la edad de los ciudadanos que pueden votar en las elecciones presidenciales.

Cuando calculas un rango para estimar el costo de unas zapatillas que deseas comprar: Cuesta entre B/.40.00 a B/. 50.00.

Para indicar el promedio de las calificaciones de un estudiante para estar en el cuadro de honor de tu colegio.

Un intervalo se define como el subconjunto de números reales que queda delimitado en una relación de orden, por ejemplo: el intervalo formado por todos los números reales mayores que el número cero y menores que el número dos, los números que delimitan el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.

En otras palabras, sean a y b dos números reales (\mathbb{R}) con a menor que b un intervalo es el subconjunto de números reales que están entre a y b ; donde a los números a y b se les llama extremos del intervalo.

La siguiente tabla presenta las diferentes formas de expresar un intervalo; esta primera tabla presenta intervalos que están delimitado en ambos extremos, tienen un punto de inicio a y otro punto de fin b , los cuales se pueden incluir o no dependiendo de lo que se quiera expresar por medio de él, el punto a se denominará extremo inferior o izquierdo del intervalo, siendo este el inicio del intervalo, el punto b será el extremo superior o derecho del intervalo, el cual es el final del intervalo.

Recuerde: El intervalo incluye a todos los números que están entre a y b .

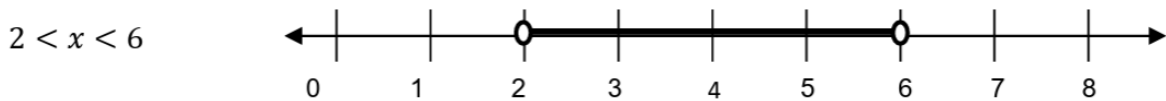
Tabla N°1. Clasificación de intervalos según notación de intervalo, conjunto, desigualdad y gráfica.

TIPO DE INTERVALO	NOTACIÓN DE INTERVALO	NOTACIÓN DE CONJUNTO	NOTACIÓN DE DESIGUALDAD	NOTACIÓN GRÁFICA
Abierto (No incluye ambos extremos)	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$a < x < b$	
Cerrado (Incluye ambos extremos)	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$a \leq x \leq b$	
Semi abierto por la derecha (De los extremos solo se incluye el izquierdo)	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$a \leq x < b$	
Semi abierto por la izquierda (De los extremos solo se incluye el derecho)	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$a < x \leq b$	

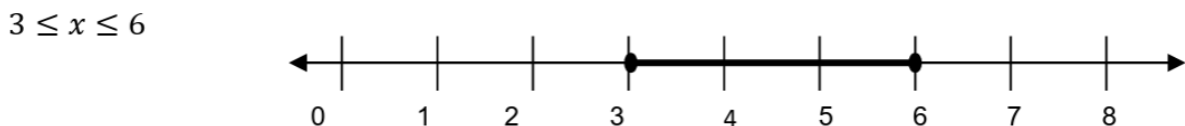
Ejemplo 3:

Represente de intervalos en notación de desigualdad y notación gráfica

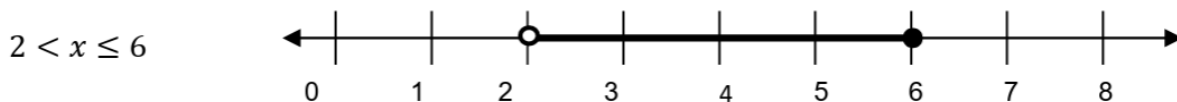
a) **Intervalo Abierto** (incluye a todos los números entre 2 y 6, no incluye al 2 ni al 6)



b) **Intervalo cerrado** (incluye a todos los números entre 3 y 6, incluye además al 3 y al 6)



c) **Intervalo semi abierto por la izquierda** (incluye a todos los números entre 2 y 6, no incluye al 2 si incluye al 6)



1) Intervalo semi abierto por la derecha (incluye a todos los números entre 2 y 6, incluye al 2 y no incluye al 6)



También hay intervalos que están delimitados solo por uno de sus extremos, los cuales son llamados intervalos no acotados.

Ejemplo 4: el intervalo formado por todos los números reales mayores o iguales que el número cinco $x \geq 5$. Si observamos este intervalo empieza con el número cinco y no tiene un último número.

