IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- Identidad

Se llama identidad al enunciado de igualdad que es válido para todos los valores de la variable para los cuales las funciones involucradas en el enunciado están definidas. Por ejemplo: la ecuación $(x + 2)(x - 2) = x2 - 4$ es válida para todo valor de x, por tanto es una identidad.

- Identidad Trigonométrica

Una expresión trigonométrica es una identidad trigonométrica. Las identidades trigonométricas se clasifican, de acuerdo a la forma en que han sido deducidas, en tres grupos que son: funciones recíprocas, por cociente y relaciones pitagóricas, estas se deducen de las seis funciones trigonométricas para desarrollar ocho relaciones fundamentales.

- Funciones Recíprocas

Dos funciones son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad, es decir.

$$(1)\quad sen\theta . csc\theta = 1$$

$$(2)\quad cos\theta . sec\theta = 1$$

$$(3)\quad tan\theta . cot\theta = 1$$

Demostración:

Tomando como referencia un triángulo rectángulo en el plano cartesiano, como muestra la Figura 3, con catetos de lado x, y e hipotenusa r.

Consideremos la primera función recíproca y la definición de las funciones trigonométricas. Para demostrarla debemos recordar que:

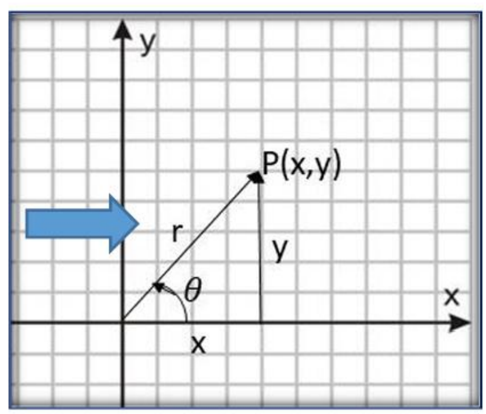


Figura 3. Ángulo en el primer cuadrante

$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{lado\ opuesto}{hipotenusa}; \quad cos\theta = \frac{r}{y} = \frac{hipotenusa}{lado\ opuesto}$$

Si reemplazamos el $\boldsymbol{sen\theta.csc\theta}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{sen\theta.csc\theta} = \frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}$$

Simplificando,

$$\boldsymbol{sen\theta.csc\theta} = \frac{\cancel{y}}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{\cancel{y}} = 1$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\boldsymbol{sen\theta.\ csc\theta=1}$$

De $\boldsymbol{sen\theta\,.\,csc\theta = 1}$ se obtiene $\boldsymbol{sen\theta = \frac{1}{csc\theta}}$, $\boldsymbol{csc\theta = \frac{1}{sen\theta}}$

De $\boldsymbol{cos\theta\,.\,sec\theta = 1}$ se obtiene $\boldsymbol{cos\theta = \frac{1}{sec\theta}}$, $\boldsymbol{sec\theta = \frac{1}{cos\theta}}$

De $\boldsymbol{tan\theta\,.\,cot\theta = 1}$ se obtiene $\boldsymbol{tan\theta = \frac{1}{cot\theta}}$, $\boldsymbol{cot\theta = \frac{1}{tan\theta}}$

- ## Relaciones por Cociente

Estas se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas:

(4) $\boldsymbol{tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}}$ **(5)** $\boldsymbol{cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}}$

<u>Demostración:</u> Usando la figura 3 y la definición de las funciones trigonométricas, tenemos:

Reemplazando,

$$\frac{sen\ \theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r}$$

Simplificando,

$$= \frac{y}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{x}$$

$$= \frac{y}{x}$$

Por definición, según la figura 3

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$$

• Relaciones Pitagóricas

Recordando el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = r^2$ (según la figura 3) y la definición de las funciones trigonométricas se tiene:

Si se dividen en ambos miembros de la igualdad por r^2, obtenemos:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \text{ (simplificando)}$$

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ (definición de $sen\theta$ y $cos\theta$)

En forma similar se obtienen las otras dos identidades pitagóricas.

(6) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

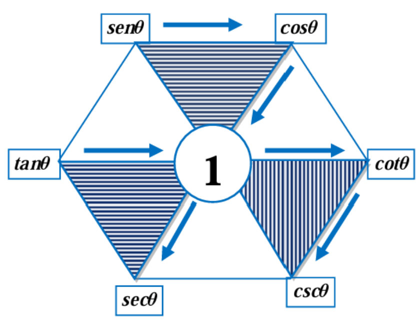
(7) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(8) $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

Las ocho relaciones fundamentales son identidades y se pueden usar para deducir otras menos fundamentales.

A continuación, se presenta el hexágono de las identidades, el cual te ayudará para recordar las 8 identidades trigonométricas.

HÉXAGONO DE LAS IDENTIDADES



1. Las dos funciones en la diagonal son recíprocas:

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta} \quad \Rightarrow \quad sen\theta \ . \ csc\theta = 1$$

$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta} \quad \Rightarrow \quad cos\theta \ . \ sec\theta = 1$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \quad \Rightarrow \quad tan\theta \ . \ cot\theta = 1$$

2. Cualquier función es igual al producto de las funciones que se encuentran en los vértices adyacentes:

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \quad \Rightarrow \quad sen\theta = tan\theta \ . \ cos\theta$$

$$cot\,\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} \quad \Rightarrow \quad cos\theta = cot\,\theta \ . \ sen\theta$$

3. En cada triángulo sombreado, el cuadrado de la función superior izquierda más el cuadrado de la función superior derecha es igual al cuadrado de la función inferior:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \ , \quad sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$$

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta \quad \Rightarrow \quad tan^2\theta = sec^2\theta - 1 \ , \quad 1 = sec^2\theta - tan^2\theta$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \quad \Rightarrow \quad cot^2\theta = csc^2\theta - 1 \ , \quad 1 = csc^2\theta - cot^2\theta$$

Para demostrar que una ecuación es una identidad, consiste en convertir uno de los miembros de la ecuación en la forma que tiene el otro miembro. No hay un método general para demostrar estos ejercicios, pero existen algunas indicaciones que te pueden ayudar.

- Es conveniente trabajar con el miembro más complicado de la identidad reduciéndolo a la forma del miembro más sencillo.

- De ser posible se debe factorizar, a veces es necesario multiplicar el numerador y denominador por un mismo factor, es equivalente a multiplicar por la unidad.

- De no ser posible aplicar ninguna de las indicaciones anteriores, las funciones del miembro más complicado se convierten en senos y cosenos y se simplifica.