- **Intervalos no acotados**

Son intervalos que no tienen límite inferior o superior; para representar esto se utilizará el símbolo, el mismo se lee infinito, el cual indica que la sucesión de números continúa indefinidamente, es decir, que hay un valor mayor a cualquier cantidad asignable.

Cuando vamos a indicar que la sucesión de números crece, se le pondrá el signo positivo delante del símbolo, observe: $+\infty$ el cual se lee más infinito o infinito positivo, y si la sucesión decrece indefinidamente se le pondrá el signo negativo delante del símbolo: $-\infty$ se lee menos infinito o infinito negativo. Si no hay lugar a confusión se podrá escribir simplemente: ∞ para referirse al más infinito.

Estos símbolos no representan un número real, por lo tanto, no se pueden hacer operaciones aritméticas con ellos.

La segunda tabla que se presenta a continuación ejemplifica los intervalos no acotados. En este tipo de intervalo nunca se podrá incluir el extremo representado por el infinito ya que el mismo no es un número real.

Tabla N°2. Clasificación de intervalos no acotados, según notación de intervalo, conjunto, desigualdad y gráfica.

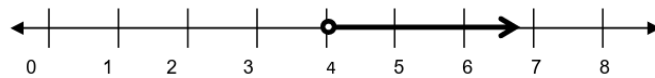
INTERVALOS INFINITOS (NO ACOTADOS)	NOTACIÓN DE INTERVALO	NOTACIÓN DE CONJUNTO	NOTACIÓN DE DESIGUALDAD	NOTACIÓN GRÁFICA
Formado por todos los números mayores que a	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$x > a$	
Formado por todos los números mayores o iguales que a	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$x \geq a$	
Formado por todos los números menores que b	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	$x < b$	
Formado por todos los números menores o iguales que b	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	$x \leq b$	
Contiene todos los números reales	$(-\infty, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\}$	$-\infty < x < \infty$	

Ejemplo 5: Represente en notación de desigualdad y notación gráfica los intervalos:

- 1) $(4, \infty)$
- 2) $[4, \infty)$
- 3) $(\infty, 6]$

Solución:

1) $x > 4$



2) $x \geq 4$



3) $x \leq 6$



- **Unión e Intersección con Intervalos**

Unión de conjuntos

Sea A y B dos intervalos, para representar la unión de A y B, se escribe $A \cup B$.

$A \cup B$ queda representado por todos los elementos que pertenecen a A, o a B o a ambos. Lo anterior lo podemos escribir como:

La unión del intervalo A y B en la recta numérica es todo aquello que queda marcado sobre la recta luego de haber representado cada intervalo.

Intersección de conjuntos

Sea A y B dos intervalos, para representar la intersección de A y B. Se escribe $A \cap B$, al conjunto que representa todos los elementos que están simultáneamente en A y en B; en otras palabras, los elementos que son comunes a ambos conjuntos.

Lo anterior se puede escribir como:

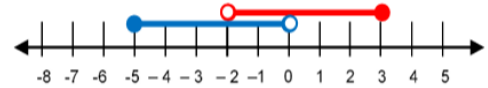
$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La intersección de los intervalos A y B en la recta real queda representada solo por aquellos números que fueron marcados por ambos intervalos.

Ejemplo 6: Para los siguientes intervalos $A = [-5, 0)$ y $B = (-2, 3]$; determine la unión e intersección de A y B.

Solución:

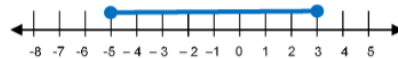
El intervalo A esta representado en color azul y el intervalo B se ha representado en color rojo.



Pertencen a la unión aquellos números que están en A o B o en ambos.

Todo aquello que queda marcado sobre la recta, representa entonces $A \cup B$, lo cual podemos escribir de las siguientes formas:

- $A \cup B = [-5, 3]$
- $A \cup B = -5 \leq x \leq 3$
- Notación gráfica $A \cup B$



Pertencen a la intersección aquellos números que estén en A y estén en B a la vez.

$A \cap B$ queda representado en la recta real solo por aquellos números que se han marcado por ambas representaciones. Se puede escribir utilizando una de las siguientes formas:

$$A \cap B = x < 0 \text{ y } x > -2 \text{ o utilizando la doble desigualdad } -2 < x < 0$$

$$A \cap B = (-2, 0)$$

